Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 533.6

С. В. Мелешко

О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА ТИПА ТРОЙНЫХ ВОЛН

Система уравнений, определяющая решения типа тройной волны для нестационарных изэнтропических потенциальных течений политропного газа получена в [1]. Было построено [2] семейство точных решений уравнений газовой динамики типа тройной волны $1 < \gamma < 2$, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента, и исследованы некоторые его приложения и особенности. Ниже показано, что уравнения тройных волн [1] находятся в инволюции и имеют произвол в одну функцию двух аргументов.

1. Уравнения движения политропного газа в нестационарном изэнтропическом случае записываются в виде

$$d\mathbf{u}/dt + \nabla\theta = 0,\ d\theta/dt + \varkappa\theta \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$
$$\theta = c^2/\varkappa,\ \varkappa = \gamma - 1 > 0,\ d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)'$ — вектор скорости, c — скорость звука, γ — показатель политропы газа, по повторяющемуся греческому индексу производится суммирование от 1 до 3. Рассматриваются потенциальные течения

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

типа тройной волны.

Представляются две возможности: либо компоненты вектора скорости u_1, u_2, u_3 функционально независимы в некоторой области D пространства x_1, x_2, x_3, t, тогда в этой области следует считать $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$, либо u_1, u_2, u_3 функционально зависимы в D (например, $u_3 = \Phi(u_1, u_2)$).

2. Сначала изучается случай функциональной независимости u_1, u_2, u_3. После подстановки $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ в исходные уравнения (1.1) при учете условия потенциальности (1.2) получается неопределенная система квазилинейных дифференциальных уравнений

$$S = (S_1, S_2, S_3)' \equiv E\mathbf{u}_{,0} + G_\alpha \mathbf{u}_{,\alpha} = 0$$
$$f_1 \equiv u_{1,2} - u_{2,1} = 0,\ f_2 \equiv u_{2,3} - u_{3,2} = 0,\ f_3 \equiv u_{1,3} - u_{3,1} = 0$$
$$f_4 \equiv \psi_\alpha u_{\alpha,\alpha} + 2\theta_1\theta_2 u_{2,1} + 2\theta_2\theta_3 u_{3,2} + 2\theta_1\theta_3 u_{3,1} = 0 \tag{2.1}$$
$$\theta_i \equiv \partial\theta/\partial u_i,\ \psi_i \equiv \theta_i^2 - \varkappa\theta,\ G_i \equiv \Delta_i E,\ \Delta_i \equiv u_i + \theta_i$$
$$u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j,\ x_0 \equiv t,\ i = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3$$

где E — единичная матрица размера 3×3. Без ограничения общности считается $\psi_3 \neq 0$ (это достигается поворотом осей координат).

Из исследования совместности переопределенной системы дифференциальных уравнений (2.1) следует: максимально возможный произвол общего решения этой системы равен двум функциям двух аргументов. Для дальнейшего вначале необходимо выяснить вопрос алгебраической независимости относительно старших производных (второго порядка), части продолженных уравнений и установить вид зависимости другой части уравнений через них.

Для этого из продолжений $D_i\mathrm{S} = 0, D_i\Phi = 0, D_0\mathrm{S} = 0$ (D_k — полные производные по x_k, $k = 0, 1, 2, 3$) определяются производные $\mathbf{n}_{,i3}$, $\mathbf{u}_{,0i}$, ($\mathbf{u}_{,ki} \equiv \partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$, $i = 1, 2, 3$), затем они подставляются в оставшиеся продолженные уравнения системы (2.1): $D_0\Phi = 0$, $D_k f_1 = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$). Если проделать эти выкладки, то получается

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{u}_{,11} & \mathbf{u}_{,12} & \mathbf{u}_{,22} & \\
0 & 0 & 0 & D_0\Phi + \Delta_\alpha D_\alpha \Phi - \Phi_\alpha D_\alpha \mathrm{S} \\
H_1 & H_2 & 0 & D_1 f_1 \\
0 & H_1 & H_2 & D_2 f_1 \\
M_1\Phi_1 & M_1\Phi_2 + M_2\Phi_1 & M_2\Phi_2 & -D_3 f_1 + M_\alpha D_\alpha \Phi \\
0 & 0 & 0 & D_0 f_1 + \Delta_\alpha D_\alpha f_1 - H_\alpha D_\alpha \mathrm{S}
\end{array} \tag{2.2}$$

$$(\Phi \equiv (f_2, f_3, f_4)', \ \Phi_i \equiv \partial\Phi/\partial u_{,i}, \ H_i \equiv \partial f_1/\partial u_{,i} \quad M_i = H_i \Phi_3^{-1}, \ i = 1, 2, 3)$$

Здесь первая строка означает, при каких производных выписаны ниже коэффициенты, а в последнем столбце представлены левые части уравнений, из которых взяты эти коэффициенты.

