Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.36 : 534.1

Л. Д. Акуленко

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуется задача о приближенном приведении квазилинейной колебательной системы с медленно изменяющимися параметрами к эквивалентному в асимптотическом смысле виду линейной системы определенной структуры [1—3]. Предлагаются два подхода, основанные на промежуточных переменных «амплитуда — фаза» и оскулирующих переменных типа Ван дер Поля. Строится также эквивалентная линейная система с заданной степенью точности по малому параметру. В качестве примера рассматривается квазилинейный осциллятор [1—3].

Разработанный подход опирается на известные методы эквивалентной линеаризации [2—6] и представляет прикладной интерес, поскольку линейные уравнения могут быть подвергнуты исследованию стандартными методами. Особенно актуальна и важна адекватная линейная форма уравнений при анализе и синтезе систем автоматического управления, обладающих требуемым качеством переходных процессов [5—8].

1. Постановка задачи об эквивалентной линеаризации возмущенных систем гироскопического типа. Рассмотрим часто встречающуюся в механике квазилинейную колебательную систему, описываемую задачей Коши вида [7]

$$x^{\cdot} = \nu(\tau)\, y + \varepsilon f(\tau, x, y), \quad x(0) = x^{\circ}$$
$$y^{\cdot} = -\nu(\tau)\, x + \varepsilon g(\tau, x, y), \quad y(0) = y^{\circ} \tag{1.1}$$
$$0 < \nu_1 \leqslant \nu(\tau) \leqslant \nu_2 < \infty, \quad \tau = \varepsilon t + \tau_0;\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \ll 1$$
$$t \in [0, T(\varepsilon)], \quad T(\varepsilon) = \Theta\varepsilon^{-1}, \quad \Theta = \mathrm{const};\ \tau - \tau_0 \in [0, \Theta]$$

Здесь x, y — фазовые переменные, принадлежащие области определения и гладкости функций f, g; точки означают производные по времени t. Функция $\nu(\tau)$ имеет смысл и размерность частоты; в общем случае она, а также функции f, g могут зависеть от медленного времени τ; ε — малый числовой параметр, характеризующий малость возмущающих воздействий εf, εg и скорость изменения параметров ($\tau^{\cdot} = \varepsilon$). Постоянные величины x°, y°, τ_0 — начальные значения переменных x, y, τ — считаются заданными и принадлежащими области определения системы (1.1); Θ — сколь угодно большое, но фиксированное число. Таким образом, движение исследуется на асимптотически большом (при $\varepsilon \to 0$), но ограниченном интервале времени (см. далее).

Уравнения вида (1.1) часто встречаются в задачах динамики и управления вращениями твердого тела [2, 3, 7]. Например, x, y — проекции вектора кинетического момента или угловой скорости на экваториальную плоскость, ν — угловая скорость прецессии; зависимость ν от τ обычно вызывается плавным изменением осевой компоненты указанных векторов. Возмущающие моменты εf, εg могут быть обусловлены малыми внешними и внутренними воздействиями различной физической природы.

Ставится задача об эквивалентной линеаризации квазилинейной колебательной системы (1.1), т. е. такой замене переменных $x = x(x_1, y_1, \tau, \varepsilon)$, $y = y(x_1, y_1, \tau, \varepsilon)$, чтобы задача Коши для x_1, y_1 имела вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= p^x(\tau, \varepsilon)\, x_1 + q^y(\tau, \varepsilon)\, y_1, \quad x_1(0) = x_1^{\circ}(\varepsilon) \\ y_1^{\cdot} &= q^x(\tau, \varepsilon)\, x_1 + p^y(\tau, \varepsilon)\, y_1, \quad y_1(0) = y_1^{\circ}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.2}$$

При $\varepsilon = 0$ однородная система (1.2) должна вырождаться в систему простейшего вида $\xi^{\cdot} = \nu_0\eta$, $\eta^{\cdot} = -\nu_0\xi$, где $\nu_0 = \nu(\tau_0) = \text{const}$ и $\xi(0) = x^{\circ}$, $\eta(0) = y^{\circ}$; в такую систему вырождается исходная (1.1). Кроме того, требуется, чтобы переменные x_1, y_1 и x, y были близкими в асимптотическом смысле: $|x_1 - x| + |y_1 - y| = O(\varepsilon)$ для $t \in [0, T(\varepsilon)]$. Коэффициенты $p^{x,y}(\tau, \varepsilon)$, $q^{x,y}(\tau, \varepsilon)$ и $x_1^{\circ}(\varepsilon)$, $y_1^{\circ}(\varepsilon)$ неизвестны и подлежат определению.

