Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.36

А. В. Ким, А. И. Короткий, Ю. С. Осипов

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В рамках подхода к обратным задачам динамики [1, 2] предлагаются регуляризирующие динамические конечношаговые алгоритмы восстановления источников возмущений в процессах, описываемых эволюционными уравнениями.

1. Постановка задачи. Опишем содержательную сторону задачи. В области Ω расположены источники некоторого вещества, местоположение и мощности которых неизвестны. Процесс распространения вещества наблюдается в течение некоторого времени $T = [t_0, \vartheta]$ и в отдельные текущие моменты $t_i \in T$, $i = 0, 1, \ldots, m$, в области измеряется с ошибкой h концентрация вещества, характеризуемая скалярной функцией $y(t_i, x)$, $x \in \Omega$. Результат измерения — величина $\xi(t_i, x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющая среднеквадратичной оценке

$$\int_\Omega (\xi(t_i, x) - y(t_i, x))^2\, dx \leqslant h^2$$

Строится алгоритм, позволяющий по ходу процесса (в режиме реального времени) по поступающей текущей информации о концентрации вещества восстанавливать (приближенно) местоположение источников и их мощность. Алгоритм является регуляризирующим в том смысле, что результат восстановления будет тем лучше, чем меньше ошибки измерения и чем чаще производятся замеры концентрации.

Уточним постановку задачи. Будем считать, что в момент времени $t \in T$ источники сосредоточены на неизвестном множестве $G(t) \subset \Omega$, интенсивность источника в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in T$ определяется скалярной величиной $f(t, x)$, про которую известна лишь априорная оценка $\beta_1 \leqslant f(t, x) \leqslant \beta_2$, $t \in T$, $x \in \Omega$; причем $\beta_1 = \text{const} > 0$, $\beta_2 = \text{const} \geqslant \beta_1$, множества

$$S = \{(t, x):\ t \in T,\ x \in G(t)\},\ G(t)\ \ (t \in T)$$

и функция f измеримы по Лебегу. Динамика процесса описывается краевой задачей

$$\begin{gathered}\partial y/\partial t = A(t)\, y + \chi_{G(t)}(x)\, f(t, x) \text{ в } Q = T \times \Omega\\ \sigma_1 \partial y/\partial N + \sigma_2 y = 0 \text{ на } \Sigma = T \times \Gamma\\ y(t_0, x) = y_0(x) \text{ в } \Omega\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь Ω — ограниченное открытое связное множество евклидова пространства R^n $(n \geqslant 1)$ с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω была строго липшицевой ([4], с. 30); $\chi_B(\cdot)$ — характеристическая функция множества $B \subset \Omega$: $\chi_B(x) = 1$ для $x \in B$ и $\chi_B(x) = 0$ для $x \notin B$; $\partial y/\partial N$ — внешняя конормальная производная; σ_1 и σ_2 — неотрицательные числа, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$; $L_2(\Omega) \ni y_0$ — начальное (в момент времени $t = t_0$) распределение концентрации вещества по области Ω; $A(t)$ — линейный самосопряженный коэрцитивный эллиптический оператор

$$A(t)\,y=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-a(t,x)\,y$$

$$a_{ij}=a_{ji}\in L_\infty(Q),\ a\in L_\infty(Q),\ a\geqslant 0$$

При указанных ограничениях на параметры существует единственное обобщенное решение $y=y(t,x)$, $t\in T$, $x\in\Omega$, краевой задачи (1.1), являющееся элементом пространства $V_2^{1,0}(Q)$ [5].

