Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.36

В. И. Воротников

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

При помощи нелинейных преобразований переменных и теории неявных функций получены достаточные условия стабилизации невозмущенного движения одного класса нелинейных управляемых систем. В процессе стабилизации обеспечивается устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость по отношению к части переменных. В замкнутой форме получены соотношения, позволяющие организовать итерационный процесс поиска приемлемого (оптимального) с практической точки зрения решения из множества законов стабилизации. Разработанная методика позволяет свести построение законов управления в исходной нелинейной системе к построению законов управления для вспомогательной линейной управляемой системы простейшего вида и примыкает к широко распространенному в современной прикладной теории автоматического управления итерационному принципу построения оптимальных законов управления. В качестве приложения решаются задачи стабилизации положения равновесия твердого тела при помощи гироскопа в кардановом подвесе и двигателей с непрерывными законами регулирования тяги.

1. Постановка задачи. Пусть возмущенное движение объекта управления описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X}(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r \tag{1.1}$$

правые части которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными по t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ до второго порядка включительно в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant H, \quad \|\mathbf{u}\| < +\infty \tag{1.2}$$

Вектор управляющих воздействий ищем в классе вектор-функций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, 0) \equiv 0$, непрерывно дифференцируемых в области D: $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| \leqslant H$. В этом случае правые части замкнутой системы (1.1) удовлетворяют в области D условиям теоремы существования и единственности решений.

Требуется вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ подобрать так [1—6], чтобы невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) было устойчиво по отношению ко всем переменным в смысле Ляпунова, асимптотически устойчиво по отношению к некоторой заданной части характеризующих ее переменных и на траекториях системы (1.1) минимизировался некоторый функционал, характеризующий переходный процесс в системе и мощность затрачиваемых на стабилизацию управлений.

* Если в выборе минимизируемого функционала руководствоваться только исходной технической потребностью, то возможности получения решения задачи стабилизации в строгой замкнутой форме становятся крайне ограниченными. Но и в тех редких случаях, когда такие решения найдены, они все равно нуждаются в корректировке, ибо многие технические потребности носят противоречивый характер и не всегда поддаются формализации. Поэтому в приложениях практическая процедура решения задач оптимальной стабилизации рассматривается как итерационная [3, 4]. При таком подходе сначала (на стадии проектирования) делается предварительный выбор функ-

ционала, а затем (также на стадии проектирования или уже в процессе эксплуатации) производится его итерационная коррекция — уточнение коэффициентов, а часто — и самой структуры функционала. Для реализации указанной процедуры в реальном масштабе времени необходима простота однократного решения задачи.

Предлагаемая ниже методика решения задачи оптимальной стабилизации согласуется в целом с подходами [1—6], но отличается от них тем, что построение оптимальных законов управления для исходной нелинейной системы сводится к построению законов управления для вспомогательной линейной управляемой системы простейшего вида, получающейся из исходной нелинейной системы в результате нелинейной замены переменных [7, 8].

2. Рассматриваемый класс систем (1.1). Допустим, что управляющие воздействия входят в какую-либо одну группу уравнений системы (1.1) и уравнения (1.1) имеют вид

$$\mathbf{w}^{\cdot} = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{w}, \xi, \eta), \quad \xi^{\cdot} = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{w}, \xi, \eta, \mathbf{u}), \quad \eta^{\cdot} = \mathbf{X}^{(2)}(\xi, \eta)$$
$$\mathbf{w}, \mathbf{X}^{(0)} \in R^m; \quad \xi, \mathbf{X}^{(1)} \in R^l; \quad \eta \mathbf{X}^{(2)} \in R^{n-m-l}; \quad \mathbf{x} = (\mathbf{w}, \xi, \eta) \tag{2.1}$$

Предположим, что $n - m - l \geqslant r$ и, кроме того, допустим, что переменные ξ, η связаны соотношениями

$$\mathbf{Y}(\xi, \eta) = 0, \quad \mathbf{Y}(0, 0) = 0, \quad \mathbf{Y} \in R^k, \quad k \geqslant n - m - 2r \tag{2.2}$$

причем компоненты вектор-функции $\mathbf{Y}$ в области (1.2) непрерывно дифференцируемы по ξ, η. В случае $2r \geqslant n - m$ можно рассматривать систему (2.1), фазовые переменные ξ, η которой не связаны, вообще говоря, дополнительными соотношениями (2.2).

3. Вспомогательные матрицы Якоби. Рассмотрим функции

$$\Phi_i(\mathbf{w}, \xi, \eta, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial X_i^{(2)}}{\partial \xi_j} X_j^{(1)} + \sum_{s=1}^{n-m-l} \frac{\partial X_i^{(2)}}{\partial \eta_s} X_s^{(2)} \tag{3.1}$$
$$(i = 1, \ldots, n - m - l)$$

и введем матрицу Якоби $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\partial \Phi_i / \partial u_j)$ от функций Φ_i $(i = 1, \ldots, n - m - l)$ по переменным u_j $(j = 1, \ldots, r)$. Пусть $\operatorname{rank} F(0, 0) = r$ и пусть в матрице $F(0, 0)$ линейно независимы первые r строк (общность рассуждений при этом не нарушается). Обозначим $\eta = (\rho, \mu)$, $\rho \in R^r$, $\eta \in R^{n-m-l-r}$ и введем матрицу Якоби $\Psi(\xi, \eta)$ от функций $X_i^{(2)}$ $(i = 1, \ldots, r)$, Y_j $(j = 1, \ldots, k)$ по переменным ξ, μ.