Для решения задачи на физическом уровне строгости применялись методы оптимальной (в смысле минимума среднеквадратичного отклонения), энергетической и гармонической линеаризации, см., например, [1—6, 8] (принципы «энергетического» и «гармонического» баланса [2]). Эффективным математическим аппаратом построения эквивалентной линейной системы (1.2) определенной структуры (см. далее) является метод усреднения Крылова—Боголюбова—Митропольского [1—3], применяемый в данной работе. При помощи асимптотических методов нелинейной механики можно получить строгое математическое обоснование, т. е. сформулировать требования к системе (1.1) и дать оценку погрешности. Этот подход связан с заменами переменных и приведением системы к стандартной форме и усреднением уравнений [1—3, 7, 9]. После их решения совершается обратный переход, позволяющий получить уравнения движения в искомой форме (1.2).

Прежде чем перейти к построению линейной системы (1.2), эквивалентной исходной нелинейной системе (1.1), сделаем следующее замечание. Часто встречающаяся в приложениях стандартная колебательная система типа «квазилинейного осциллятора» с медленно изменяющимися параметрами

$$x^{\cdot\cdot} + \nu^2(\tau)\, x = \varepsilon h(\tau, x, x^{\circ}), \quad x(0) = x^{\circ}, \quad x^{\cdot}(0) = x^{\cdot\circ} \tag{1.3}$$

заменой $x^{\cdot} = \nu y$ приводится к частному виду системы (1.1) (функция $\nu(\tau)$ должна быть дифференцируемой)

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= \nu y, \quad x(0) = x^{\circ}, \quad y(0) = y^{\circ} = x^{\cdot\circ}\nu_0^{-1} \\ y^{\cdot} &= -\nu x - \varepsilon\nu'\nu^{-1}y + \varepsilon\nu^{-1}h(\tau, x, \nu(\tau)\, y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$(f(\tau, x, y) \equiv 0, \quad g(\tau, x, y) \equiv -\nu'\nu^{-1}y + \nu^{-1}h, \quad \nu = \nu(\tau))$$

И наоборот, при условии гладкости системы (1.1) стандартными приемами теории обыкновенных дифференциальных уравнений система (1.1) приводится к виду (1.3). В частности, если продифференцировать первое уравнение (1.1) по t, разрешить исходную систему относительно неизвестных y, $y^{\cdot}$ (например, при помощи процедуры последовательных приближений типа Пикара или метода касательных) и подставить полученные выражения в продифференцированное уравнение, получим уравнение вида (1.3) относительно x с функцией h, равной

$$\begin{gathered} h = h(\tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon) \equiv \nu'(\tau)\, y^* + \nu(\tau)\, g(\tau, x, y^*) + \varepsilon f_\tau^* + \\ + f_x^* x^{\cdot} + f_y^* y^{\cdot} \\ y = y^*(\tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon), \quad y^{\cdot} = y^{\cdot *}(\tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon) \equiv \\ \equiv -\nu(\tau)\, x + \varepsilon g(\tau, x, y^*(\tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon)) \\ x(0) = x^{\circ}, \quad x^{\cdot}(0) = x^{\cdot\circ} = \nu(\tau_0)\, y^{\circ} + \varepsilon f(\tau_0, x^{\circ}, y^{\circ}) \end{gathered}$$

Переменная $y = y^*$ определяется из первого уравнения (1.1) независимо от $y^{\cdot}$, а $y^{\cdot}$ явно находится из второго.

Далее рассматривается колебательная система вида (1.1).

2. Приведение к линейному виду в первом приближении по малому параметру. Осуществим эту процедуру двумя способами: 1) на основе переменных «амплитуда — фаза» r, ψ и 2) на основе оскулирующих переменных типа Ван дер Поля a, b.