Обозначим (Q^*, d) полуметрическое пространство с множеством элементов Q^*, состоящим из всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Q, и полуметрикой d, определяемой соотношением $d(E_1, E_2)=\text{mes}(E_1\Delta E_2)$, где $E_1\Delta E_2$ — симметрическая разность множеств E_1 и E_2, mes — мера Лебега в R^{n+1}. Пусть P — выпуклое ограниченное замкнутое подмножество $L_2(\Omega)$, которое содержит всевозможные элементы вида $\chi_B g$, где B пробегает множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω, g пробегает множество всех функций из $L_2(\Omega)$, которые при почти всех $x\in\Omega$ удовлетворяют неравенству $\beta_1\leqslant g(x)\leqslant\beta_2$. Всякое конечное семейство $(\tau_i)_{i=0,\ldots,m}$, где $t_0=\tau_0<\ldots<\tau_m=\vartheta$, условимся называть разбиением отрезка T.

Задача состоит в построении алгоритма, который приближенно восстанавливает множество S и функцию f при условии, что в каждый момент времени $t\in T$ возможно измерение концентрации вещества $y(t)=y(t,\cdot)$ в области Ω, причем результат измерения $\xi(t)=\xi(t,\cdot)$ связан с $y(t)$ соотношением

$$\|\xi(t)-y(t)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant h \tag{1.2}$$

Решение задачи будем искать в классе конечношаговых динамических алгоритмов (КДА) [2]. Под КДА будем понимать всякую тройку

$$D=((\tau_i)_{i=0,\ldots,m};\ (r_i)_{i=0,\ldots,m-1};\ (\rho_i)_{i=0,\ldots,m-1}) \tag{1.3}$$

где m — натуральное число, $(\tau_i)_{i=0,\ldots,m}$ — разбиение отрезка T, r_i — отображение $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ в P, ρ_i — отображение $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, $i=0,\ldots,m-1$. Для каждых КДА (1.3) и функции $\xi\colon T\to L_2(\Omega)$ назовем (D,ξ)-реализацией пару элементов $(u, E)\in L_2(T; L_2(\Omega))\times Q^*$, образованных по правилу: $u(t)=r_i(\xi(\tau_i), z_i)$ при $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ и $i=0,\ldots,m-1$, $z(t_0)=\xi(t_0)$, $z_{i+1}=\rho_i(\xi(\tau_i), z_i)$ при $i=0,\ldots,m-1$, $E=\{(t,x)\in T\times\Omega\colon u(t,x)\geqslant\beta_1/2\}$. Функция ξ является входом алгоритма, а (D,ξ)-реализация — его выходом.

Опишем работу КДА во времени. До момента времени t_0 выбирается и фиксируется разбиение $(\tau_i)_{i=0,\ldots,m}$, каждая его точка τ_i будет началом очередного шага (такта) вычислений. В момент времени $t=\tau_i$, $i=0,\ldots,m-1$, поступает информация $\xi(\tau_i)$ (результат измерения функции $y(\tau_i)$), на основании этой информации и значения z_i вспомогательной переменной z ($z_0=\xi(t_0)$) к моменту $t=\tau_{i+1}$ определяются новое значение z_{i+1} вспомогательной переменной по правилу ρ_i, элемент $u_i=r_i(\xi(\tau_i), z_i)\in P$ по правилу r_i и множество $E_i=[\tau_i,\tau_{i+1})\times\{x\in\Omega\colon u_i(x)\geqslant\beta_1/2\}$. К конечному моменту времени ϑ формируется (D,ξ)-реализация (u, E): $u(t)=u_i$ при $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ и $i=0,\ldots,m-1$, $E=E_0\cup\ldots\cup E_{m-1}$. Множество E принимается за приближение ко множеству S, функция u принимается за приближение к функции f.