4. Вспомогательная линейная система. Рассмотрим равенства

$$\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_i^{\wedge} \quad (i = 1, \ldots, n - m - l) \tag{4.1}$$

в которых функции Φ_i имеют вид (3.1). Поскольку $\operatorname{rank} F(0, 0) = r$, то на основании теории неявных функций в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{u} = 0$ при всех $u_i^{\wedge}$ (здесь и везде далее, если не оговорено противное, $i = 1, \ldots, r$) существует решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{\wedge}), \quad \mathbf{f} \in R^r, \mathbf{u}^{\wedge} = (u_1^{\wedge}, \ldots, u_r^{\wedge}) \tag{4.2}$$

системы (4.1), в котором вектор-функция $\mathbf{f}$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ при всех $u_i^{\wedge}$, причем $\mathbf{f}(0, 0) = 0$.

Непосредственным вычислением можно показать, что $\eta^{\cdot\cdot} = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и в силу условия $\operatorname{rank} F(0, 0) = r$ существует окрестность точки $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{u} = 0$, в которой из замкнутой системы (2.1), (4.2) можно выделить систему линейных уравнений

$$\rho_i^{\cdot\cdot} = u_i^{\wedge} \tag{4.3}$$

5. Вспомогательная задача оптимальной стабилизации. Методом динамического программирования [9] можно показать, что при

$$u_i^\wedge = c_i^{-1}(d_i\rho_i + d_{i+1}\rho_i^\cdot), \quad d_i = -\sqrt{a_i c_i} \tag{5.1}$$
$$d_{i+1} = -\sqrt{(b_i - 2d_i)\,c_i}$$

положение равновесия $\rho_i = \rho_i^\cdot = 0$ каждой из подсистем (4.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову и на траекториях каждой из подсистем минимизируется функционал вида

$$I_i = \int_{t_0}^{\infty} [a_i\rho_i^2 + b_i\dot{\rho}_i^2 + c_i u_i^{\wedge 2}]\,dt \tag{5.2}$$
$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > 0$$

Постоянные a_i, b_i, c_i в (5.2) не фиксируем, поскольку, как будет показано ниже, оптимальные значения этих постоянных находятся в результате итерационного процесса поиска приемлемого с точки зрения практики решения исходной нелинейной задачи оптимальной стабилизации.

6. Основной результат. Выделим в правой части первой группы уравнений замкнутой системы (2.1), (4.2), (5.1) члены, зависящие лишь от $\mathbf{w}$, т. е. представим вектор-функцию $\mathbf{X}^{(0)}$ в области $\|\mathbf{x}\| \leqslant H$ в виде

$$\mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{w}, \xi, \eta) = \overline{\mathbf{X}}^{(0)}(\mathbf{w}) + \mathbf{X}_*^{(0)}(\mathbf{w}, \xi, \eta), \quad \mathbf{X}_*^{(0)}(\mathbf{w}, 0, 0) \equiv 0 \tag{6.1}$$

Теорема 1 (о стабилизации невозмущенного движения системы (2.1)). Пусть выполняются условия

1°. $\operatorname{rank} F\,(0, 0) = r$; 2°. $\operatorname{rank} \Psi\,(0, 0) = n - m - r$

Тогда, если нулевое решение $\mathbf{w} = 0$ «укороченной» системы

$$\mathbf{w}^\cdot = \overline{\mathbf{X}}^{(0)}(\mathbf{w}) \tag{6.2}$$

устойчиво по Ляпунову, то невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ замкнутой системы (2.1), (4.2), (5.1) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по отношению к ξ, η. При этом на траекториях системы (2.1), (4.2), (5.1) минимизируется функционал

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{r} [a_i x_{m+l+i}^2 + b_i (X_i^{(2)}(\xi, \eta))^2 + c_i \Phi_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \right\} dt \tag{6.3}$$

Доказательство. В силу условия 2° на основании теории неявных функций в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ равенства $X_i^{(2)} = 0$, $Y_j = 0$ ($j = 1, \ldots, k$) допускают решения

$$x_i = \varphi_i(\rho, \rho^\cdot), \quad \varphi_i(0, 0) = 0 \tag{6.4}$$
$$(i = m+1, \ldots, n; \ i \neq m+l+1, \ldots, m+l+r)$$

причем φ_i — непрерывно дифференцируемые по ρ, $\rho^\cdot$ функции. Соотношения (6.4) связывают переменные, входящие в векторы μ, η, и переменные ρ, $\rho^\cdot$.

При нелинейном преобразовании переменных, в результате которого из исходной системы (2.1) удается выделить вспомогательную линейную систему (4.3), замкнутая система (2.1), (4.2), (5.1) принимает вид

$$\begin{gathered} \mathbf{w}^\cdot = X^{(0)}(\mathbf{w}, \xi, \eta), \quad \xi^\cdot = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{w}, \xi, \eta, \mathbf{f}(\mathbf{w}, \xi, \eta, \mathbf{u}^\wedge)) \\ \eta^\cdot = \mathbf{X}^{(2)}(\xi, \eta), \quad \rho_i^{\cdot\cdot} = u_i^\wedge, \quad u_i^\wedge = c_i^{-1}(d_i\rho_i + d_{i+1}\rho_i^\cdot) \end{gathered} \tag{6.5}$$

Учитывая соотношения (6.1) и (6.4), заключаем, выражая переменные ξ, η через ρ, $\rho^\cdot$, что из системы (6.5) в некоторой окрестности точки