Из вида матриц M_i, Φ_i следует, что в данном случае

$$M_i\Phi_j + M_j\Phi_i = 0, \ (i, j = 1, 2) \tag{2.3}$$

Тем самым решение системы (2.1) также должно удовлетворять еще нескольким уравнениям первого порядка

$$D_0\Phi + \Delta_\alpha D_\alpha \Phi - \Phi_\alpha D_\alpha \mathrm{S} = 0 \tag{2.4}$$

$$D_3 f_1 - M_\alpha D_\alpha \Phi = 0 \tag{2.5}$$

$$D_0 f_1 + \Delta_\alpha D_\alpha f_1 - H_a D_a \mathrm{S} = 0 \tag{2.6}$$

Их необходимо рассматривать совместно с этой системой.

Среди уравнений (2.4)—(2.6) не тождественным нулем в силу системы (2.1) является лишь третье уравнение в (2.4)

$$D_0 f_4 + \Delta_\alpha D_\alpha f_4 - \psi_\alpha D_\alpha S_\alpha - 2\theta_1\theta_2 D_1 S_2 - 2\theta_1\theta_3 D_1 S_3 - 2\theta_2\theta_3 D_2 S_3 = 0 \tag{2.7}$$

Исключение в (2.7) производных $u_{,3}$ и $u_{1,2}$, найденных из системы (2.1), дает квадратичную относительно производных $u_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$; $j \leqslant i$) форму $f_5 = 0$, коэффициенты которой выражаются через θ, θ_i, θ_{ij}, где $\theta_{ij} = \partial^2\theta/\partial u_i \partial u_j$. Например, коэффициент при $u_{3,2}^2$ равен $\psi_3 M_{23}$ ($M_{ij} \equiv \psi_i (1 + \theta_{jj}) + \psi_j (1 + \theta_{ii}) - 2\theta_i\theta_j\theta_{ij}$), вид остальных коэффициентов довольно громоздок.

Если при любом повороте осей координат $M_{23} = 0$, то необходимо выполняются соотношения (невыписанные равенства получаются круговой перестановкой индексов)

$$\begin{gathered}
\psi_1\theta_{23} + \theta_2\theta_3 (1 + \theta_{11}) - \theta_1\theta_2\theta_{13} - \theta_1\theta_3\theta_{12} = 0 \ (1\ 2\ 3) \\
M_{12} = 0, \ M_{13} = 0, \ M_{23} = 0
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Последняя система уравнений линейна и однородна относительно θ_{ij}, $(1 + \theta_{ii})$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$) и ее определитель равен $2(\varkappa\theta)^4(\theta_\alpha\theta_\alpha - \varkappa\theta)^2$. Поэтому, если $\theta_\alpha\theta_\alpha - \varkappa\theta \neq 0$, то $\theta_{ij} = 0$, $\theta_{ii} = -1$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$). Отсюда

$$\theta = c_0 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(u_i + c_i)^2 \quad (c_i = \mathrm{const}) \tag{2.9}$$

При этом $f_5 \equiv 0$, система (2.1) находится в инволюции и имеет произвол две функции двух аргументов. Однако следует заметить, что после замены $x_i' = x_i + c_i t$ представление (2.9) будет соответствовать интегралу Бернулли, а движение газа, описываемое системой уравнений (2.1),— общему случаю пространственных потенциальных стационарных течений.

Если же $\theta_\alpha \theta_\alpha - \varkappa\theta = 0$, то из (2.8) следует, что $\gamma + 2 = 0$, а это противоречит условию $\varkappa > 0$.

Таким образом, без ограничения общности можно считать $M_{23} \neq 0$.

