Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.36 : 62—50

А. Г. Иванов

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

При исследовании вопроса об управляемости нелинейной системы управления

$$x^{\cdot} = f(t, x, u), \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \Omega, \; t \in [\tau, \tau + \sigma] \; (\sigma > 0) \tag{0.1}$$

где Ω — компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, как правило, предполагают, что

$$0 \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv}\Omega) \tag{0.2}$$

и что для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ множество $P(t, x) \doteq \{f(t, x, u), u \in \Omega\}$ выпукло, τ фиксировано. В данной работе условие (0.2) ослаблено до условия $0 \in \operatorname{conv}\Omega$ и задача об управляемости системы (0.1) будет рассмотрена в классе обобщенных управлений (что позволяет снять условие выпуклости множества $P(t, x)$; τ не фиксируется. Дается ответ на вопросы, поставленные в работе [1].

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, $|x|$ — норма элемента $x \in \mathbb{R}^n$, $B_r[0] \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, $B_r(0) \doteq \operatorname{int} B_r[0]$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, в котором норма элемента A определена равенством $|A| \doteq \sup\limits_{x \neq 0} |Ax| / |x|$; $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — соответственно пространство всех непустых компактных и выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$.

Обозначим $(X^{(n, m)}, \rho_1^{(l)})$ $(l > 0)$ метрическое пространство локально суммируемых отображений $A : \mathbb{R} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, где

$$\rho_1^{(l)}(A, B) \doteq \sup_t \frac{1}{l} \int_t^{t+l} |A(s) - B(s)|\, ds, \; t \in \mathbb{R}, \; A, B \in X^{(n, m)}$$

$(Y^{(n)}, \rho_2^{(l)})$ — метрическое пространство таких многозначных отображений $V : \mathbb{R} \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, что отображение $t \to |V(t)| \doteq \operatorname{dist}(\{0\}, V(t))$ измеримо (измеримость везде понимается в смысле Лебега), $\operatorname{esssup}\limits_{t \in \mathbb{R}} |V(t)| \leqslant k_V < \infty$ и

$$\rho_2^{(l)}(V, W) \doteq \sup_t \frac{1}{l} \int_t^{t+l} \operatorname{dist}(V(s)), W(s))\, ds, \; t \in \mathbb{R}, \; V, W \in Y^{(n)}$$

Фиксируем $V \in Y^{(n)}$ и отрезок $T \subset \mathbb{R}$. Пусть $U \doteq B_{k_V}[0]$, $L_T \doteq L(T, U; \mathbb{R}^n)$ — нормированное пространство таких функций $\varphi : T \times U \to \mathbb{R}^n$, что отображение $t \to \varphi(t, u)$ измеримо, $\varphi(t, \cdot) \in C(U) \doteq C(U, \mathbb{R}^n)$ существует такая суммируемая функция $\psi : T \to \mathbb{R}$, что при почти всех (п. в.) $|\varphi(t, \cdot)|_{\max} \doteq \max\limits_{u \in U} |\varphi(t, u)| \leqslant \Psi(t)$. Через $\operatorname{frm}(U)$ обозначим линейное пространство мер Радона в $\mathbb{R}^n$, сосредоточенных на U, а через $\operatorname{rpm}(U)$ — подмножество из $\operatorname{frm}(U)$ состоящее из регулярных вероятностных мер.

Пусть далее N_T — совокупность измеримых отображений $\mu : T \to \operatorname{frm}(U)$ таких, что $\operatorname{esssup}\limits_{t \in T} |\mu|(t)|(U) < \infty$ ($|\mu(t)|(U)$ — вариация меры $\mu(t)$). Оказывается ([2], с. 299), что N_T алгебраически изоморфно пространству сопряженному к $L(T, U; \mathbb{R}^1)$ и в N_T можно ввести слабую норму $\|\cdot\|_w$ ([2], с. 303), причем пространство $(N_T, \|\cdot\|_w)$ сепарабельно, его подмножество $U(N_T) \doteq \{\mu \in N_T : |\mu(t)|(U) \leqslant 1\}$ компактно. Более того, если $\mu_j \in U(N_T)$, $j = 0, 1, \ldots$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu_j - \mu_0\|_w = 0$ (пишем $\mu_j \to \mu_0$ при $j \to \infty$) в том и только в том случае, если для любой функции $\varphi \in L_T$

$$\lim_{j\to\infty} \int_T \langle \mu_j(t), \varphi(t, u)\rangle\, dt = \int_T \langle \mu_0(t), \varphi(t, u)\rangle\, dt$$