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ можно выделить следующую систему уравнений:

$$\mathbf{w}^{\cdot} = \overline{\mathbf{X}}^{(0)}(\mathbf{w}) + \overline{\mathbf{X}}_{*}^{(0)}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}^{\cdot}), \quad \rho_i^{\cdot\cdot} = c_i^{-1}(d_i\rho_i + d_{i+1}\rho_i^{\cdot}) \tag{6.6}$$

Поскольку в соотношениях (6.4) для функций φ_i справедливы равенства $\varphi_i(0, 0) = 0$, то переменные, входящие в векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, равны нулю, если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{\cdot} = 0$. Значит, вектор-функция $\overline{\mathbf{X}}_{*}^{(0)}$ в системе (6.6) удовлетворяет соотношению $\overline{\mathbf{X}}_{*}^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Кроме того, в силу непрерывной дифференцируемости функций φ_i правые части системы (6.6) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решений.

Учитывая, что нулевое решение $\rho_i = \rho_i^{\cdot} = 0$ системы (4.3), (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову (экспоненциально), а нулевое решение $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ «укороченной» системы (6.2) устойчиво по Ляпунову, на основании принципа сведения [10] заключаем, что нулевое решение $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{\cdot} = \mathbf{0}$ системы (6.6) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по отношению к переменным $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}^{\cdot}$.

Переменные, входящие в вектор $\mathbf{w}$, не меняются при преобразовании системы (2.1), (4.2), (5.1), в результате которого выделяется система (6.6). Поэтому невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ замкнутой системы (2.1), (4.2), (5.1) устойчиво по отношению к $\mathbf{w}$. Переменные x_{m+l+i} системы (2.1), (4.2), (5.1), входящие в вектор $\boldsymbol{\rho}$, также не меняются при указанном преобразовании системы (2.1), (4.2), (5.1). Из этих выводов и соотношений (6.4) заключаем, что невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (2.1), (4.2), (5.1) асимптотически устойчиво по отношению к переменным $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$.

Таким образом, невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ замкнутой системы (2.1), (4.2), (5.1) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по отношению к переменным $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$.

Поскольку система (4.3), (5.1) распадается на r независимых подсистем, то на ее траекториях минимизируются не только функционалы I_i, но и функционал I, равный их сумме. В силу равенств (4.1), $X_i^{(2)} = \rho_i^{\cdot}$ и свойства аддитивности интеграла, функционал I принимает вид (6.3). Система (4.3), (5.1) получена из (2.1), (4.2), (5.1) нелинейным преобразованием переменных, и, следовательно, на траекториях системы (2.1), (4.2), (5.1) минимизируется функционал (6.3). Теорема доказана.

Найдем область притяжения невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (4.2), (5.1). Пусть условие 1° выполняется в области

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant H_1, \quad \|\mathbf{u}\| \leqslant H_2 \tag{6.7}$$

а условие 2° — в области $\|\boldsymbol{\xi}^*\| \leqslant H_3$, $\boldsymbol{\xi}^* = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$. Поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{\wedge}(\mathbf{x}))$, то неравенства (6.7) определяют некоторую область $\|\mathbf{x}\| \leqslant H_4$. Для этого достаточно отобрать из области $\|\mathbf{x}\| \leqslant H_1$ те значения $\mathbf{x}$, которые удовлетворяют неравенству $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{\wedge}(x))\| \leqslant H_2$. Обозначим $H^* = \min(H_3, H_4)$.

Следствие. Пусть условие 1° теоремы 1 выполняется в области (6.7), а условие 2° — в области $\|\boldsymbol{\xi}^*\| \leqslant H_3$. Тогда область $S = \{\mathbf{x}_0 \colon \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant H^*\}$ является областью притяжения невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по отношению к переменным $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, т. е. $\|\boldsymbol{\xi}^*(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$, $t \to \infty$ при $\mathbf{x}_0 \in S$.

Замечания. 1°. В следствии предполагается, что при всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ из области (6.7) в матрице F линейно независимы первые r строк, а при всех $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ из области $\|\boldsymbol{\xi}^*\| \leqslant H_3$ в этой области линейно независимы одни и те же строки матрицы Ψ.

2°. Конструктивное построение множества S в силу явного вида решений $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$

замкнутой системы (2.1), (4.2), (5.1) при использовании предложенного метода исследования не представляет принципиальных трудностей.

7. Выбор оптимальных законов управления. Вспомогательная линейная система (4.3) получена из исходной нелинейной системы в результате нелинейного преобразования переменных. Поэтому поведение переменных ρ_i, $\rho_i^{\cdot}$, а следовательно, переменных x_{m+l+i} исходной системы (2.1), (4.2), (5.1) определяется системой (4.3), (5.1), и качеством переходного процесса по переменным x_{m+l+i} в исходной нелинейной системе (2.1) можно управлять, меняя постоянные a_i, b_i, c_i в функционалах (5.2) при решении вспомогательной задачи оптимальной стабилизации системы (4.3).

При выполнении условия 2° справедливы соотношения (6.4). В результате, изменяя значения постоянных a_i, b_i, c_i в (5.2), можно управлять качеством переходного процесса в исходной системе (2.1) не только по переменным x_{m+l+i}, но и по переменным (6.4). При этом ресурсы, затрачиваемые на формирование управлений u_i в системе (2.1), будут оцениваться по зависимостям (4.2), (5.1). Поскольку $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\wedge(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ при $x^* = \mathbf{0}$, а невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (4.2), (5.1) устойчиво по отношению к $\mathbf{w}$, то заключаем, что, меняя значения a_i, b_i, c_i в (5.2), можно регулировать и величины u_i. В итоге постоянные a_i, b_i, c_i в функционале (6.3) могут быть выбраны так, чтобы добиться желаемого качества переходного процесса в исходной нелинейной системе (2.1) по переменным $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ при удовлетворительной затрате ресурсов на формирование управлений u_i.