Повторяя выкладки, проведенные при выводе (1.2)—(1.4), где величина f_1 заменена на $f_1' = (f_1, f_5)'$, заключаем, что уравнения (2.2)—(2.4), (2.6) сохраняют свой вид (имеется в виду, что вместо f_1 взято $(f_1, f_5)'$). Поэтому новым по отношению к уравнениям (2.4)—(2.6) будет только уравнение

$$f_6 \equiv D_0 f_5 + \Delta_\alpha D_\alpha f_5 - a_{1\alpha} D_1 S_\alpha - a_{2\alpha} D_2 S_\alpha = 0 \qquad (2.10)$$

$$a_{ki} = \partial f_5 / \partial u_{i,\,k} \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$

Осуществляя все указанные в (2.10) продолжения и исключая в полученном выражении производные $u_{,0}$, имеем

$$f_6 \equiv u_{\beta,\,\alpha} (a_{1\alpha} D_1 \Delta_\beta + a_{2\alpha} D_2 \Delta_\beta) = 0 \qquad (2.11)$$

Подстановка остальных главных производных системы уравнений (2.1), (2.7) вручную довольно затруднительна. Поэтому она осуществлялась на ЭВМ при помощи программы [3].

После этих подстановок уравнение (2.10) представляется в виде $f_6 = Ag$ с функцией A, которая определяется через $\theta(u_1, u_2, u_3)$ и ее производные, а g — однородная форма третьего порядка относительно производных $u_{i,\,j}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ j \leqslant i)$ (выражения для A и g из-за громоздкости здесь также не приводятся).

С другой стороны, из уравнений (2.1), (2.7) и условия $M_{23} \neq 0$ следует равенство $g = \psi_3 M_{23} \Delta$ $(\Delta \equiv \partial(u_1, u_2, u_3)/\partial(x_1, x_2, x_3))$. Поэтому, если $g = 0$, то и $\Delta = 0$. Но тогда из уравнений (2.1) выводится противоречие функциональной независимости функций u_1, u_2, u_3. Значит, необходимо считать

$$A = 0 \qquad (2.12)$$

Замечание 1°. Уравнение (2.12) совпадает с одним из необходимых условий существования тройной волны для таких течений [1].

Замечание 2°. Для инволютности системы (2.1), (2.7) необходимо и достаточно существования матриц Λ_i, Λ_{3i} $(i = 1, 2, 3)$, таких, что выполняются условия [4]

$$D_0 \left\| \begin{matrix} \Phi \\ f_1' \end{matrix} \right\| + \Lambda_\alpha D_\alpha \left\| \begin{matrix} \Phi \\ f_1' \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \Phi_\alpha \\ H_\alpha' \end{matrix} \right\| D_\alpha S = 0, \quad \Lambda_{3\alpha} D_\alpha \left\| \begin{matrix} \Phi \\ f_1' \end{matrix} \right\| = 0$$

Из проделанных выше выкладок следует, что здесь такими матрицами будут

$$\Lambda_i = \Delta_i \left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E_2 \end{matrix} \right\|, \quad \Lambda_{3i} = \| M_i', \ -\delta_{i3} E_2 \| \quad (i = 1, 2, 3)$$

(E_2 — единичная матрица размера 2×2, δ_{ij} — символ Кронекера). При этом произвол решения составляет одну функцию двух аргументов.

Таким образом, (2.10) — необходимое и достаточное условие инволютности переопределенной системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.7), а произвол ее решения равен одной функции двух аргументов.

3. Рассмотрим случай функциональной зависимости $u_3 = \Phi(u_1, u_2)$. После подстановки выражения для u_3 в систему уравнений газовой ди-

намики (1.1), (1.2), имеем

$$
\begin{gathered}
S = (S_1, S_2, S_3)' \equiv v_{,0} + G_1 v_{,1} + G_2 v_{,2} = 0 \\
f \equiv (f_1, f_2, f_3)' \equiv v_{,3} - \Phi_1 v_{,1} - \Phi_2 v_{,2} = 0 \\
f_4 \equiv u_{1,2} - u_{2,1} = 0 \\
G_k = (u_k + \Phi\Phi_k) E + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \xi_k & \zeta_k & 0 \end{Vmatrix}, \quad k = 1, 2 \\
\xi_1 = \zeta_2 = \varkappa\theta (1 + \Phi_1^2), \ \xi_2 = 0, \ \zeta_1 = 2\varkappa\theta\Phi_1\Phi_2 \\
v = (u_1, u_2, \theta)', \ \Phi_i = \partial\Phi/\partial u_i \\
\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u_i \partial u_j, \quad i, j = 1, 2
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Проделывая выкладки, аналогичные проведенным в разд. 2, получим новое уравнение первого порядка