где

$$\int_T \langle \mu_j(t), \varphi(t, u)\rangle\, dt \doteq \int_T \Big(\int_U \varphi(t, u)\, \mu_j(t)(du)\Big)\, dt, \; j = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

Через $I(V)$ обозначим совокупность измеримых сечений отображения $V \in Y^{(n)}$, $M(V) \doteq \{\mu \in N_{\mathbb{R}} : \mu(t) \in \mathrm{rpm}\,(V(t))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}\}$, $M^1(V) \doteq \{\mu \in M(V) : \mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором $u \in I(V)\}$, где $\delta_{u(t)}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $u(t)$, а через $I_{\tau,\sigma}(V)$, $M_{\tau,\sigma}(V)$, $M^1_{\tau,\sigma}(V)$ $(\tau \geqslant 0, \sigma \geqslant 0)$ — сужение по t на отрезок $[\tau, \tau + \sigma]$ соответствующих множеств $I(V)$, $M(V)$, $M^1(V)$. Отождествляя каждую функцию $u \in I(V)$ с $\delta_{u(t)}$, тем самым вкладываем $I(V)$ в $M(V)$. В дальнейшем $M^1(V)$ называется множеством (обычных) допустимых управлений, а $M(V)$ — множеством обобщенных управлений.

Рассмотрим нелинейную систему управления

$$x^{\bullet} = A(t)\, x + u + g(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in V(t) \tag{1.2}$$

где $A \in X^{(n,n)}$, $V \in Y^{(n)}$ и

$$0 \in V(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Отметим, что условие (1.3) не исключает возможности, что $0 \in \partial V(t)$ при некоторых или всех t. Предполагается, что функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

1) при фиксированных $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$ отображение $t \to g(t, x, u)$ измеримо, $g(t, \cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}^n \times U)$, $t \in \mathbb{R}$ и для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ существует такая функция $\varkappa \in X^{(1,1)}$, что $\max\{|g(t, x, u)|, (x, u) \in K \times U\} \leqslant \varkappa(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$;

2) существуют такие функции $a, b \in X^{(1,1)}$ и постоянные $\alpha, \beta > 0$, что при некотором $\gamma > 0$ $|g(t, x, u)| \leqslant a(t)\,|x|^{\alpha} + b(t)\,|u|^{\beta}$ для всех $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times B_\gamma[0] \times (U \cap B_\gamma[0])$.

Будем также считать, что система (1.2) обладает свойством правосторонней единственности: для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любой функции $u_0 \in I(V)$ решение задачи Коши

$$x^{\bullet} = A(t)\, x + u_0(t) + g(t, x, u_0(t)), \qquad x(\tau) = x_0 \; (\tau \geqslant 0)$$

единственно на правом максимальном интервале существования.

Определение 1.1. Выпуклой системой управления, соответствующей системе (1.2), называется следующая система:

$$x^{\bullet} = A(t)\, x + \langle \mu(t), u + g(t, x, u)\rangle, \qquad \mu \in M(V) \tag{1.4}$$

Ясно, что если $\mu \in M^1(V)$, т. е. $\mu(t) = \delta_{v(t)}$, $v \in I(V)$, то из (1.4) получаем систему (1.2) с $u = v(t)$.

Определение 1.2. Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется управляемым на $[\tau, \tau + \sigma]$ $(\sigma > 0)$, если найдется такое обобщенное управление $\nu \in M_{\tau,\sigma}(V)$, что при $\mu(t) = \nu(t)$ система (1.4) имеет решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям $y(\tau) = x_0$, $y(\tau + \sigma) = 0$. Совокупность всех управляемых состояний системы (1.4) на отрезке $[\tau, \tau + \sigma]$ называется множеством управляемости системы (1.4) на этом отрезке.

Определение 1.3. Система (1.4) называется равномерно локально управляемой, если существуют такие числа $\varepsilon, \sigma > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ множество управляемости системы (1.4) на отрезке $[\tau, \tau + \sigma]$ содержит шар $B_\varepsilon[0]$.

