Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 533.9

Н. А. Бритов

О ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ БЕЗЫНДУКЦИОННЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Исследуются вопросы применимости приближения Стокса для описания стационарных МГД-течений в бесконечно длинных цилиндрах в отсутствие движения в направлении образующей. Внешнее магнитное поле стационарно, имеет только вихревую составляющую, компланарно плоскости течения, трансверсально поверхности цилиндра. Указываются достаточные условия, связывающие значения чисел Рейнольдса и Гартмана, при которых допустимо пренебрежение нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье — Стокса. Получены эффективные априорные оценки различных норм абсолютной погрешности скорости течения.

Проблема обоснования и исследования диапазона применимости приближения Стокса для описания течений электропроводной жидкости была сформулирована на VI Рижском совещание по магнитной гидродинамике [1] и в полном объеме пока не решена. Первые результаты в этом направлении подытожены во второй главе книги [2]. Принципиальные результаты, полученные в [3], в известной степени закрыли проблему обоснования приближения Стокса для ряда плоских и осесимметричных МГД-течений. Аналогичные результаты установлены [4] для двумерных течений в ограниченных неодносвязных областях.

1. Постановка задачи. Рассматривается течение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в ограниченной замкнутой области Ω, граница которой Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров Γ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Указанная область является сечением бесконечно длинного цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующей. Вне цилиндра магнитная проницаемость среды соответствует вакууму. Поверхность цилиндра непроницаема для жидкости. Течение возбуждается заданным на Γ движением со скоростью $\mathbf{v}_\Gamma$. Течение в направлении образующей отсутствует. На течение накладывается внешнее магнитное поле индукцией $\mathbf{B}$. Предполагается, что векторное поле $\mathbf{B}$ стационарно, компланарно плоскости течения, пренебрежимо мало искажается течением (безындукционный случай), не обращается в нуль на $\Omega \cup \Gamma$ и удовлетворяет условиям ($\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к Γ)

$$\int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu}\, d\Gamma_i = 0, \qquad \int\limits_{\Gamma_0} |\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2\, d\Gamma_0 \neq 0$$

Относительно поля $\mathbf{v}_\tau = v_\tau \boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный к Γ вектор) предполагается, что оно может быть продолжено внутрь Ω до дважды дифференцируемого поля $\mathbf{v}_0$. Способ продолжения будет указан ниже. В безразмерных переменных рассматриваемое течение описывается краевой задачей [2]

$$\begin{gathered}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla (P + {}^1/_2 \operatorname{Re} |\mathbf{v}|^2) = \operatorname{Re} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \\ - \operatorname{Ha}^2 (\varkappa e + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0;\ e = \mathrm{const},\ \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}|_\Gamma = v_\tau \tag{1.2}$$

где $\mathrm{Re} > 0$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Ha} > 1$ — число Гартмана; поле $\mathbf{B}$ в дальнейшем считается известным.

Стоксовым приближением к решению задачи (1.1), (1.2) называется пара ($\mathbf{v}_s$, P_s), удовлетворяющая системе (1.1), в которой полагается $\mathrm{Re} = 0$ и краевым условиям (1.2). Погрешностью стоксова приближения называется пара ($\delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_s$, $\delta P = P - P_s$). Ниже будут получены оценки различных норм векторного поля $\delta\mathbf{v}$.

2. Обобщенные решения и уравнения баланса энергии. Как обычно [2, 5], $J(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω соленоидальных векторов, $H(\Omega)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием $J(\Omega)$ по норме, порождаемой скалярным произведением

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]_H = \langle \nabla \times \mathbf{a}_1, \nabla \times \mathbf{a}_2 \rangle$$

Здесь и в дальнейшем

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \int_\Omega \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \, d\Omega, \quad \| \mathbf{a} \|_p = \left\{ \int_\Omega | \mathbf{a} |^p \, d\Omega \right\}^{1/p}$$

причем при $p = 2$ индекс в обозначении нормы будет опускаться.

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) называется векторное поле $\mathbf{v}(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющее для любого $\mathbf{\Phi} \subset J(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\langle \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{\Phi} \rangle = \mathrm{Re} \langle \nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{\Phi} \times \mathbf{v} \rangle + \mathrm{Ha}^2 \langle \varkappa e + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \mathbf{B} \times \mathbf{\Phi} \rangle \qquad (2.1)$$

и такое, что поле $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in H(\Omega)$.