Простота однократного решения задачи (соответствующего фиксированным значениям a_i, b_i, c_i) позволяет сделать процесс приближения к приемлемому в практическом смысле решению (4.2), (5.1) итерационным, причем итерационный поиск ведется по зависимостям, полученным в замкнутой форме. При этом функционал (6.3) является обобщенным критерием качества управления в исходной нелинейной задаче стабилизации невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1). Это согласуется с той ролью, которую играют функционалы качества в современной прикладной теории автоматического управления.

8. Стабилизация положения равновесия твердого тела при помощи гироскопа в кардановом подвесе. Рассмотрим свободное твердое тело с главными центральными осями инерции $Ox_1x_2x_3$, на котором установлен уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе таким образом, что его ось внешнего кольца направлена по Ox_1, а неподвижная точка совпадает с центром масс тела. Гироскоп управляется при помощи трех двигателей, создающих моменты относительно осей внешнего и внутреннего колец, а также оси ротора.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [11]

$$A_1 q_1^{\cdot} = (A_2 - A_3)\, q_2 q_3 + u_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

$$\beta_{i1}^{\cdot} = q_3\beta_{i2} - q_2\beta_{i3} \quad (i = 1, 2, 3)\ (1\ 2\ 3)$$

$$\begin{gathered} A\alpha^{\cdot} = -(A_1 + A)\, q_1 - (A_2 + A)\, q_2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta + \\ + (A_2 + A)\, q_3 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta + K_1 + (K_2 \sin\alpha - K_3 \cos\alpha) \operatorname{tg}\beta \\ A\beta^{\cdot} = -(A_2 + A)\, q_2 \cos\alpha - (A_3 + A)\, q_3 \sin\alpha + \\ + K_2 \cos\alpha + K_3 \sin\alpha \end{gathered} \tag{8.1}$$

$$K_i = \sum h_k \beta_{ki}, \quad h_k^{\cdot} = 0 \quad (i, \ k = 1, \ 2, \ 3)$$
$$u_1 = -u_1^*, \quad u_2 = -u_1^* \sin\alpha \operatorname{tg}\beta - u_2^* \cos\alpha + u_3^* \sin\alpha \sec\beta$$
$$u_3 = u_1^* \cos\alpha \operatorname{tg}\beta - u_2^* \sin\alpha - u_3^* \cos\alpha \sec\beta$$

Здесь q_i $(i = 1, \ 2, \ 3)$ — проекции вектора мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$; A_i $(i = 1, 2, 3)$ — моменты инерции тела относительно этих же осей; A, C — экваториальный и осевой момент инерции гироскопа; α, β — углы, определяющие положение гироскопа относительно тела; β_{ik} — направляющие косинусы углов между осями $Ox_1x_2x_3$ и осями инерциальной системы $OX_1X_2X_3$; K_i, h_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции вектора кинетического момента системы соответственно на оси $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$. Уравнения (8.1) получены в предположении $\cos\beta \neq 0$, когда плоскости внешнего и внутреннего колец не совпадают.

Уравнения (8.1) допускают частное решение

$$q_i = 0, \quad \beta_{ik} = 1 \ (i = k), \quad \beta_{ik} = 0 \ (i \neq k)$$
$$K_i = h_i^{\circ}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma^{\cdot} = \gamma_0^{\cdot} \quad (i, \ k = 1, \ 2, \ 3) \tag{8.2}$$
$$(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0^{\cdot}, \ h_i^{\circ} - \text{const})$$

соответствующее положению равновесия тела в инерциальной системе координат ($\gamma_0^{\cdot}$ — скорость собственного вращения гироскопа). Принимая $\beta_0 = 0$, т. е. полагая, что в начальный момент времени плоскости внутреннего и внешнего колец взаимно перпендикулярны, рассмотрим задачу стабилизации выделенного положения равновесия тела посредством управлений u_i^* $(i = 1, \ 2, \ 3)$, создаваемых двигателями. Для этого, вводя новые переменные $q_i' = q_i$, $\beta_{ik}' = \beta_{ik} - 1$ $(i = k)$, $\beta_{ik}' = \beta_{ik}$ $(i \neq k)$ $(i, k = 1, 2, 3)$, $\alpha' = \alpha - \alpha_0$, $\beta' = \beta$ и возвращаясь к исходным обозначениям, построим систему уравнений возмущенного движения