Обозначим Ξ_h $(h > 0)$ множество всех функций ξ: $T \to L_2(\Omega)$, при каждом $t \in T$, удовлетворяющих (1.2). Семейство КДА $(D_h)_{h>0}$ называется регуляризирующим, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при каждом $h \in (0, \delta)$ и любой функции $\xi \in \Xi_h$ для (D, ξ)-реализации (u, E) справедливы неравенства

$$\| u - f \|_{L_2(S)} < \varepsilon, \ d(E, S) < \varepsilon$$

Функция ν: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ называется точностью семейства $(D_h)_{h>0}$, если для любых $h > 0$ и $\xi \in \Xi_h$ справедливы оценки

$$\| u - f \|_{L_2(S)} \leqslant \nu(h), \ d(E, S) \leqslant \nu(h),$$

где (u, E) есть (D_h, ξ)-реализация. Семейство КДА $(D_h)_{h>0}$ регуляризирующее тогда и только тогда, когда существует точность $\nu(\cdot)$ этого семейства и $\nu(h) \to 0$ при $h \to 0$. Очевидно, регуляризирующее семейство КДА обеспечит решение поставленной задачи. Использование такого семейства для решения задачи восстановления происходит следующим образом. По заданной априори величине погрешности h из семейства выбирается соответствующий конкретный КДА D_h, он и применяется для восстановления местоположений источников и их мощности (работа конкретного алгоритма описана выше). При этом гарантируется: чем меньше h, тем точнее (D_h, ξ)-реализация (u, E), формируемая на выходе алгоритма, к паре (f, S) в смысле метрики пространства $L_2(S) \times Q^*$.

2. Построение регуляризирующегося семейства КДА. В основе построения регуляризирующего семейства КДА лежат идеи работ [1, 2]. Определим семейство КДА $(D_h)_{h>0}$ следующими условиями:

$$D_h = ((\tau_i^h)_{i=0, \ldots, m}; (r_i^h)_{i=0, \ldots, m_h-1}; (\rho_i^h)_{i=0, \ldots, m_h-1}) \tag{2.1}$$

при любых $h > 0$, $i = 0, \ldots, m_h - 1$, $\xi \in L_2(\Omega)$, $z \in L_2(\Omega)$ элемент $r_i^h(\xi, z)$ — точка минимума квадратичного функционала

$$\Phi(u) = 2\langle z - \xi, u\rangle_{L_2(\Omega)} + \alpha(h) \| u \|^2_{h_2(\Omega)}$$

на множестве P (такая точка существует и единственная), $\rho_i^h(\xi, z) = w(\tau_{i+1}^h)$, где w — обобщенное решение из пространства $V_2^{1,0}([\tau_i^h, \tau_{i+1}^h] \times \Omega)$ краевой задачи

$$\begin{gathered} \partial w/\partial t = A(t) w + r_i^h(\xi, z) \text{ в } [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h] \times \Omega \\ \sigma_1 \partial w/\partial N + \sigma_2 w = 0 \text{ на } [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h] \times \Gamma \\ w(\tau_i^h) = z \text{ в } \Omega \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь α: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ — некоторая фиксированная вспомогательная функция.

Теорема 2.1. Пусть функция α и величина $\Delta(h) = \max\{\tau_{i+1}^h - \tau_i^h: i = 0, \ldots, m_h - 1\}$ таковы, что $\alpha(h) \to 0$, $\Delta(h) \to 0$, $h/\alpha(h) \to 0$, $\sqrt{\Delta(h)}/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда существует $h_0 > 0$, такое, что для любого $h \in (0, h_0)$ в (D_h, ξ)-реализациях (u_h, E_h) множества E_h непусты и семейство КДА (2.1) является регуляризирующим.

Заметим, что выбор $\alpha(h)$ и $\Delta(h)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, возможен: достаточно, например, положить $\alpha(h) = h^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$, $\Delta(h) = h^{3\gamma}$. Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательствам соответствующих утверждений из [2, 3] и опирается на следующие утверждения:

1) если $u \in L_2(Q)$, $B \in Q^*$, $E = \{(t, x) \in T \times \Omega: u(t, x) \geqslant \beta_1/2\}$, то

$$\| u - \chi_B f \|^2_{L_2(Q)} \geqslant \left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 d(E, B)$$