Наряду с системой (1.4) рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = A(t)x + \langle \mu(t), u \rangle, \quad \mu \in M(V) \tag{1.5}$$

Можно показать, что для множества управляемости $D(\tau, \sigma, V)$ системы (1.5) на $[\tau, \tau + \sigma]$ справедливо равенство

$$D(\tau, \sigma, V) = \left\{ -\int_{\tau}^{\tau+\sigma} \langle \mu(t), \Phi(\tau, t) u \rangle \, dt, \mu \in M_{\tau, \sigma}(V) \right\}$$

где $\Phi(\cdot, \cdot)$ — оператор Коши системы $x^{\cdot} = A(t)x$. Из равенства $\{\langle \mu(t), \Phi(\tau, t)u \rangle, \mu \in M_{\tau,\sigma}(V)\} = \operatorname{conv}\{\Phi(\tau, t)V(t)\}$, $t \in [\tau, \tau + \sigma]$, и условия $V(t) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ следует, что

$$D(\tau, \sigma, V) = -\int_{\tau}^{\tau+\sigma} \Phi(\tau, t) V(t) \, dt$$

Интеграл в правой части последнего равенства понимается в смысле Ляпунова ([3], с. 239). Поэтому условие равномерной локальной управляемости (РЛУ) системы (1.5) в классе обобщенных управлений эквивалентно РЛУ линейной системы

$$x^{\cdot} = A(t)x + u, \quad u \in V(t) \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. Пусть система (1.5) равнополярно локально управляема $\varepsilon, \sigma > 0$ — величины, входящие в определение РЛУ этой системы.

Допустим далее, что функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и выполнено по крайней мере одно из условий

$$\begin{gathered} s_{a+b} \leqslant \lambda, \text{ если } \alpha = \beta = 1 \\ s_a \leqslant \lambda, \text{ если } \alpha = 1, \ \beta > 1 \\ s_b \leqslant \lambda, \text{ если } \alpha > 1, \ \beta = 1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\left(c \doteq \rho_1^{(1)}(A, O), \quad \lambda \doteq \frac{\varepsilon}{6\sigma} e^{-4c\sigma}, \quad s_q \doteq \sup_{\tau \geqslant 0} \int_{\tau}^{\tau+\sigma} q(s) \, ds \right)$$

Тогда найдется такое $\delta \in (0, \gamma]$, что для любой функции $y \in C(R, B_\delta[0])$ система

$$x^{\cdot} = A(t)x + \langle \mu(t), u + g(t, y(t), u) \rangle, \quad \mu \in M(\delta V) \tag{1.8}$$

РЛУ, причем для любого $\tau \geqslant 0$ и

$$x_0 \in B_{\varepsilon\gamma_1/2}[0], \quad \gamma_1 \doteq e^{-2c\sigma}\delta/(3\sigma) \tag{1.9}$$

существует такое обобщенное управление $\nu \in M_{\tau,\sigma}(\delta V)$, что при $\mu(t) = \nu(t)$ система (1.8) имеет решение $z(t)$, удовлетворяющее условиям

$$z(\tau) = x_0, \ z(\tau + \sigma) = 0 \text{ и } z(t) \in B_\delta[0] \text{ для } t \in [\tau, \tau + \sigma].$$

Доказательство. Выбор постоянной $\delta > 0$ аналогичен выбору ее в классе обычных управлений леммы 2.1 работы [4]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что множество

$$D_{\tau}^{1}(\sigma, y, \delta V) \doteq \left\{-\int\limits_{\tau}^{\tau+\sigma} \langle\mu(t), \Phi(\tau, t)(u + g(t, y(t), u)\rangle\, dt, \quad \mu \in M_{\tau,\sigma}(\delta V)\right\}$$

$$y \in C(T, B_{\delta}[0]), \quad T \doteq [\tau, \tau+\sigma]$$

есть множество управляемости системы (1.8) на отрезке $[\tau, \tau+\sigma]$. Учитывая, что

$$e^{2c\sigma} \geqslant \max_{t\in T} |\Phi(\tau, t)|, \quad \mu(t) \in \operatorname{rpm}(\delta V(t))$$

при п. в. $t \in T$ аналогично схеме доказательства леммы 2.1 работы [4] доказываем лемму 1.1.