$$A_1 q_1^{\cdot} = (A_2 - A_3) \, q_2 q_3 + u_1 \ (1 \ 2 \ 3)$$
$$\beta_{ii}^{\cdot} = G_{ii}, \quad \beta_{12}^{\cdot} = -q_3 + G_{12}, \ \beta_{13}^{\cdot} = q_2 + G_{13} \ (L = 1, \ 2, \ 3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$
$$A\alpha^{\cdot} = -(A_1 + A) \, q_1 - (A_2 + A) \, [q_2 \sin(\alpha + \alpha_0) - q_3 \cos(\alpha + \alpha_0)] \operatorname{tg}\beta + h_1 + \sum (h_k^0 + h_k) \, \beta_{k1} + [G_1 \sin(\alpha + \alpha_0) - G_2 \cos(\alpha + \alpha_0)] \operatorname{tg}\beta$$
$$A\beta^{\cdot} = -(A_2 + A) \, q_2 \cos(\alpha + \alpha_0) - (A_3 + A) \, q_3 \sin(\alpha + \alpha_0) + G_1 \cos(\alpha + \alpha_0) + G_2 \sin(\alpha + \alpha_0) \tag{8.3}$$
$$h_i^{\cdot} = 0, \quad G_{i1} = q_3 \beta_{i2} - q_2 \beta_{i3} \quad (i = 1, \ 2, \ 3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$
$$G_j = h_{1+j}^0 + h_{1+j} + \sum (h_k^0 + h_k) \, \beta_{k, \, j+1} \quad (j = 1, \ 2)$$
$$u_1 = -u_1^*, \quad u_2 = -u_1^* \sin(\alpha + \alpha_0) \operatorname{tg}\beta - u_2^* \cos(\alpha + \alpha_0) + u_3^* \sin(\alpha + \alpha_0) \sec\beta, \quad u_3 = u_1^* \cos(\alpha + \alpha_0) \operatorname{tg}\beta - u_2^* \sin(\alpha + \alpha_0) - u_3^* \cos(\alpha + \alpha_0) \sec\beta, \ \beta^{\cdot}_{ij} \triangleq \bar{G}_{ij}$$

Добавим к этим уравнениям шесть соотношений

$$\beta_{ik} + \beta_{ki} + \sum \beta_{il} \beta_{kl} = 0 \quad (i, \ k = 1, \ 2, \ 3; \ i \leqslant k) \tag{8.4}$$

являющихся следствием равенств, связывающих направляющие косинусы углов. Выражения в левых частях равенств (8.4) обозначим соответственно Y_j $(j = 1, \ldots, 6)$. Полагая также $X_1^{(2)} = \bar{G}_{21}$, $X_2^{(2)} = \bar{G}_{23}$, $X_3^{(2)} = \bar{G}_{31}$ и вводя обозначения $w_1 = \alpha$, $w_2 = \beta$, $\xi_i = q_i$ $(i = 1, \ 2, \ 3)$, $\eta_1 = \beta_{21}$, $\eta_2 = \beta_{23}$, $\eta_3 = \beta_{31}$ $(m = 2, \ l = r = 3, \ k = 6, \ n = 14)$, можно проверить, что для системы (8.3), (8.4) выполнены условия 1° и 2° теоремы 1.

Законы управления (4.2) в данном случае имеют вид

$$u_s = \frac{A_s(Q_s A_2+\beta_{2s}u_2)}{A_2(1+\beta_{22})}, \quad s=1,3; \quad u_2 = \frac{A_2 Q_2(1+\beta_{22})}{(1+\beta_{22})(1+\beta_{33})-\beta_{23}\beta_{32}}$$

$$Q_1 = Q_1^* - u_2^\wedge, \quad Q_3 = Q_3^* + u_1^\wedge \qquad (8.5)$$

$$Q_2 = -(1+\beta_{33})R_2 + \beta_{32}R_3 + q_3\bar{G}_{32} - q_2 G_{33} - u_3^\wedge + \\ + \beta_{32}Q_3/(1+\beta_{22}), \quad A_1 R_1 = (A_2 - A_3)\, q_2 q_3 \qquad (1\ 2\ 3)$$

$$Q_s^* = -(1+\beta_{22})R_s + \beta_{2s}R_2 + q_2\bar{G}_{2s} - q_s G_{22}, \quad s=1,\ 3$$

Эти законы управления связаны с законами управления u_i^* ($i = 1, 2, 3$), создаваемыми двигателями, следующим образом:

$$u_1^* = -u_1, \quad u_2^* = -u_2\cos(\alpha + \\ + \alpha_0) - u_3\sin(\alpha+\alpha_0), \quad u_3^* = -u_1\sin\beta + \\ + [u_2\sin(\alpha+\alpha_0) - u_3\cos(\alpha+\alpha_0)]\cos\beta$$

Вспомогательную линейную систему (4.3) составят уравнения $\beta_{21}^{\cdot\cdot} = u_1^\wedge$, $\beta_{23}^{\cdot\cdot} = u_2^\wedge$, $\beta_{31}^{\cdot\cdot} = u_3^\wedge$, а «укороченную» систему (6.2) — уравнения

$$A\alpha^\cdot = h_1 + [(h_2 + h_2^0)\sin(\alpha+\alpha_0) - (h_3+h_3^0)\cos(\alpha+\alpha_0)]\operatorname{tg}\beta$$

$$A\beta^\cdot = (h_2+h_2^0)\cos(\alpha+\alpha_0) + (h_3+h_3^0)\sin(\alpha+\alpha_0) \qquad (8.6)$$

$$h_i^\cdot = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Система (8.6) описывает движение неуправляемого гироскопа на неподвижном основании. В этом случае [11, 12] при малых начальных возмущениях кинетического момента системы устойчивость имеет место при любой конечной (не обязательно большой) угловой скорости вращения гироскопа в невозмущенном движении. Если же начальные возмущения кинетического момента системы — любые конечные величины, то условие устойчивости соблюдается лишь при достаточно большом значении $\gamma_0^\cdot$.

Таким образом, на основании доказанной теоремы невозмущенное движение системы (8.3)—(8.5) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по отношению к переменным q_i, β_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Отметим, что устойчивость по α, β невозмущенного движения системы (8.3)—(8.5) оправдывает исходные предположения $\cos\beta \neq 0$, $\beta_0 = 0$.