2) если последовательности $\{h_k\} \subset (0, \infty)$, $\{\xi_k\}$, $\{(u_k, E_k)\}$ таковы, что $h_k \to 0$, $\xi_k \in \Xi_k$, (u_k, E_k) есть (D_k, ξ_k)-реализация ($\Xi_k = \Xi_h$, $D_k = D_h$ при $h = h_k$, $k = 1, 2, \ldots$), то при выполнении условия теоремы 2.1 имеем

$$\| u_k - \chi_S f \|_{L_2(Q)} \to 0, \ d(E_k, S) \to 0$$

Приведем содержательное описание последовательности действий, которые надлежит выполнить при восстановлении источников и их мощностей в соответствии с утверждением теоремы 2.1. Априори выбираются $\alpha(h)$, $\Delta(h)$ и разбиения $(\tau_i^h)_{i=0,\ldots,m_h}$, такие, что $\alpha(h) \to 0$, $\Delta(h) \to 0$, $h/\alpha(h) \to 0$, $\sqrt{\Delta(h)}/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. По поступлении (до момента t_0) величины погрешности h она фиксируется, фиксируются также значение $\alpha(h)$ и разбиение $(\tau_i^h)_{i=0,\ldots,m_h}$ отрезка T. С момента t_0 на промежутках времени $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$, $i = 0, \ldots, m_h - 1$ ведется вычисление значений u_i формируемой вспомогательной функции u ($u(t) = u_i$ при $t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$ и $i = 0, \ldots, m_h - 1$), находится часть E_i формируемой «траектории» местоположений источников E ($E = E_0 \cup \ldots \cup E_k$, $k = m_h - 1$), производится пересчет значений вспомогательной переменной z с z_i на z_{i+1} по правилам: u_i — точка минимума на P квадратичного функционала

$$u \to 2\langle z_i - \xi(\tau_i^h), u\rangle_{L_2(\Omega)} + \alpha(h) \| u \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$E_i = [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h) \times \{x \in \Omega: u_i(x) \geqslant \beta_1/2\}$$

$$z_{i+1} = w(\tau_{i+1}^h)$$

где w — решение краевой задачи (2.2) с $z = z_i$ и $r_i^h(\xi, z) = u_i$ (полагаем $z_0 = \xi(t_0)$). При этом функция u близка к функции $f\chi_S$ в метрике $L_2(Q)$, множество E близко к S в полуметрике d.

3. Оценка точности КДА. Опишем одну модификацию семейства КДА (2.1), (2.2) и укажем для нее вид точности ν. Новое семейство КДА определим аналогично семейству (2.1), (2.2), но с условием

$$w(\tau_{i+1}^h) = z + \int\limits_{\tau_i^h}^{\tau_{i+1}^h} [A(\tau)\xi + r_i^h(\xi, z)]\, d\tau \tag{3.1}$$

Обозначим $V = W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\sigma_1 = 0$, $V = W_2^2(\Omega)$ при $\sigma_1 \neq 0$.

Условие 3.1. 1) при каждом $t \in T$ оператор $A(t)$ является линейным ограниченным оператором из V в $L_2(\Omega)$, причем нормы этих операторов равномерно ограничены, т. е. существует число $c_0 > 0$, такое, что для каждого $t \in T$ справедливо неравенство $\| A(t) \|_{V \to L_2(\Omega)} \leqslant c_0$; 2) решение краевой задачи (1.1) равномерно непрерывно как отображение $T \to V$, т. е. существует функция σ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$, такая, что $\sigma(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\| y(t_1) - y(t_2) \|_V \leqslant \sigma(| t_1 - t_2 |)$ для любых $t_1, t_2 \in T$; 3) при каждом $t \in T$ измерение $\xi(t) \in V$ связано с состоянием $y(t)$ системы (1.1) соотношением $\| \xi(t) - y(t) \|_V \leqslant h$; 4) функция v: $T \ni t \to \chi_{G(t)}(\cdot) f(t, \cdot) \in L_2(\Omega)$ имеет ограниченную вариацию на T.