2. *Теорема 2.1.* Пусть система (1.5) РЛУ (что, как отмечалось выше, эквивалентно РЛУ системы (1.6)), $\varepsilon, \sigma > 0$ — величины, входящие в определение РЛУ этой системы, функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет условиям 1), 2). Тогда при выполнении одного из условий (1.7) система (1.4) РЛУ.

Доказательство. Если выполнено одно из условий (1.7), то по лемме 1.1 найдется такое $\delta \in (0, \gamma]$, что система (1.8) РЛУ. Берем далее произвольное $\tau \geqslant 0$, x_0, удовлетворяющее условию (1.9), и функцию $y_1 \in C(T\ B_\delta[0])$, где $T \doteq [\tau, \tau+\sigma]$. Снова по лемме 1.1 найдется такое обобщенное управление $\mu_1 \in M_{\tau,\sigma}(\delta V)$, что при $\mu(t) = \mu_1(t)$ и $y(t) = y_1(t)$ система (1.8) имеет решение $y_2(t)$, удовлетворяющее условиям $y_2(t) \in B_\delta[0]$, $t \in T$, и $y_2(\tau) = x_0$, $y_2(\tau+\sigma) = 0$. Аналогично, при $y(t) = y_2(t)$ найдется такое обобщенное управление $\mu_2 \in M_{\tau,\sigma}(\delta V)$, что при $y(t) = y_2(t)$ система (1.8) будет иметь решение $y_3(t) \in B_\delta[0]$, $t \in T$ и $y_3(\tau) = x_0$, $y_3(\tau+\sigma) = 0$. Продолжая указанную процедуру, в итоге получим последовательность абсолютно непрерывных функций $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ и последовательность обобщенных управлений $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty} \subset M_{\tau,\sigma}(\delta V)$ таких, что $y_j(\tau) = x_0$, $y_j(\tau+\sigma) = 0$, $y_j(t) \in B_\delta[0]$, $t \in T$, $j = 1, 2, \ldots$ и

$$y_{j+1}(t) = \Phi(t, \tau)\left[x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} \langle\mu_j(s), \Phi(\tau, s)(u + g(s, y_j(s), u))\rangle\, ds\right] \tag{2.1}$$

Более того, последовательность функций $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна. Следовательно, в силу теоремы Арцеля — Асколи ([5], с. 236) из последовательности $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $z \in C(T, B_\delta[0])$. Ясно, что $z(\tau) = x_0$, $z(\tau+\sigma) = 0$. Далее, подмножество $M_{\tau,\sigma}(\delta V)$ пространства $(N_T, \|\cdot\|_w)$ компактно. Поэтому из последовательности $\{\mu_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся (в слабой норме $\|\cdot\|_w$) к некоторому обобщенному управлению $\nu \in M_{\tau,\sigma}(\delta V)$.

Будем считать, что $\mu_{j_k} \to \nu$ при $k \to \infty$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in L_T$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{T} \langle\mu_{j_k}(s), \varphi(s, u)\rangle\, ds = \int\limits_{T} \langle\nu(s), \varphi(s, u)\rangle\, ds$$

(здесь см. (1.1)), а так как для каждого $t \in T$ отображение $(s, u) \to \to \chi_{[\tau, t]}(s)\, \Psi(\tau, s, u)$, где

$$\Psi(\tau, s, u) \doteq \Phi(\tau, s)(u + g(s, z(s), u)) \tag{2.2}$$

$\chi_{[\tau,t]}(\cdot)$ — характеристическая функция для $[\tau, t]$, принадлежит L_T, то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{T} \langle\mu_{j_k}(s), \chi_{[\tau,t]}(s)\, \Psi(\tau, s, u)\, ds = \int\limits_{T} \langle\nu(s), \chi_{[\tau,t]}(s)\, \Psi(\tau, s, u)\rangle\, ds$$

Это предельное соотношение совместно с (2.1) означает, что

$$z(t) = \Phi(t, \tau)\Big[x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} \langle \nu(s), \Psi(\tau, s, u)\rangle\, ds\Big].$$

для всех $t \in T \doteq [\tau, \tau + \sigma]$, причем $z(\tau) = x_0$, $z(\tau + \sigma) = 0$.