Законы управления малы по величине в случае малых начальных возмущений кинетического момента системы. Выбор оптимальных законов управления можно осуществить, используя методику, предложенную в разд. 7. При этом соотношения (6.4) примут вид

$$\beta_{22} = -1 + \sqrt{1-\beta_{21}^2-\beta_{23}^2}, \quad \beta_{32} = [-\beta_{21}\beta_{31} - \beta_{23}(1+\beta_{33})]/(1+\beta_{22})$$

$$\beta_{33} = [-1 + \beta_{21}^2 - \beta_{21}\beta_{23}\beta_{31} + \sqrt{1+M_1}]/(1-\beta_{21}^2)$$

$$\beta_{12} = M_2/M^*, \quad \beta_{13} = M_3/M^*, \quad \beta_{11} = -1 + \sqrt{1-\beta_{12}^2-\beta_{13}^2}$$

$$M_1 = 2(1+\beta_{22}) + (1+\beta_{22})^2 - \beta_{31}^2 - 2(1+\beta_{22})\beta_{31}^2 - \\ - (1+\beta_{22})\beta_{31}^2 - \beta_{21}^2 - 2(1+\beta_{22})\beta_{21}^2 - (1+\beta_{22})^2\beta_{21} - \\ - \beta_{21}^2\beta_{31}^2 - 2(1+\beta_{22})\beta_{21}^2\beta_{31}^2 - (1+\beta_{22})\beta_{21}^2\beta_{31}^2$$

$$M_2 = -(1+\beta_{33})\beta_{21} + \beta_{23}\beta_{31}, \quad M_3 = -(1+\beta_{22})\beta_{31} - \beta_{21}\beta_{32}$$

$$M^* = \sqrt{M_2^2 + M_3^2 + M_4^2}, \quad M_4 = (1+\beta_{22})(1+\beta_{33}) - \beta_{23}\beta_{32}$$

$$q_1 = (-\beta_{23}^\cdot + q_2\beta_{21})/(1+\beta_{22})$$

$$q_2 = [-\beta_{21}^\cdot\beta_{32} - (1+\beta_{22})\beta_{31}^\cdot]/M_4$$

$$q_3 = [-\beta_{23}\beta_{31}^\cdot + \beta_{21}^\cdot(1+\beta_{33})]/M_4$$

Для ясности заметим, что выражения для q_i ($i = 1, 2, 3$) получены в результате решения уравнений $\beta_{21}^{\cdot} = \bar{G}_{21}$, $\beta_{23}^{\cdot} = \bar{G}_{23}$, $\beta_{31}^{\cdot} = \bar{G}_{31}$ относительно q_i, а для β_{ik} — в результате решения системы (8.4). В итоге получен явный вид решений замкнутой системы (8.3)—(8.5), что позволяет в реальном масштабе времени выбрать (подбирая соответствующие значения d_i, d_{i+1} в $u_i^\wedge$ ($i = 1, 2, 3$)) оптимальные в практическом смысле законы управления из множества (8.5).

Для более детального анализа минимизируемого функционала (6.3) ограничимся случаем $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, когда в положении равновесия тела плоскости внутреннего и внешнего колец взаимно перпендикулярны, причем оси внешнего, внутреннего кольца и ротора направлены по соответствующим главным центральным осям инерции тела. Перейдем от связанных между собой переменных β_{ik} к полностью определяющим положение тела трем независимым углам Крылова [13]: φ (рысканье), ψ (дифферент), θ (крен), приняв за основные оси X_2 и x_3. Тогда

$$\beta_{12} = -\varphi + \ldots, \quad \beta_{13} = \psi + \ldots, \quad \beta_{21} = \varphi + \ldots, \quad \beta_{23} = -\theta + \ldots$$
$$\beta_{31} = -\psi + \ldots, \quad \beta_{32} = \theta + \ldots, \quad \beta_{21}^{\cdot} = q_3 + \ldots, \quad \beta_{23}^{\cdot} = -q_2 + \ldots$$
$$\beta_{31}^{\cdot} = -q_1 + \ldots, \quad u_1^\wedge = -u_3^*/A_3 + \ldots, \quad u_2^\wedge = u_1^*/A_1 + \ldots$$
$$u_3^\wedge = u_2^*/A_2 + \ldots$$

где многоточие означает члены порядка выше первого относительно q_i, $\varphi, \psi, \theta, \alpha, \beta, u_i^*$ ($i = 1, 2, 3$). Учитывая эти соотношения, заключаем, что подынтегральное выражение P в минимизируемом функционале имеет вид

$$P = a_1\varphi^2 + a_2\theta^2 + a_3\psi^2 + b_1q_3^2 + b_2q_2^2 + b_3q_1^2 +$$
$$+ c_1u_3^{*2}/A_3^2 + c_2u_1^{*2}/A_1^2 + c_3u_2^{*2}/A_2^2 + P^*(\mathbf{q}, \varphi, \psi, \theta, \alpha, \beta, \mathbf{u}^*)$$

причем функция P^* содержит члены порядка третьего и выше относительно q_i, φ, ψ, θ, α, β, u_i^* ($i = 1, 2, 3$).