Аналогично определяется обобщенное решение краевой задачи для стоксова приближения. Оценки норм погрешности приближения Стокса будут определяться из уравнения баланса энергии для $\delta\mathbf{v}$. Это уравнение получается из (2.1), если положить $\mathbf{\Phi} = \delta\mathbf{v}$ и представить $\mathbf{v}$ в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \delta\mathbf{v}$

$$\| \nabla \times \delta\mathbf{v} \|^2 + \mathrm{Ha}^2 \| \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B} \|^2 = \mathrm{Re} (\langle \nabla \times \mathbf{v}_s, \delta\mathbf{v} \times \mathbf{v}_s \rangle + \langle \nabla \times \delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v} \times \mathbf{v}_s \rangle) \qquad (2.2)$$

Выражение $e \langle \varkappa, \mathbf{B} \times \delta\mathbf{v} \rangle$ обращается в нуль, поскольку в силу нулевых граничных условий для $\delta\mathbf{v}$ существует функция тока $\delta\psi$, связанная с $\delta\mathbf{v}$ условием $\delta\mathbf{v} = - \varkappa (\nabla\delta\psi)$. Отсюда

$$\langle \varkappa, \mathbf{B} \times [\varkappa \times (\nabla\delta\psi)] \rangle = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Gamma_i} \delta\psi(\Gamma_i) \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_i$$

Поскольку $\delta\psi$ принимает на Γ_i постоянные значения (заранее неизвестные), последняя сумма обращается в нуль ввиду условий, накладываемых на поле $\mathbf{B}$.

Из (2.2) видно, что для получения оценок норм $\delta\mathbf{v}$ необходимо оценить слагаемые в правой части (2.2) через нормы $\| \nabla \times \mathbf{v}_s \|$, $\| \mathbf{v}_s \times \mathbf{B} \|$, $\| \mathbf{v}_0 \|_p$, $\| \nabla \times \mathbf{v}_0 \|$. Эти слагаемые содержат поле $\mathbf{v}_s$, нормы которого также требуется оценить. С этой целью аналогично (2.2) выписывается уравнение баланса энергии для $\mathbf{u}_s$

$$\| \nabla \times \mathbf{u}_s \|^2 + \mathrm{Ha}^2 \| \mathbf{u}_s \times \mathbf{B} \|^2 = - \langle \nabla \times \mathbf{u}_s, \nabla \times \mathbf{v}_0 \rangle - \\ - \mathrm{Ha}^2 \langle \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}, \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \rangle, \quad \mathbf{u}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_0 \in H(\Omega) \qquad (2.3)$$

3. Основное неравенство. Для оценки слагаемых в правой части (2.2) в Ω вводится криволинейная система координат, связанная с геометрией поля $\mathbf{B}$. Локальный базис этой системы образован единичными векторами

$\beta_1 = |\mathbf{B}|^{-1}\mathbf{B}$ и $\beta_2 \perp \beta_1$. В этом базисе

$$\delta\mathbf{v} = \delta v_1\beta_1 + \delta v_2\beta_2,\ \mathbf{u}_s = u_1\beta_1 + u_2\beta_2$$

Применение неравенства Коши к слагаемым в правой части (2.2) приводит к оценкам

$$|\langle\nabla\times\mathbf{v}_s, \delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_s\rangle| \leqslant N_s\|\nabla\times\mathbf{v}_s\|,\quad |\langle\nabla\times\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_s\rangle| \leqslant N_s\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|;$$
$$N_s = \|\delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_s\| \qquad (3.1)$$

где нужно оценить N_s. Использование разложений $\delta\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_s$ в базисе (β_1, β_2), неравенства Гельдера и мультипликативного неравенства [5] дает

$$N_s \leqslant N_0 + \|(\delta v_1 u_2 - \delta v_2 u_1)\varkappa\| \leqslant C_p\|\mathbf{v}_0\|_p\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| +$$
$$+ C_{1q}(\|\delta v_1\|\|\nabla u_2\|^{2/q}\|u_2\beta_2\|^{1-2/q} + \|\nabla u_1\|\|\nabla\delta v_2\|^{2/q}\|\delta v_2\beta_2\|^{1-2/q})$$
$$N_0 = \|\delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_0\|,\quad C_p = \sqrt{2}\left(\frac{p}{p-2}\right)^{2/p} d^{1-2/p},\quad C_{1q} = q^{1-2/q}d^{2/q}$$

$(2 < p < 4,\ 4 < q,\ d$ — диаметр $\Omega)$.