Итак, для всякого x_0, удовлетворяющего условию (1.9), существует такое обобщенное управление $\nu \in M_{\tau,\sigma}(\delta V) \subset M_{\tau,\sigma}(V)$, что при $\mu(t) = \nu(t)$ система (1.4) имеет решение $z(t)$, для которого $z(\tau) = x_0$, $z(\tau + \sigma) = 0$, т. е. $B_{\varepsilon\gamma_1/2}[0]$ для всех $\tau \geqslant 0$ содержится в множестве управляемости системы (1.4) на $[\tau, \tau + \sigma]$.

Пусть $K(t)$ — замыкание конической оболочки множества $V(t)$.

Следствие 2.1. Допустим, что система

$$\dot{x} = A(t)\, x + v, \quad v \in K(t) \tag{2.3}$$

РЛУ, ε, $\sigma > 0$ — величины, входящие в определение РЛУ этой системы, функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет условиям 1), 2). Тогда при выполнении одного из условий (1.7) система (1.4) равномерно локально управляема.

Доказательство следует из теоремы 2.1 и результатов работы [6].

Отметим, что изучение вопроса о РЛУ системы (2.3) в ряде случаев легче, нежели системы (1.6), так как структура множества допустимых управлений становится проще [1].

Далее, поскольку $I(V) \subset M(V)$ ($I(V)$ отождествлено с $M^1(V)$), то из РЛУ системы (1.2) всегда следует РЛУ системы (1.4). Если же для всех $\tau \geqslant 0$ шар $B_\varepsilon[0]$ содержится в множестве управляемости на $[\tau, \tau + \sigma]$ системы (1.4), то без дополнительных предположений (например, выпуклости поля скоростей ([7, 8]), вообще говоря, нельзя утверждать, что $B_\varepsilon[0]$ содержится в множестве управляемости на $[\tau, \tau + \sigma]$ системы (1.2). Тем не менее верна следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет также условию:

3) существует такая функция $\varkappa_1 \in X^{(1,1)}$, что для всех $x_1, x_2 \in B_\delta[0]$ (по поводу постоянной $\delta > 0$, а также для приводимых ниже постоянных ε, σ, γ_1 см. лемму 1.1 и теорему 2.1) и $u \in U$ $|g(t, x_1, u) - g(t, x_2, u)| \leqslant \varkappa_1(t)\,|x_1 - x_2|$. Тогда всякую точку x_0, удовлетворяющую (1.9) при любом $\tau \geqslant 0$, можно перевести в любую наперед заданную окрестность нуля на отрезке $[\tau, \tau + \sigma]$ при помощи управлений из $I(V)$.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 при произвольных $\tau \geqslant 0$, x_0, удовлетворяющих (1.9), найдется обобщенное управление $\nu \in M_{\tau,\sigma}(V$ такое, что при $\mu(t) = \nu(t)$ система (1.4) имеет решение $z(t) \in B_\delta[0]$, $t \in T \doteq [\tau, \tau + \sigma]$ и $z(\tau) = x_0$, $z(\tau + \sigma) = 0$. В силу аппроксимационной леммы ([2, 7]) найдется такая последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset I(V)$, что $\delta_{u_j} \to \nu$ при $j \to \infty$. Если теперь $x_j(t)$ — решение системы (1.4) с начальным условием $x_j(\tau) = x_0$, отвечающее управлению $\mu(t) = \delta_{u_j(t)}$, то

$$x_j(t) = \Phi(t, \tau)\Big[x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} \langle \delta_{u_j(s)}, \Phi(\tau, s)(u + g(s, x_j(s), u))\rangle\, ds\Big]$$

---

[1] См. примеры в работе: *Тонков Е. Л., Иванов А. Г.* Равномерная локальная управляемость в критическом случае и вопросы колеблемости: Препринт ФТИ Урал. отд-ние АН СССР. Свердловск, 1986. 60 с.

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем

$$\max_{t\in T} |x_j(t) - z(t)| \leqslant \exp\left(e^{2c\sigma} \sup_{\tau\geqslant 0} \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \varkappa_1(s)\,ds\right) e^{2c\sigma}\vartheta_j \tag{2.4}$$

$$\vartheta_j \doteq \max_{t\in T} \left| \int_{\tau}^{t} \langle \nu(s) - \delta_{u_j(s)}, \Psi(\tau, s, u)\rangle\, ds \right|$$

(отображение $\Psi(\tau, s, u)$ определено формулой (2.2)).