$$f_5 = \theta_{,2}{}^2\Phi_{22} + \theta_{,1}{}^2\Phi_{11} + 2\theta_{,1}\theta_{,2}\Phi_{12} + \varkappa\theta\psi(\theta_{,i}, u_{i,j}, \Phi, \Phi_i, \Phi_{ij}) = 0 \tag{3.2}$$

Функция f_5 — однородная квадратичная форма относительно производных $\theta_{,i}$, $u_{i,j}$, а ψ — линейная функция относительно $\theta_{,i}$ $(i, j = 1, 2)$.

Случай $\sum\limits_{i,j} \Phi_{ij}{}^2 = 0$ редуцируется к общему решению для плоского течения. Поэтому необходимо считать $\sum\limits_{i,j} \Phi_{ij}{}^2 \neq 0$. Тогда поворотом осей координат (x_1, x_2) можно добиться выполнения условия $\Phi_{22} \neq 0$.

Из анализа первого продолжения системы (3.1), (3.2) вытекает, что для совместности системы дифференциальных уравнений (3.1), (3.2) необходимо выполнение еще одного уравнения первого порядка

$$
\begin{gathered}
f_6 \equiv D_3 f_5 - (a_{1\alpha} D_1 f_\alpha + a_{2\alpha} D_2 f_\alpha) - \Phi_1 D_1 f_5 - \Phi_2 D_2 f_5 = 0 \\
(a_{ij} = \partial f_5/\partial u_{i,j}, \ a_{i3} = \partial f_5/\partial\theta_{,i}; \ i, j = 1, 2)
\end{gathered}
$$

Как и в разд. 2 определение выражения f_6 осуществлялось на ЭВМ. После подстановки главных производных системы уравнений (3.1), (3.2) находится $f_6 = (\Phi_{12}{}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22})g = 0$ с некоторой функцией g.

С другой стороны, так как рассматривается тройная волна, то якобиан $\Delta \equiv \partial(u_1, u_2, \theta)/\partial(x_1, x_2, t) \neq 0$ (иначе u_1, u_2, θ будут функционально зависимы). Кроме того, из вида функции g следует выполнение равенства $g = \Phi_{22}\Delta$. А это означает, что $g \neq 0$ и

$$\Phi_{12}{}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22} = 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, (3.3) — необходимые и достаточные условия существования тройной волны, когда $u_3 = \Phi(u_1, u_2)$. Как и в предыдущем случае, при этом $f_6 \equiv 0$, что обеспечивает инволютность системы уравнений (3.1), (3.2) с произволом решения равным одной функции двух аргументов.

Замечание 3. Условия (2.10) и (3.3) были получены [1] в предположении, что $\Delta \neq 0$. Здесь было показано, что предположение является необходимым и достаточным условием существования тройных волн. Кроме условия (2.10) (либо (3.3)) было также получено [1] еще два уравнения на функцию размещения (путем преобразования годографа в уравнениях (2.1), (либо (3.1)). На ЭВМ было проверено, что при этом преобразовании уравнение $f_6 = 0$ удовлетворяется тождественно. Поэтому можно заключить, что указанная система двух уравнений на функцию размещения с заданной функцией $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ (либо $u_3 = \Phi(u_1, u_2)$) также находится в инволюции и имеет одну произвольную функцию двух аргументов в общем решении задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоров А. Ф.* О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 940—943.
2. *Сидоров А. Ф.* О точных решениях уравнений газовой динамики типа тройной волны // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 4. С. 782—785.
3. *Ганжа В. Г., Мелешко С. В., Шапеев В. П.* Промежуточные выкладки в аналитических исследованиях дифференциальных уравнений на ЭВМ // Моделирование в механике. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1989. Т. 3. № 4. С. 49—58.
4. *Мелешко С. В.* ДП-условия и задача примыкания различных ДП-решений друг к другу // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979. Т. 11. № 6. С. 96—109.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.VIII.1989