Подстановка этой оценки в (3.1) и применение неравенства Юнга приводит к следующим оценкам слагаемых в правой части (2.2):

$$|\langle\nabla\times\mathbf{v}_s, \delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_s\rangle| \leqslant C_p\|\mathbf{v}_0\|_p\|\nabla\times\mathbf{v}_s\|\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| +$$
$$+ C_{1q}\{R\|\nabla\times\mathbf{v}_s\|\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| + q^{-1}\|\nabla\times\mathbf{v}_s\|\|\nabla\times\mathbf{u}_s\|\times$$
$$\times[2\varepsilon_1^{q/2}\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| + (q-2)\varepsilon_1^{-q(q-2)}\|\delta v_2\beta_2\|]\} \qquad (3.2)$$
$$|\langle\nabla\times\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}_s\rangle| \leqslant C_p\|\mathbf{v}_0\|_p\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2 + C_{1q}\{R\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2 +$$
$$+ {}^1/_2 q^{-1}\|\nabla\times\mathbf{u}_s\|[(q+2)\varepsilon_2^{2q/(q+2)}\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2 + (q-2)\varepsilon_2^{-2q/(q-2)}\|\delta v_2\beta_2\|^2]\}$$
$$R = \|\nabla\times\mathbf{u}_s\|^{2/q}\|u_2\beta_2\|^{1-2/q}$$

Здесь использованы оценки

$$\|\nabla u_i\| \leqslant \|\nabla\times\mathbf{u}_s\|,\ \|\nabla\delta v_i\| \leqslant \|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|$$

Остается оценить $\|\nabla\times\mathbf{u}_s\|$, $\|u_2\beta_2\|$. Для этого используется уравнение баланса энергии (2.3). Слагаемые в правой части (2.3) оцениваются при помощи неравенства Коши, откуда путем выделения полных квадратов получим

$$\|\nabla\times\mathbf{u}_s\| \leqslant \|\nabla\times\mathbf{v}_0\| + {}^1/_2\mu\,\mathrm{Ha}\,\|\mathbf{v}_0\|$$
$$\|u_2\beta_2\| \leqslant {}^1/_2\|\nabla\times\mathbf{v}_0\| + \mu\,\mathrm{Ha}\,\|\mathbf{v}_0\|)\mathrm{Ha}^{-1}$$
$$\mu = M/m,\quad 0 < m = \inf_{\Omega\cup\Gamma}|\mathbf{B}|,\quad M = \sup_{\Omega\cup\Gamma}|\mathbf{B}|$$

Подстановка этих оценок в (3.2), (3.1) и (2.3) и группировка однотипных слагаемых приводит к основному неравенству

$$({}^3/_4 - C_p\,\mathrm{Re}\,\|\mathbf{v}_0\|_p - 4^{2/q-1}C_{1q}M_{21}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{2/q-1})\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2 +$$
$$+[(m\,\mathrm{Ha})^2 - (q-2)C_{2q}(C_{1q}\,\mathrm{Re}\,M_{12})^{2q/(q-2)}]\|\delta v_2\beta_2\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Re}\,\{C_p\|\mathbf{v}_0\|_p M_{41}\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| + 4^{(4-q)/2q}C_{1q}M_{31}{}^2\,\mathrm{Ha}^{2/q}\times \qquad (3.3)$$
$$\times[(q+1)\mathrm{Ha}^{-1}\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| + (q/2-1)\|\delta v_2\beta_2\|]\}$$
$$[M_{kl} = k\|\nabla\times\mathbf{v}_0\| + \mu l\|\mathbf{v}_0\|,\ C_{2q} = [4^{6-q}(q+2)^{q+2}q^{-2q}]^{1/(q+2)}$$

В (3.3) выбрано

$$[\varepsilon_1{}^q = \mathrm{Ha}^{-2+4/q},\ \varepsilon_2 = [4^{2/q}q^{-1}(q+2)C_{1q}\,\mathrm{Re}\,M_{21}]^{(q+2)/(2q)}$$