Из ограничений на функцию $g(t, x, u)$ следует, что отображение $(s, u) \to \Psi(\tau, s, u)$ принадлежит L_T. Поэтому из условия $\delta_{u_j} \to \nu$ при $j \to \infty$ получаем $\lim \vartheta_j = 0$ при $j \to \infty$, что совместно с (2.4) доказывает теорему 2.2.

3. Приведем достаточные условия РЛУ системы

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t, x, u)\rangle, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \mu \in M(\Omega), \ \Omega \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n) \tag{3.1}$$

когда не предполагается дифференцируемости по u функции f (т. е. система (3.1) не может быть представлена в виде (1.4)), и дадим ответы на некоторые вопросы работы [2].

Относительно функции f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ предполагаем, что

4) отображение $t \to f(t, x, u)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ измеримо, $f(t, 0, 0) \equiv 0$ и для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ существует такая функция $\Psi_K \in X^{(1,1)}$, что

$$\max\{|f(t, x, u)|, (x, u) \in K \times \Omega\} \leqslant \Psi_K(t)$$

5) отображение $x \to f(t, x, u)$, $(t, u) \in \mathbb{R} \times \Omega$ дифференцируемо, причем отображения $u \to f(t, 0, u)$, $u \to f_x'(t, 0, u)$, $t \in \mathbb{R}$ таковы, что для любого $\eta > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_{t}^{t+1} (|f(s, 0, u)| + |f_x'(s, 0, u) - f_x'(s, 0, 0)|)\, ds < \eta, \ u \in B_\Delta(0)$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f_x'(t, 0, u)\rangle x + \langle \mu(t), f(t, 0, u) + r(t, x, u)\rangle \tag{3.2}$$

при $\mu \in M(\Omega)$, где функция r: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

6) отображение $t \to r(t, x, u)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ измеримо, $r(t, \cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}^n \times \Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ и для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует такая функция $\varkappa_K \in X^{(1,1)}$, что

$$\max\{|r(t, x, u)|, (x, u) \in K \times \Omega\} \leqslant \varkappa_K(t)$$

7) существует такая функция $a \in X^{(1,1)}$ и постоянная $\alpha > 0$, что

$$|r(t, x, u)| \leqslant a(t) |x|^\alpha, \quad \forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times B_\gamma[0] \times \Omega \ (\gamma > 0)$$

Будем также предполагать, что система (3.2) обладает свойством правосторонней единственности.

Пусть

$$c \doteq \sup_{\tau\geqslant 0} \int_{\tau}^{\tau+1} |f_x'(t, 0, \cdot)|_{\max}\, dt$$

и выберем $\delta \in (0, \gamma]$ так, чтобы

$$\sigma e^{2c\sigma} \sup_{\tau\geqslant 0} \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \max_{u\in\Omega_\delta} |f(t, 0, u)|\, dt < \frac{\gamma}{3}, \ \Omega_\delta \doteq \Omega \cap B_\delta[0] \tag{3.3}$$

Ясно, что из РЛУ системы (3.2) при $\mu \in M(\Omega_\delta)$ следует ее РЛУ при $\mu \in M(\Omega)$.

Теорема 3.1. Пусть функция f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, r: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют соответственно условиям 4), 5) и 6), 7). Тогда система (3.2) при $\mu \in M(\Omega_\delta)$ (следовательно и при $\mu \in M(\Omega)$) равномерно локально управляема, если она равномерно локально управляема при $r \equiv 0$ и $\mu \in M(\Omega_\delta)$.

Теорема 3.1 дает ответы на вопросы, поставленные в работе [1]. Отметим также, что эта теорема полезна при изучении вопроса об управляемости системы (3.1), когда $f_x'(t, 0, 0) \equiv 0$ и функция f не дифференцируема по u.