Полагая $b_1 = A_3$, $b_2 = A_2$, $b_3 = A_1$, заключаем, что выражение P есть сумма четырех выражений: 1) кинетической энергии тела $A_1q_1^2 + A_2q_2^2 + A_3q_3^2$; 2) квадратичной формы $a_1\varphi^2 + a_2\theta^2 + a_3\psi^2$, характеризующей отклонение тела от положения равновесия $\varphi = \psi = \theta = 0$; 3) квадратичной формы $c_2u_1^{*2}/A_1^2 + c_3u_2^{*2}/A_2^2 + c_1u_3^{*2}/A_3^2$, характеризующей затраты на формирование управлений; 4) функции $P^* = P^*(\mathbf{q}, \varphi, \psi, \theta, \alpha, \beta, \mathbf{u}^*)$, определяемой в процессе решения задачи.

Технически реализация полученных законов стабилизации осуществляется следующим образом. При отклонении тела от положения равновесия специальные устройства измеряют q_i, β_{ik} α, β и подают соответствующие сигналы на управляющие двигатели, которые формируют на основании полученных сигналов моменты u_i^* ($i=1, 2, 3$) и прикладывают их к осям карданова подвеса. В результате под действием моментов u_i^* ($i = 1, 2, 3$) тело возвращается в исходное положение равновесия.

9. Обобщение основного результата. Покажем, что возможности построения вспомогательной линейной системы вида (4.3) можно расширить, если вместо (4.1) рассматривать равенства

$$X_j^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_j^\wedge \ (j = 1, \ldots, l_1 < r) \tag{9.1}$$
$$\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_{l_1+i}^\wedge \ (i = 1, \ldots, n - m - l) \tag{9.2}$$

а вместо условий $n - m - l \geqslant r$, $k \geqslant n - m - 2r$ потребовать выполнения условий $n - m - l \geqslant r - l_1$, $k \geqslant n - m - 2r + l_1$.

Введем матрицу Якоби $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ от функций $X_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, l_1)$, Φ_j $(j = 1, \ldots, n - m - l)$ по переменным u_i. Пусть $\operatorname{rank} F^*(0, 0) = r$ и, не нарушая общности рассуждений, в $F^*(0, 0)$ линейно независимы первые r строк. Введем также матрицу Якоби $\Psi^*(\mathbf{x})$ от функций $X_i^{(2)}$ $(i = 1, \ldots, r - l_1)$, Y_i $(i = 1, \ldots, k)$ по переменным $\xi_{l_1+1}, \ldots, \xi_l$, $\eta_{r-l_1+1}, \ldots, \eta_{n-m-l}$. Поскольку $\operatorname{rank} F^*(0, 0) = r$, то на основании теории неявных функций в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{u} = 0$ при всех $u_i^\wedge$ существует решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\wedge), \quad \mathbf{u}^\wedge = (u_1^\wedge, \ldots, u_r^\wedge) \tag{9.3}$$

системы (9.1), (9.2), в котором вектор-функция $\mathbf{f}^*$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ при всех $u_i^\wedge$, причем $\mathbf{f}^*(0, 0) = 0$.

Непосредственным вычислением можно показать, что существует окрестность точки $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{u} = 0$, в которой из замкнутой системы (2.1), (9.3) можно выделить систему линейных уравнений

$$\dot\rho_i = u_i^\wedge \quad (i = 1, \ldots, l_1 < r) \tag{9.4}$$

$$\ddot\rho_{l_1+j} = u_{l_1+j}^\wedge \quad (j = 1, \ldots, r - l_1) \tag{9.5}$$

Методом динамического программирования можно показать, что при

$$u_i^\wedge = -\sqrt{a_i^*/c_i^*}\,\rho_i \quad (i = 1, \ldots, l_1) \tag{9.6}$$

положение равновесия $\rho_i = 0$ $(i = 1, \ldots, l_1)$ каждой из подсистем (9.4) асимптотически устойчиво по Ляпунову и на траекториях каждой из этих подсистем минимизируется функционал вида

$$I_i^* = \int_{t_0}^{\infty} [a_i^*\rho_i^2 + c_i^* u_i^{\wedge 2}]\, dt$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

1°. $\operatorname{rank} F^*(0, 0) = r$; 2°. $\operatorname{rank} \Psi^*(0) = n - m - r$

Тогда, если нулевое решение $\mathbf{w} = 0$ «укороченной» системы (6.2) устойчиво по Ляпунову, то невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ замкнутой системы (2.1), (9.3), (5.1), (9.6) (соотношения (5.1) выполняются при $i = l_1 + 1, \ldots, r$) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по отношению к ξ, η. На траекториях этой системы минимизируется функционал

$$I^* = \int_{t_0}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{l_1} [a_i^* x_{m+i}^2 + c_i^* (X_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^2] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r-l_1} [a_j x_{m+l+j}^2 + b_j (X_j^{(2)}(\xi, \eta))^2 + c_j \Phi_j^2(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \Big\}\, dt \tag{9.7}$$

Используя разработанную в разд. 7 методику, постоянные a_j, b_j, c_j $(j = 1, \ldots, r - l_1)$, a_i^*, c_i^* $(i = 1, \ldots, l_1)$ в (9.7) можно выбрать так, чтобы добиться желаемого качества переходного процесса в системе (2.1), (9.3), (5.1), (9.6) по переменным ξ, η при удовлетворительной затрате ресурсов на формирование управлений u_i.|

Замечания. 1°. В случае $m = 0$ (когда система (2.1) состоит из уравнений $\dot\xi = \mathbf{X}^{(1)}(\xi, \eta, \mathbf{u})$, $\dot\eta = \mathbf{X}^{(2)}(\xi, \eta)$) при выполнении условий 1° и 2° невозмущенное движение соответственно систем (2.1), (4.2), (5.1) (теорема 1) и (2.1), (9.3), (5.1), (9.6) (теорема 2) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2°. Как и в разд. 7, можно указать конструктивную процедуру построения области притяжения невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ по отношению к переменным ξ, η.