1) Совершим необходимую замену исходных переменных x, y на новые r, ψ посредством соотношений

$$(x, y) \to (r, \psi):\ x = r\cos\psi, \quad y = -r\sin\psi \ (r \neq 0) \tag{2.1}$$

Как обычно [2, 9], дифференцируя выражения (2.1) в виду системы (1.1), для медленной переменной — амплитуды r и быстрой переменной — фазы ψ получим уравнения (задачу Коши) «стандартного вида с вращающейся фазой»

$$\begin{gathered} r^{\cdot} = \varepsilon R(\tau, r, \psi), \quad r(0) = r^\circ \equiv (x^{\circ 2} + y^{\circ 2})^{1/2} > 0 \\ \psi^{\cdot} = \nu(\tau) + \varepsilon\Psi(\tau, r, \psi), \quad \psi(0) = \psi^\circ \\ (\cos\psi^\circ = x^\circ/r^\circ, \ \sin\psi^\circ = -y^\circ/r^\circ) \\ R(\tau, r, \psi) \equiv f(\tau, x, y)\cos\psi - g(\tau, x, y)\sin\psi \\ \Psi(\tau, r, \psi) \equiv -r^{-1}[f(\tau, x, y)\sin\psi + g(\tau, x, y)\cos\psi] \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь подразумевается, что в функции f, g для переменных x, y подставлены их выражения согласно замене (2.1). Далее системе (2.2) поставим в соответствие усредненную (по ψ) систему первого приближения [1—3, 9, 10]:

$$\begin{gathered} \rho^{\cdot} = \varepsilon R_0(\tau, \rho), \quad \rho(0) = r^\circ \quad (R_0(\tau, r) \equiv \langle R(\tau, r, \psi)\rangle_\psi). \\ \varphi^{\cdot} = \nu(\tau) + \varepsilon\Psi_0(\tau, \rho), \quad \varphi(0) = \psi^\circ \quad (\Psi_0(\tau, r) \equiv \langle\Psi(\tau, r, \psi)\rangle_\psi) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Угловые скобки означают усреднение по фазе ψ.

В полученной системе (2.3) медленная переменная ρ отделяется от усредненной фазы φ. После интегрирования первого уравнения для амплитуды ρ, аналитического или численного, которое может быть проведено в медленном времени τ ($\rho' = d\rho/d\tau = R_0(\tau, \rho)$, $\rho(\tau_0) = r^\circ$), фаза φ находится квадратурой. Итак, предположим, что известно решение для ρ; имеем

$$\rho = \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ), \quad \varphi = \varphi^*(\tau, \tau_0, r^\circ, \psi^\circ, \varepsilon) \equiv \psi^\circ + \theta + \varphi_0 \tag{2.4}$$

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^{\tau} \nu(\sigma)\, d\sigma, \quad \varphi_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \Psi_0(\sigma, \rho^*(\sigma, \tau_0, r^\circ))\, d\sigma$$

При выполнении условия Липшица или дифференцируемости функций R, Ψ по r, ψ, т. е. соответственно функций f, g по x, y между решением

$$r = r^*(t, \tau_0, r^\circ, \psi^\circ, \varepsilon), \quad \psi = \psi^*(t, \tau_0, r^\circ, \psi^\circ, \varepsilon) \tag{2.5}$$

системы (2.2) и решением (2.4) системы (2.3) имеет место ε-близость на рассматриваемом асимптотически большом интервале времени (см. (1.1))

$$|r^* - \rho^*| + |\psi^* - \varphi^*| \leqslant c\varepsilon, \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}], \quad c = \text{const} \tag{2.6}$$

Из (2.6), (2.1) следует, что свойство ε-близости имеет место также для неизвестных исходных x, y и известных приближенных x_1, y_1 переменных

$$|x^* - x_1^*| + |y^* - y_1^*| \leqslant C\varepsilon, \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}], \quad C = \text{const}$$

$$x = x^* \equiv r^* \cos \psi^*, \quad y = y^* \equiv -r^* \sin \psi^*$$
$$x_1 = x_1^* \equiv \rho^* \cos \varphi^*, \quad y_1 = y_1^* \equiv -\rho^* \sin \varphi^*$$