Для доказательства понадобится ряд утверждений и обозначений. Пусть $\Phi(t, s; \mu)$ — оператор Коши системы

$$x^{\cdot} = \langle \mu(t), f_x'(t, 0, u)\rangle x \doteq \Big(\int\limits_{\Omega_\delta} f_x'(t, 0, u)\,\mu(t)(du)\Big)\, x$$

Непосредственно проверяется, что

$$D_\tau(\sigma) \doteq \Big\{-\int\limits_\tau^{\tau+\sigma} \langle \mu(t), \Phi(\tau, t; \mu) f(t, 0, u)\rangle\, dt, \mu \in M_{\tau, \sigma}(\Omega_\delta)\Big\} \qquad (3.4)$$

это множество управляемости системы (3.2) при $r \equiv 0$, $\mu \in M_{\tau,\sigma}(\Omega_\delta)$ и $D_\tau(\sigma_1) \subset D_\tau(\sigma_2)$, если $\sigma_1 < \sigma_2$. Поэтому можно считать, что $\sigma > 1$.

Лемма 3.1. Для любого $\tau \geqslant 0$ $D_\tau(\sigma) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Используя условие $\mu(t) \in \operatorname{rpm}(\Omega_\delta)$ можно показать, что

$$\max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\sigma} \Phi(\tau, t; \mu) \,| \leqslant e^{2c\sigma}$$

для всех $\tau \geqslant 0$. Откуда следует, что множество

$$\{\langle \mu(t), \Phi(\tau, t; \mu) f(t, 0, u)\rangle, \mu \in M_{\tau,\sigma}(\Omega_\delta)\},\ t \in T \doteq [\tau, \tau + \sigma]$$

ограничено и, следовательно, в силу теоремы Ляпунова ([3], с. 350) $D_\tau(\sigma)$ — ограниченное выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что оно замкнуто. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset D_\tau(\sigma)$ и $x_j \to x_0$, при $j \to \infty$. Тогда (см. (3.4))

$$x_j = -\int\limits_T \langle \mu_j(s), \Phi(\tau, s; \mu_j) f(s, 0, u)\rangle\, ds$$

Поскольку $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty \subset M_{\tau,\sigma}(\Omega_\delta)$, а $M_{\tau,\sigma}(\Omega_\delta)$ — выпуклый компакт пространства $(N_T, \|\cdot\|_w)$, то можно считать, что

$\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu_j - \mu_0\|_w = 0$ и $\mu_0 \in M_{\tau,\sigma}(\Omega_\delta)$. Отсюда

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_T \langle \mu_j(s), f_x'(s, 0, u)\rangle\, ds = \int\limits_T \langle \mu_0(s), f_x'(s, 0, u)\rangle\, ds$$

что в свою очередь влечет равномерную сходимость на последовательности $\{\Phi(\tau, t; \mu_j)\}_{j=1}^\infty$ при $j \to \infty$ к $\Phi(\tau, t; \mu_0)$. Поэтому

$$x_0 = -\int\limits_T \langle \mu_0(s), \Phi(\tau, s; \mu_0) f(s, 0, u)\rangle\, ds$$

т. е. $x_0 \in D_\tau(\sigma)$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть при $r \equiv 0$, $\mu \in M(\Omega_\delta)$ система (3.2) РЛУ, т. е. для всех $\tau \geqslant 0$ и некоторых ε, $\sigma > 0$ $B_\varepsilon[0] \subset D_\tau(\sigma)$, константа $\delta > 0$ определена соотношением (3.3) и

$$\sup_{\tau\geqslant 0} \int\limits_\tau^{\tau+\sigma} a(s)\, ds < \frac{\varepsilon_0}{2\gamma^\alpha} e^{-2c\sigma},\ \varepsilon_0 \in \Big(0, \frac{2}{3}\gamma e^{-2c\sigma}\Big)$$

Тогда для любой функции $y \in C(\mathbb{R}, B_\gamma[0])$ система

$$x^\cdot = \langle \mu(t), f_x'(t, 0, u)\rangle x + \langle \mu(t), f(t, 0, u) + r(t, y(t), u)\rangle \quad (3.5)$$

где $\mu \in M(\Omega_\delta)$, РЛУ, причем для любых $\tau \geqslant 0$, $x_0 \in B_{\varepsilon_0/2}[0]$ найдется такое обобщенное управление $\nu \in M_{\tau, \sigma}(\Omega_\delta)$, что при $\mu(t) = \nu(t)$ система (3.5) имеет решение $x(t) \in B_\gamma[0]$, $t \in [\tau, \tau + \sigma]$ и $x(\tau) = x_0$, $x(\tau + \sigma) = 0$.