3°. Теоремы 1 и 2 являются развитием результатов работ [7, 8] на более широкий класс нелинейных систем.

Пример. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера

$$A_1 q_1^{\cdot} = (A_2 - A_3)\, q_2 q_3 + u_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{9.8}$$

описывающие вращательное движение твердого тела вокруг его центра инерции O. Здесь q_i — проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции $Ox_1x_2x_3$; A_i — главные центральные моменты инерции; u_i — управляющие моменты; $i = 1, 2, 3$.

Пусть в инерциальном пространстве задана ориентация единичного вектора $\mathbf{s}$ с проекциями s_i $(i = 1, 2, 3)$ на оси системы $Ox_1x_2x_3$; в этом случае

$$s_1^{\cdot} = s_2 q_3 - s_3 q_2 \quad (1\ 2\ 3) \tag{9.9}$$

Уравнения (9.8), (9.9) допускают частное решение

$$q_i = u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad s_1 = s_3 = 0, \quad s_2 = 1 \tag{9.10}$$

соответствующее положению равновесия тела, при котором управляющие моменты отсутствуют, а направление одной из главных центральных осей инерции тела (оси x_2) совпадает с направлением вектора $\mathbf{s}$.

Рассмотрим задачу стабилизации положения равновесия (9.10) посредством u_i $(i = 1, 2, 3)$. Для этого, вводя новые переменные $q_i' = q_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $s_j' = s_j$ $(j = 1, 3)$, $s_2' = s_2 - 1$ и возвращаясь к исходным обозначениям, построим систему возмущенного движения

$$\begin{gathered} A_1 q_1^{\cdot} = (A_2 - A_3)\, q_2 q_3 + u_1 \quad (1\ 2\ 3) \\ s_1^{\cdot} = (s_2 + 1)\, q_3 - s_3 q_2 \triangleq \varphi_1, \quad s_2^{\cdot} = s_3 q_1 - s_1 q_3 \triangleq \varphi_2 \\ s_3^{\cdot} = s_1 q_1 - (s_2 + 1)\, q_1 \triangleq \varphi_3, \quad s_1^2 + (s_2 + 1)^2 + s_3^2 = 1 \end{gathered} \tag{9.11}$$

Полагая $\xi_i = q_i$, $\eta_i = s_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $m = 0$, $Y_1 = s_1^2 + (s_2 + 1)^2 + s_3^2 - 1$, можно проверить, что система (9.11) имеет структуру, совпадающую со структурой второй и третьей групп уравнений (2.1). Однако условие 1° теоремы 1 не выполняется. В то же время полагая

$$\xi_i = q_i \ (i = 1, 2, 3), \quad \eta_1 = s_1, \ \eta_2 = s_3, \quad \eta_3 = s_2$$

$$A_2 X_1^{(1)} = (A_3 - A_1)\, \xi_1 \xi_3, \qquad X_1^{(2)} = (\eta_2 + 1)\, \xi_3 - \eta_3 \xi_2, \qquad X_2^{(2)} = \eta_1 \xi_2 - (\eta_2 + 1)\, \xi_2$$

заключаем, что для системы (9.11) выполнены условия 1°, 2° теоремы 2.

Законы управления (9.3) в данном случае имеют вид

$$\begin{gathered} u_j = \frac{A_j (A_2 f_j + s_j u_2)}{A_2 (s_2 + 1)}, \quad j = 1, 3; \quad u_2 = A_2 (u_1^{\wedge} - \psi_2) \\ f_1 = f_1^* - u_1^{\wedge}, \quad f_3 = f_3^* + u_2^{\wedge} \\ f_j^* = \psi_2 s_j - \psi_j (s_2 + 1) + \varphi_j q_2 - \varphi_2 q_j, \quad j = 1, 3 \\ A_1 \psi_1 = (A_2 - A_3)\, q_2 q_3 \qquad (1\ 2\ 3) \end{gathered} \tag{9.12}$$

а вспомогательную систему (9.4), (9.5) составят уравнения $q_2^{\cdot} = u_1^{\wedge}$, $s_1^{\cdot\cdot} = u_2^{\wedge}$, $s_3^{\cdot\cdot} = u_3^{\wedge}$. Выбирая соответствующим образом $u_i^{\wedge}$ $(i = 1, 2, 3)$, заключаем, что невозмущенное движение системы (9.11), (9.12) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Отметим, что полученные законы управления могут решать, например, такую прикладную задачу, как стабилизация ориентации космического аппарата на межпланетных трассах при кратковременных сеансах ориентации [14], которая в ряде случаев сводится к рассмотренной задаче стабилизации положения равновесия твердого тела в инерциальном пространстве. Ряд других задач управления угловым движением твердого тела (в частности, переориентация и стабилизация на орбите) на основе предложенной методики исследования анализируются в [15, 16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475—514.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440—456.
3. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.

4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
7. *Воротников В. И.* О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3. С. 15—21.
8. *Воротников В. И.* Об оптимальной стабилизации движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 22—31.
9. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977, 263 с.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. I. II // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374—378; Т. 22. Вып. 4. С. 499—503.
13. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
14. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
15. *Воротников В. И.* О стабилизации ориентации гиростата на круговой орбите в ньютоновском поле сил // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 25—30.
16. *Воротников В. И.* Об управлении угловым движением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 38—43.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
22.VIII.1989