Отметим аналитические свойства системы (2.3) по отношению к переменной ρ при достаточно малых $\rho > 0$. Поскольку, по предположению, функции f, g удовлетворяют условию Липшица или дифференцируемы по x, y в некоторой окрестности (0, 0): $x^2 + y^2 \leqslant d^2$, то для их коэффициентов Фурье по переменной ψ (после подстановки для x, y выражений (2.1)) справедливы оценки

$$|k_0(\tau, r)| \leqslant D, \quad |k_n^{c,s}(\tau, r)| \leqslant Dr; \ k = f, g \tag{2.7}$$
$$D = \text{const}, \quad \tau - \tau_0 \in [0, \Theta], \quad 0 \leqslant r \leqslant d, \ n = 1, 2, \ldots$$

Для усредненных функций R_0, Ψ_0 справедливы аналогичные оценки

$$|R_0(\tau, \rho)| \leqslant D\rho, \quad R_0(\tau, \rho) \equiv {}^1/_2 [f_1^c(\tau, \rho) - g_1^s(\tau, \rho)] \tag{2.8}$$
$$|\Psi_0(\tau, \rho)| \leqslant D, \quad \Psi_0(\tau, \rho) \equiv -{}^1/_2\rho^{-1} [f_1^s(\tau, \rho) + g_1^c(\tau, \rho)]$$

на основании которых можно утверждать, что система (2.3) удовлетворяет условиям существования и единственности решения (2.4).

Введем теперь новые переменные u, v, связанные с переменными ρ, φ соотношениями, аналогичными (2.1)

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = -\rho \sin \varphi \quad (\rho \geqslant 0) \tag{2.9}$$

Дифференцирование выражений (2.9) по t в силу уравнений (2.3) и исключение функций $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ согласно (2.9) приводит к нелинейным уравнениям для u, v определенной структуры

$$u^{\cdot} = \varepsilon pu + (\nu + \varepsilon q) v, \quad u(0) = x^\circ; \quad v^{\cdot} = -(\nu + \varepsilon q) u + {}$$
$$+ \varepsilon pv, \quad v(0) = y^\circ \tag{2.10}$$
$$\rho \equiv (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad p = p(\tau, \rho) \equiv \rho^{-1} R_0(\tau, \rho), \quad q = q(\tau, \rho) \equiv$$
$$\equiv \Psi_0(\tau, \rho)$$

(здесь и всюду далее $\nu = \nu(\tau)$).

Подставим в выражения для коэффициентов p, q (2.10) известное выражение $\rho = \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ)$ (2.4). Получим искомую линейную однородную систему с медленно изменяющимися параметрами также определенной структуры, характеризуемой двумя коэффициентами εp^* и $\nu + \varepsilon q^*$:

$$u_1^{\cdot} = \varepsilon p^* u_1 + (\nu + \varepsilon q^*) v_1, \quad u_1(0) = x^\circ$$
$$v_1^{\cdot} = -(\nu + \varepsilon q^*) u_1 + \varepsilon p^* v_1, \quad v_1(0) = y^\circ$$
$$p^* = p^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \equiv R_0(\tau, \rho^*)/\rho^*, \quad q^* = q^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \equiv$$
$$\equiv \Psi_0(\tau, \rho^*), \quad \rho^* = \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \tag{2.11}$$

Можно установить, что решение задачи Коши (2.10) $u = u^* \equiv \rho^* \cos \varphi^*$, $v = v^* \equiv -\rho^* \sin \varphi^*$ и решение задачи (2.11) $u_1 = u_1^*$, $v_1 = v_1^*$ совпадают.

Действительно, перейдем в системе (2.11) к переменным «амплитуда — фаза» ρ_1, φ_1 по формулам (2.9); получим уравнения: $\rho_1^{\cdot} = \varepsilon p^* \rho_1$, $\varphi_1^{\cdot} = \nu + \varepsilon q^*$ и условия: $\rho_1(0) = r^\circ$, $\varphi_1(0) = \psi^\circ$. Поскольку $\rho^{*\cdot} = \varepsilon R_0(\tau, \rho^*)$, то с учетом выражения p^* (2.11) получим отношение $d\rho_1/\rho_1 = d\rho^*/\rho^*$, из которого следует

$$\rho_1 = \rho_1^* \equiv r^\circ \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau} p^*(\sigma, \tau_0, r^\circ)\, d\sigma\right] \equiv \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \tag{2.12}$$

а также $\varphi_1 = \varphi_1^* \equiv \varphi^*$ (см. (2.4)).