Пусть

$$\Delta = \Delta(h), \ \gamma_P = \max \{\| u \|_{L_2(\Omega)}: u \in P\}$$

$$\varepsilon(h) = h^2 + (\vartheta - t_0)\gamma(h + \sqrt{\Delta})$$

$$\delta(h) = [\varepsilon(h) + 2\alpha(h)(\vartheta - t_0)\gamma_P^2]^{1/2}$$

γ — положительное число, определяемое по известным параметрам краевой задачи (1.1), при котором для любых $h > 0$, $t \in T$, $\xi \in \Xi_h$ выполняется оценка

$$\| w(t) - y(t) \|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha(h) \int_{t_0}^{t} (\| u(\tau) \|^2_{L_2(\Omega)} - \| v(\tau) \|^2_{L_2(\Omega)})\, d\tau \leqslant \varepsilon(h)$$

$$w(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)\bar{\xi}(\tau) + u(\tau)]\, d\tau$$

где (u, E) есть (D_h, ξ)-реализация, $\bar{\xi}(t) = \xi(\tau_i^h)$ при $t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$, $i = 0, \ldots, m_h - 1$.

Теорема 3.1. При выполнении условия 3.1 точность ν семейства КДА (2.1), (3.1) имеет вид

$$\nu(h) = [\varepsilon(h)/\alpha(h) + 2(\operatorname{var} v + \gamma_p)(\delta(h) + c_0(\vartheta - t_0)h + \sigma(\Delta(h)))]^{1/2}$$

и $\nu(h) \to 0$, если $\alpha(h) \to 0$, $\Delta(h) \to 0$, $h/\alpha(h) \to 0$, $\sqrt{\Delta(h)}/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Доказательство теоремы 3.1 аналогично доказательству соответствующего утверждения из [6]. Пункты 1) и 2) условия 3.1 выполняются для регулярных областей Ω и операторов $A(t)$ с достаточно гладкими коэффициентами (см., например, [4], гл. 3, §§ 8, 9; [5], гл. 3, § 6), в пунктах 3) и 4) содержатся ограничения на текущие измерения состояния системы и на характер изменения источников.

4. Замечание 1°. Семейство КДА (2.1) можно использовать для восстановления источников и в том случае, когда минимум функционала $\Phi(u)$ и значения отображений ρ_i^h вычисляются с некоторыми погрешностями. Например, можно использовать не точные значения $r_i^h(\xi, z)$ и $\rho_i^h(\xi, z)$, а их приближения $\bar{r}_i^h(\xi, z)$ и $\bar{\rho}_i^h(\xi, z)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$| \Phi(r_i^h(\xi, z)) - \Phi(\bar{r}_i^h(\xi, z)) | \leqslant \varkappa_1(h)(\tau_{i+1}^h - \tau_i^h)$$

$$\| \rho_i^h(\xi, z) - \bar{\rho}_i^h(\xi, z) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varkappa_2(h)(\tau_{i+1}^h - \tau_i^h)$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — некоторые фиксированные вспомогательные функции $[0, \infty) \to [0, \infty)$, такие, что $\varkappa_1(h) \to 0$ и $\varkappa_2(h) \to 0$ при $h \to 0$. При этом семейство КДА (2.1) остается регуляризирующим, если помимо согласований из теоремы 2.1 учесть согласования $\varkappa_1(h)/\alpha(h) \to 0$ и $\varkappa_2(h)/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

2°. Укажем на возможность восстановления источников по результатам точечных измерений концентрации в области Ω. Пусть некоторая сетка разбивает область Ω на непересекающиеся ячейки Ω_i, $i \in I$, и в текущие моменты времени $t \in T$ измеряется концентрация вещества в каких-либо точках $x_i \in \Omega_i$, $i \in I$, результат измерения — скалярные величины $\xi_i(t)$, $i \in I$, удовлетворяющие оценке

$$\left| \xi_i(t) - \frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} y(t, x)\, dx \right| \leqslant h, \ t \in T, \ i \in I$$