4. Построение векторного поля $\mathbf{v}_0$. Для построения векторного поля используется некоторая модификация известной конструкции Хопфа [6]. В силу непроницаемости границы поле $\mathbf{v}_0$ можно представить в виде $\mathbf{v}_0 = \nabla\times(\chi_\varepsilon(x)\psi_0(x)\varkappa) = \chi_\varepsilon(x)\nabla\psi_0\times\varkappa + \psi_0\nabla\chi_\varepsilon(x)\times\varkappa,\quad x\in\Omega,\quad \varepsilon > 0.$

Здесь $\psi_0(x)$ — дважды дифференцируемая в Ω функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\psi_0|_\Gamma = 0,\ \mathbf{v}\cdot\nabla\psi_0|_\Gamma = -v_\tau$$

Функция $\chi_\varepsilon(x)$ имеет вид [7]

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \rho(x) < \varepsilon/2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\frac{2\pi}{\varepsilon}\left[\rho(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right] - \\ \quad - \frac{1}{4}\cos^3\frac{2\pi}{\varepsilon}\left[\rho(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right], & \varepsilon/2 \leqslant \rho(x) < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leqslant \rho(x) \end{cases}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до ближайшего контура границы, ε не превосходит половины наименьшего расстояния между контурами Γ_i.

В силу выбора $\varkappa_\varepsilon(x)$ поле $\mathbf{v}_0$ обращается в нуль вне Ω_ε — полосы шириной ε примыкающей к Γ. Поэтому конкретный вид функции $\psi_0(x)$ достаточно определить в этой полосе, считая, что вне полосы она продолжается произвольно с сохранением требуемой гладкости. Если Γ удовлетворяет условию Ляпунова, то в $\Omega_\varepsilon \cup \Gamma$ можно положить

$$\psi_0(x) = -v_\tau(\sigma_x)\,\rho(x),\ v_\tau \in C_2(\Gamma) \tag{4.1}$$

где σ_x — значение естественного параметра точки x_Γ, ближайшей к $x \in \Omega$ точки контура Γ.

Пусть

$$M_\nabla = \sup_{\Omega_\varepsilon \cup \Gamma} |\nabla\psi_0(x)|,\quad M_\Delta = \sup_{\Omega_\varepsilon \cup \Gamma} |\Delta\psi_0(x)|$$

L_Γ — суммарная длина контуров Γ; k — локальная кривизна контуров Γ; $K = \sup_{\Gamma_{ij}} |k|$, Γ_{ij} — j-й гладкий кусок контура Γ_i; $\varepsilon < \varepsilon_0 = \min[p_m/3,\ (2K)^{-1}]$. Путем несложных, но громоздких выкладок устанавливаются оценки

$$\begin{gathered} \|\mathbf{v}_0\|_p \leqslant M_\nabla M_p \varepsilon^{1/p},\ \|\nabla\times\mathbf{v}_0\| \leqslant M^{(2)}\varepsilon^{-1/2} \\ M_p = M_\nabla\left\{1 + 3\pi^{1-1/4p}2^{-2-1/p}\left[\left(\frac{2^{2p-1}-1}{2p+1}\right)^{1/2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{2^{2p+3}-1}{2p+3}\right)^{1/2}\right]^{1/p}\left[\frac{\Gamma(3p+1/2)}{\Gamma(3p+1)}\right]^{1/2p}\right\} L_\Gamma^{1/p} \\ M^{(2)} = (M_\nabla\varepsilon + 90M_\nabla)\,L_\Gamma^{1/2} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Если $\psi_0(x)$ определяется формулой (4.1), то

$$\begin{gathered} M_\nabla = \left\{\max_\Gamma v_\tau^2 + 2\varepsilon^2\max_\Gamma\left(\frac{dv_\tau}{d\sigma}\right)^2\right\}^{1/2} \\ M_\Delta = 2\left\{K\max_\Gamma|v_\tau| + 4\varepsilon^2\max_\Gamma\left|\frac{dv_\tau}{d\sigma}\right|\max_\Gamma\left|\frac{dk}{d\sigma}\right| + 2\varepsilon\max_\Gamma\left|\frac{d^2v_\tau}{d\sigma^2}\right|\right\} \end{gathered} \tag{4.3}$$

Величина ε выбирается так, чтобы обеспечить наименьший порядок роста на Ha суммы $\|\nabla\times\mathbf{v}_0\| + \mathrm{Ha}\,\|\mathbf{v}_0\|$, именно: $\varepsilon = \varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1}$.