Отметим, что (2×2) — матрица линейной системы — есть линейная комбинация единичной матрицы I и симплектической матрицы J; т. е. сумма $\varepsilon p^* I + (\nu + \varepsilon q^*) J$. Коэффициент εp^* определяет малую диссипацию (медленное изменение усредненной амплитуды колебаний ρ), а коэффициент $(\nu + \varepsilon q^*)$ — частоту (скорость изменения усредненной фазы φ). Характеристические показатели, отвечающие «замороженным коэффициентам» (фиксированному τ), таковы:

$$\lambda_{1,2}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon p^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \pm i\,[\nu + \varepsilon q^*(\tau, \tau_0, r^\circ)] \tag{2.13}$$

Далее, линейная задача Коши (2.11) с погрешностью $O(\varepsilon)$ описывает исходную задачу (1.1) на рассматриваемом асимптотически большом интервале времени $t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$ также в случае неточно, с погрешностью $O(\varepsilon)$, выбранных начальных условий: $u_1(0) = x^\circ + O(\varepsilon)$, $v(0) = y^\circ + O(\varepsilon)$ [9].

Отметим, что приведенный выше подход не всегда удобен с вычислительной точки зрения, поскольку выражения для Ψ и Ψ_0 имеют особенности, если переменные r и ρ существенно изменяются и могут принимать малые значения ($r, \rho \sim \varepsilon$). Для построения эквивалентной линейной системы в таком случае более предпочтителен предварительный переход к оскулирующим переменным типа Ван дер Поля a, b [2, 4, 7, 9].

2) Перейдем теперь от переменных (x, y) к переменным (a, b) посредством неособенной замены — линейным преобразованием «поворота»

$$(x, y) \underset{\theta}{\rightarrow} (a, b):\ x = a\cos\theta + b\sin\theta, \quad y = -a\sin\theta + b\cos\theta \tag{2.14}$$

Переменная θ определена в (2.4). Отметим, что вследствие соотношений (2.1), (2.14) между переменными r, ψ и a, b имеет место связь

$$\begin{gathered} a = r\cos(\psi - \theta), \quad b = -r\sin(\psi - \theta); \quad r^2 = a^2 + b^2 \\ \cos\psi = \cos(\theta - \delta), \quad \sin\psi = \sin(\theta - \delta) \\ \cos\delta = ar^{-1}, \quad \sin\delta = br^{-1} \quad (\psi = \theta - \delta, \mod 2\pi) \end{gathered} \tag{2.15}$$

Рутинная процедура приводит к задаче Коши для оскулирующих переменных a, b:

$$\begin{aligned} a^{\cdot} &= \varepsilon A(\tau, a, b, \theta), \quad A \equiv f\cos\theta - g\sin\theta, \quad a(0) = a^\circ = x^\circ \\ b^{\cdot} &= \varepsilon B(\tau, a, b, \theta), \quad B \equiv f\sin\theta + g\cos\theta, \quad b(0) = b^\circ = y^\circ \end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь в функции f, g представлены выражения (2.14) для x, y; θ — известная функция t, τ_0, ε (или τ, τ_0, ε), играющая роль вращающейся фазы. Стандартной системе (2.16) (заменами аргумента она сводится к стандартной по Боголюбову системе [1—3, 9], см. далее) ставится в соответствие усредненная по θ система первого приближения

$$\begin{gathered} \gamma' = C_0, \quad \gamma(\tau_0) = c^\circ; \quad C_0 = C_0(\tau, \alpha, \beta) \equiv \\ \equiv \langle C(\tau, \alpha, \beta, \theta)\rangle_\theta, \quad |C_0| \leqslant D(|\alpha| + |\beta|) \\ (\gamma = \alpha, \beta;\ c = a, b;\ C = A, B; \quad ' \equiv d/d\tau) \\ A_0 = {}^1/_2\,[f_1^c(\tau, \alpha, \beta) - g_1^s(\tau, \alpha, \beta)], \\ B_0 = {}^1/_2\,[f_1^s(\tau, \alpha, \beta) + g_1^s(\tau, \alpha, \beta)] \end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь $f_1^{c,s}$, $g_1^{c,s}$ — первые коэффициенты Фурье 2π-периодических по θ функций f, g (после подстановки x, y согласно (2.14)), см. (2.8), (2.9); например, $f_1^c = 2\langle f\cos\theta\rangle_\theta$; аналогично определяются f_1^s и $g_1^{c,s}$. В отличие от системы (2.3) уравнения для α, β (2.17) оказываются связанными. Однако в соответствии с соотношениями (2.15) они могут быть приведены к виду одного уравнения для ρ, которое необходимо проинтегрировать, и квадратуре для другой переменной, например δ (см. (2.4)).