Обозначим $\xi(t) = \xi(t, \cdot)$ кусочно-постоянную интерполяцию в область Ω сеточной функции $\xi_i(t)$, $i \in I : \xi(t, x) = \xi_i(t)$ для $x \in \Omega_i$ и $i \in I$. Справедлива оценка

$$\| \xi(t) - y(t) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c(h + \mu(\varkappa)), \quad t \in T, \ c = \mathrm{const} > 0$$

где $\varkappa$ — диаметр сеточного разбиения области Ω, μ — некоторая функция $[0, \infty) \to [0, \infty)$, такая, что $\mu(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to 0$ (c и μ определяются по известным параметрам краевой задачи (1.1)). При этом семейство КДА (2.1) остается регуляризирующим, если функцию $\xi(t, \cdot)$ принять за результат измерения концентрации вещества $y(t, \cdot)$ в момент времени $t \in T$, а согласования из теоремы 2.1 дополнить согласованиями

$$\varkappa(h) \to 0, \quad \mu(\varkappa(h))/\alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

3°. Укажем на возможность восстановления источников в метрике Хаусдорфа. Справедливо утверждение: если (u_h, E_h) есть (D_h, ξ)-реализация и при $h \to 0$ имеет место сходимость $u_h \to \chi_{G(\cdot)} f(\cdot)$ в sup-норме, то $E_h \to S$ по Хаусдорфу. При соответствующих предположениях множество реализаций $\{u_h\}$ может оказаться предкомпактным в $C(Q)$, тогда из сходимости реализаций в $L_2(Q)$ будет следовать их равномерная сходимость.

4°. Аналогичные результаты получены и для некоторых классов квазилинейных параболических систем, описываемых соотношениями

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(t, x, y, y_x) - a(t, x, y, y_x) + \chi_{G(t)} f(t, x) \quad \text{в } Q$$

$$\sigma_1 \frac{\partial y}{\partial N} + \sigma_2 y = g(t, x) \quad \text{на } \Sigma$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \text{ в } \Omega$$

5°. Полученные алгоритмы можно модифицировать и для восстановления граничных источников

$$\sigma_1 \partial y/\partial N + \sigma_2 y = \chi_{\Gamma(t)} g(t, x)$$

где $\Gamma(t)$, $t \in T$ — неизвестные местоположения граничных источников, $g(t, x)$, $(t, x) \in \Sigma$ — неизвестная мощность источников.

5. Пример. Рассмотрим задачу о восстановлении местоположения источников в двумерной области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ считая, что динамика процесса описывается краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \chi_{G(t)} f(t, x) \quad \text{в } Q$$

$$y = 0 \text{ на } \Sigma$$

$$y(t_0, x_1, x_2) = y_0(x_1, x_2) \text{ в } \Omega$$

Численные расчеты проводились на ЭВМ при различных значениях параметров и конфигураций множеств $G(t)$, $t \in T$. Движение динамической системы и вспомогательной модели реализовались с помощью явной разностной схемы с равномерным шагом по времени и равномерными шагами по осям x_1 и x_2. Моделирование показывает, что уже со второго-третьего шага вырисовывается устойчивая картина восстановления местоположения источников. Искомое множество восстанавливается прямоугольниками с центрами в узлах сетки и сторонами, равными шагам сетки по осям x_1 и x_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 552—556.
2. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51—60.
3. *Ким А. В., Короткий А. И.* Динамическое моделирование возмущений в параболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 78—84.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 526 с.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. *Вдовин А. Ю.* Оценки погрешности в задаче динамического восстановления управления // Задачи позиционного моделирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 3—11.

Свердловск

Поступила в редакцию 25.VII.1989