5. **Условия допустимости приближения Стокса. Оценки погрешности.** Всюду в дальнейшем $q > 8$, $p = 2q/(q-4)$. Подстановка оценок (4.2) в (3.3) приводит к неравенству

$$\begin{gathered} \{3/4 - \mathrm{Ha}^{2/q-1/2}\,\mathrm{Re}\,(4^{2/q-1}\mu_{21}C_{1q} + C_pM_\nabla M_p\varepsilon_0^{1/q})\}\,\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2 + \\ + \mathrm{Ha}^2\{m^2 - (q-2)\,C_{2q}\,(C_{1q}\mu_{12}\mathrm{Re})^{2q/(q-2)}\,\mathrm{Ha}^{-(q-4)/(q-2)}\}\,\|\delta v_2\beta_2\|^2 \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{2/q}\,\{[C_p M_\nabla M_p \varepsilon_0{}^{1/p} + 4^{(4-q)/2q}\,(1+q)\,C_{1q}\,\mu_{41}{}^2]\,\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| + + 4^{(4-q)/2q}\,(q/2-1)\,C_{1q}\mu_{31}{}^2\,\mathrm{Ha}\,\|\delta v_2\beta_2\|\}, \quad (5.1)$$

$$\mu_{kl} = kM_\nabla M_2\varepsilon_0{}^{1/2} + lM^{(2)}\varepsilon_0^{-1/2}$$

Из (5.1) видно, что условия допустимости приближения Стокса совпадают с условиями положительности коэффициентов при $\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^2$, $\|\delta v_2\beta_2\|^2$ и имеют вид

$$\mathrm{Ha} \geqslant \mathrm{Re}^{2q/(q-4)}\max\{(4^{2q-1/2}\mu_{21}C_{1q} + +2C_pM_\nabla M_p\varepsilon_0^{1/p})^{2q/(q-2)},\ [^4/_3 m^{-2}C_{2q}\,(q- -2)^{q-2}\,(C_{1q}M_{12})^{2q}]^{1/(q-4)}\} \quad (5.2)$$

Пусть Ha удовлетворяет условию (5.2). Тогда выделение полных квадратов в (5.1) приводит к оценкам погрешности

$$\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{2/q}\Sigma_{21},\quad \|\delta v_2\beta_2\| \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{2/q-1}\Sigma_{12}$$

$$\Sigma_{kl} = k\,[C_pM_\nabla M_p\varepsilon_0{}^{1/p} + 4^{(4-q)/2q}\,(1+q)\,C_{1q}\mu_{41}{}^2] + + l4^{(4-q)/2q}\,(q/2-1)\,C_{1q}\mu_{31}{}^2,\quad k,\ l = 1,\ 2 \quad (5.3)$$

Используя оценки (5.3) и условия, наложенные на поле B, можно получить оценки норм $\|\delta\mathbf{v}\|_2$ и $\|\delta\mathbf{v}\|_r$, $2 < r < \infty$. Для этого нужно оценить $\|\delta\psi\varkappa\|$. Очевидно, $\|\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}\| = \|\nabla\delta\psi\cdot\mathbf{B}\|$. В базисе ($\beta_1$, β_2) $\mathbf{B}\cdot\nabla\delta\psi = |\mathbf{B}|\,(\nabla\delta\psi\cdot\beta_1)$. Поэтому $\|\nabla\delta\psi\cdot\beta_1\| \leqslant \mu\,\|\delta v_2\beta_2\|$. Поскольку $\delta\psi$ определяется с точностью до постоянного слагаемого можно считать, что $\delta\psi\,|_{\Gamma_0} = 0$, $\delta\psi\,|_{\Gamma_i} = C_i$ ($i = 1, \ldots, n$) C_i — const. Функцию тока, определенную в неодносвязной области Ω, можно доопределить до функции $\delta\bar{\psi}$, заданной уже в односвязной области Ω_0, положив $\overline{\delta\psi} = C_i$ во внешности контуров Γ_i. Ввиду условий, накладываемых на $\mathbf{B}$, можно указать на контуре Γ_0 участки, на которых $\mathbf{v}\cdot\mathbf{B} \neq 0$. Повторяя для любого из этих участков рассуждения, аналогичные тем, посредством которых выводится неравенство Фридрихса [5], можно получить оценку

$$\mu\,\|\delta v_2\beta_2\| \geqslant \|\nabla\,\overline{\delta\psi}\cdot\beta_1\| \geqslant d^{-1}\,\|\overline{\delta\psi\varkappa}\| > d^{-1}\,\|\delta\psi\varkappa\| \quad (5.4)$$