Лемма 3.2 доказывается при помощи леммы 3.1 аналогично доказательству леммы 1.1.

Теперь, используя схему доказательства теоремы 2.1 и лемму 3.2, можно доказать теорему 3.1.

4. В последнее время обобщенные управления интенсивно используются как в задачах оптимального управления, так и в игровых задачах (см., например, [2, 7—11] и приведенную там библиографию) [2]. В данной работе аппарат обобщенных управлений применен при исследовании вопроса о РЛУ нелинейной системы. Полученные результаты важны при исследовании вопросов устойчивости и корректности так называемых магистральных процессов (МП).

Кратко поясним сказанное. В простейшей ситуации МП $(z(\cdot), w(\cdot))$ — это решение задачи

$$\begin{gathered} I(x(\cdot), u(\cdot)) \to \min \\ x^\cdot = f_0(x, u), \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in U, \ U \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m) \\ (x(\cdot), u(\cdot)) \in D \end{gathered} \quad (4.1)$$

где D — некоторое функциональное множество, задающее граничные условия (например, D — множество периодических или почти периодических функций), I — функционал на D. Скажем, что процесс $(z(\cdot), w(\cdot))$ равномерно локально устойчив (или, что задача о МП поставлена корректно), если существуют такие ε, $\sigma > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$ и любого $x_0 \in B_\varepsilon[0]$ найдется управление

$$u_0 : [\tau, \tau + \sigma] \to \Omega(t) \doteq U - w(t)$$

такое, что система

$$x^\cdot = f_0(z(t) + x, \ w(t) + u) - z^\cdot(t) \quad (4.2)$$

при $u = u_0(t)$ имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям $x(\tau) = x_0$, $x(\tau + \sigma) = 0$ (т. е. возмущенное движение возвращается на магистраль).

Рассматриваемая задача обладает рядом особенностей, затрудняющих ее исследование. Во-первых, МП определен на всей числовой прямой и поэтому важно, чтобы свойство локальной управляемости было равномерным относительно времени t. Во-вторых, в силу оптимальности $w(t)$ справедливо условие $0 \in \partial\Omega(t)$ при всех t (т. е. имеет место так называемый критический случай) и, наконец, система (4.2) нестационарна.

Переписав систему (4.2) в виде (1.2), где

$$A(t) \doteq f_{0x}'(z(t), w(t)), \quad V(t) \doteq f_{0u}'(z(t), w(t))\,\Omega(t)$$

можно применить основную теорему работы [4]. Но в приведенных в этой работе условиях, помимо условий теоремы 2.1 требовалась непрерывность отображения $y(\cdot) \to T(\tau, x; y(\cdot))$ для каждой фиксированной пары (τ, x), где $T(\tau, x; y(\cdot))$ — время быстродействия системы $x^\cdot = A(t)x + u + g(t, y(t), u)$ в нуль из позиции (τ, x). Как показывает теорема 2.1 в классе обобщенных управлений это условие излишне.

Далее, если функция f_0 недифференцируема по u, то для исследования вопроса о возвращаемости на магистраль можно использовать теорему 3.1.

Наконец, как показывают примеры, решения задачи (4.1) на D может не существовать. При естественных же предположениях на функцию f_0 овыпукленная задача для задачи (4.1) имеет решение $(z(\cdot), \nu(\cdot))$, представляющее собой обобщенный МП. В этом случае следует использовать теорему 2.2.

---

[2] См. также: *Ченцов А. Г.* Оптимизация в условиях нечетких ограничений: Препринт ИММ АН СССР. Свердловск: Ин-т математики и механики, 1986. 54 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yorke J. A.* The maximum principle and controllability of nonlinear equations / SIAM J. Control. 1972. V. 10. N 2. P. 334—338.
2. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
3. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
4. *Иванов А. Г.* О равномерной локальной управляемости нелинейной системы // Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск: Удмурт. ун-т, 1987. С. 5—23.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. *Иванов А. Г., Тонков Е. Л.* Равномерная колеблемость линейных систем и вопросы глобальной управляемости // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, Вып. 5 (245). С. 231.
7. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 230 с.
8. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
9. *Ченцов А. Г.* Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985. 126 с.
10. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
11. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.

Поступила в редакцию
12.VII.1989

Ижевск