Далее решение усредненной задачи Коши (2.17) можно проводить в медленном времени τ, $\tau - \tau_0 \in [0, \Theta]$ на относительно коротком интервале изменения аргумента аналитическими или численными методами. Будем считать его известным

$$\alpha = \alpha^* (\tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ), \quad \beta = \beta^* (\tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ) \tag{2.18}$$

От переменных α, β, описываемых системой (2.17), перейдем к переменным u, v по формулам, аналогичным (2.14), и после дифференцирования u, v в силу системы (2.17) исключим выражения $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Получим нелинейную, аналогичную (2.10), систему

$$u^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon p u + (\nu + \varepsilon q) v, \quad u(0) = a^\circ = x^\circ \tag{2.19}$$

$$v^{\boldsymbol{\cdot}} = -(\nu + \varepsilon q) u + \varepsilon p v, \quad v(0) = b^\circ = y^\circ$$

$$p = p(\tau, \alpha, \beta) = \frac{\alpha A_0 + \beta B_0}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad q = q(\tau, \alpha, \beta) = \frac{\beta A_0 - \alpha B_0}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$(u = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, \quad v = -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$$

Здесь переменные α, β должны быть выражены через u, v, θ согласно связи (2.19) посредством обратного поворота: $\alpha = u\cos\theta - v\sin\theta$, $\beta = u\sin\theta + v\cos\theta$. Отметим, что на основании оценок (2.17) для A_0, B_0 коэффициенты p, q в (2.19) ограничены при $\alpha^2 + \beta^2 \to 0$ $(u^2 + v^2 \to 0)$.

Заменим теперь в (2.19) медленные переменные α, β их известными выражениями α^*, β^* (2.18). Получим эквивалентную линейную однородную систему вида (2.11), в которой коэффициенты

$$p^* = p(\tau, \alpha^*, \beta^*), \quad q^* = q(\tau, \alpha^*, \beta^*) \tag{2.20}$$

— известные функции медленного времени τ и параметров задачи. Структуры линейных систем уравнений (2.11) с коэффициентами соответственно (2.11) и (2.20) совпадают, т. е. их матрицы — линейные комбинации единичной и симплектической матриц с коэффициентами εp^* и $\nu + \varepsilon q^*$. Это обстоятельство приводит к тем же «замороженным» характеристическим показателям (2.13).

Таким образом, вновь получена эквивалентная исходной (1.1) линейная система вида (2.11) с медленно изменяющимися коэффициентами (2.20). Как отмечалось выше, эквивалентность понимается в смысле ε-близости решений этих систем на асимптотически большом интервале времени $t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$ при условии ε-близости начальных условий. При выполнении условий равномерной по отношению к начальным условиям асимптотической устойчивости решений (предельных точек или циклов) усредненной системы (2.3) или (2.17) (см. [2, 9]) указанная близость, т. е. эквивалентность исходной и линеаризованной систем имеет место на неограниченном интервале времени $t \in [0, \infty)$, что представляет существенный интерес для анализа и синтеза систем автоматического регулирования [5—8].

3. Построение эквивалентной линейной системы с заданной степенью точности по малому параметру. Линейную систему будем строить на основе оскулирующих переменных a, b (2.14) согласно (2.16)—(2.18). Решение системы (2.16) требуется построить с заданной степенью точности ε^N $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ на асимптотически большом интервале времени

$t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, $\Theta = \text{const}$. Для этой цели можно воспользоваться процедурами, разработанными, например, в [2, 3, 7, 9—12]. Заметим, что введением аргумента θ по формуле $d\theta = \nu dt$, см. (2.4), и соответствующего ему медленного аргумента $\vartheta = \varepsilon\theta$ ($d\vartheta = \nu d\tau$, $\nu \geqslant \nu_1 > 0$) систему (2.16) можно привести к виду $z' = \varepsilon Z(\vartheta, z, \theta)$, где штрих означает производную по θ, а z, Z — двумерные векторы, и Z — 2π-периодична по θ. Расширяя вектор z, $z = (z_1, z_2, z_3)$ ($z_3 \equiv \tau$, $Z_3 \equiv 1$), получим стандартную по Боголюбову систему $z' = \varepsilon Z(z, \theta)$.