Оценка для $\|\delta\psi\varkappa\|$ следует теперь из (5.4) и (5.3). Отсюда можно получить искомую оценку для

$$\|\delta\mathbf{v}\| = |\langle\delta\psi\varkappa,\ \nabla\times\delta\mathbf{v}\rangle|^{1/2} \leqslant \mu d\,\|\delta v_2\beta_2\|^{1/2}\,\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^{1/2} \quad (5.5)$$

Из (5.5) и мультипликативного неравенства вытекает оценка для $\|\delta\mathbf{v}\|_r$, $2 < r < \infty$

$$\|\delta\mathbf{v}\|_r \leqslant \max\,(2,\ r/2)^{1-2/r}\,\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^{1-2/r}\,\|\delta v_2\beta_2\|^{1/r}\times \times[\,\|\delta v_2\beta_2\|^{1/r} + (\mu d)^{2/r}\,\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\|^{1/r}] \quad (5.6)$$

В случаях, когда необходим только характер зависимости оценок от параметров Re и Ha и несуществен вид постоянных множителей, оценки (5.3), (5.5) можно записать в виде

$$\|\nabla\times\delta\mathbf{v}\| \leqslant C_\nabla\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{\alpha},\ \|\delta v_2\beta_2\| \leqslant C_B\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1+\alpha} \quad (5.7)$$

$$\|\delta\mathbf{v}\| \leqslant C_v\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1/2+\alpha/2},\quad \alpha = 2/q$$

(C_∇, C_B, C_v — функции от v_τ, q и геометрии Ω и Γ).

6. Обсуждение результатов. Оценки (5.7) без доказательства анонсированы в [7]. Как показывает пример [6], первые две оценки (5.7), в силу произвольности $\alpha < {}^1/_4$, близки к предельным (в смысле зависимости от Ha), в которых $\alpha = 0$. Предельные оценки недостижимы в рамках применяемых выше методов, основанных на мультипликативном неравенстве, поскольку им соответствует $q = \infty$, при котором это неравенство теряет смысл.

Как отмечалось выше, неравенства, описывающие область допустимых значений Re и Ha, получались из условий положительности выражений в левой части неравенства (5.1). Из построения этих выражений видно, что при выполнении неравенства (5.2) обеспечивается доминирующая роль вязких и электромагнитных сил в системе (1.1) над конвективными.

Получение оценок типа (5.7) в более сильных нормах представляется проблематичным, поскольку уже $[\delta \mathbf{v}]_H = \| \nabla \times \delta \mathbf{v} \|$ не стремится к нулю при $\mathrm{Ha} \to \infty$. Вместе с тем можно ожидать, что будут стремиться к нулю соответствующие нормы относительной погрешности.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цинобер А. Б.* К вопросу о применимости приближения Стокса в магнитной гидродинамике // Тез. докл. 6-го Риж. совещ. по магнитной гидродинамике. Рига: Зинатне, 1968. Т. 1. С. 73—74.
2. *Цинобер А. Б.* Магнитогидродинамическое обтекание тел. Рига: Зинатне, 1970. 291 с.
3. *Гартман Ш., Санчес-Паленсия Э.* О предельном поведении некоторого класса МГД-течений в сильном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1973. № 1. С. 3—11.
4. *Бритов Н. А.* Двумерные МГД-течения в сильных магнитных полях // Магнит. гидродинамика. 1979. № 3. С. 10—16.
5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1970. 288 с.
6. *Бритов Н. А.* Течение между пористыми вращающимися цилиндрами в радиальном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1979. № 3. С. 135—137.
7. *Бритов Н. А.* Энергетическая теория стационарных двумерных МГД-течений в сильных магнитных полях // Тез. докл. 12-го Риж. совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпилс, 1987. Т. 1. С. 163—166.

Донецк

Поступила в редакцию
23.XI.1988