Указанное решение $(N+1)$-го приближения строится на основе общего решения α^*, β^* (2.18), см. [2, 7, 9, 12]; оно имеет вид

$$c = c(t, \tau_0, a^\circ, b^\circ, \varepsilon) = c_N + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{3.1}$$

$$c_N = c_N(\theta, \tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ, \varepsilon) = \gamma_N(\tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ, \varepsilon) + \\ + \varepsilon\delta_N^c(\theta, \tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ, \varepsilon); \quad c = a, b; \quad \gamma = \alpha, \beta$$

Здесь γ — функции медленного времени τ, регулярные относительно ε и описывающие плавные (усредненные) движения с погрешностью $O(\varepsilon^{N+1})$; при $N = 0$ $(\varepsilon = 0)$ они обращаются в γ^* (2.18). Добавки $\varepsilon\delta_N^c$ ($c = a, b$) — 2π-периодичны по θ; они учитывают малые быстрые осцилляции также с точностью $O(\varepsilon_N^c)$ и при $N = 0$ $(\varepsilon = 0)$ должны быть опущены. Далее функции γ, δ^N считаются известными.

Перейдем от переменных a_N, b_N к переменным u, v по формулам типа (2.19). Дифференцируя их по t, получим аналогичную квазилинейную систему

$$u^\cdot = \nu v + \varepsilon(\alpha_N' + \delta_N^{a^\cdot})\cos\theta + \varepsilon(\beta_N' + \delta_N^{b^\cdot})\sin\theta$$

$$v^\cdot = -\nu u - \varepsilon(\alpha_N' + \delta_N^{a^\cdot})\sin\theta + \varepsilon(\beta_N' + \delta_N^{b^\cdot})\cos\theta \tag{3.2}$$

$$\cos\theta = (a_N u + b_N v)(a_N^2 + b_N^2)^{-1}, \quad \sin\theta = (b_N u - a_N v)(a_N^2 + b_N^2)^{-1}$$

Используем теперь уравнения для медленных переменных для α_N, β_N, которые имеют вид [1—3, 7, 9—11]

$$\gamma_N' = C_0(\tau, \alpha_N, \beta_N) + \varepsilon C_{(N)}(\tau, \alpha_N, \beta_N, \varepsilon); \ \gamma = \alpha, \beta; \quad C = A, B \tag{3.3}$$

и приведем систему уравнений (3.2) к виду, мало отличающемуся от (2.11), (2.20)

$$u_N^\cdot = \varepsilon p^* u_N + (\nu + \varepsilon q^*) v_N + \varepsilon U_N, \quad u_N(0) = u_N^\circ$$

$$v_N^\cdot = -(\nu + \varepsilon q^*) u_N + \varepsilon p^* v_N + \varepsilon V_N, \quad v_N(0) = v_N^\circ \tag{3.4}$$

$$s^* = s^*(\tau, \tau_0, a^\circ, b^\circ), \quad s = p, q; \ W_N = W_N(\tau, \theta, \tau_0, a^\circ, b^\circ, \varepsilon), \quad W = U, V$$

Здесь εU_N, εV_N — малое внешнее 2π-периодическое по θ воздействие, определяемое через α_N, β_N, $A_{(N)}$, $B_{(N)}$ и $\delta_N^{a^\cdot}$, $\delta_N^{b^\cdot}$. Это возбуждение в первом приближении по ε не возмущают медленные переменные α, β. Таким образом, построена эквивалентная (1.1) линейная система (3.4), содержащая внешнее периодическое возмущение и аппроксимирующая решение $x^*(t, \tau_0, x^\circ, y^\circ, \varepsilon)$, $y^*(t, \tau_0, x^\circ, y^\circ, \varepsilon)$ с погрешностью $O(\varepsilon^{N+1})$ на асимптотически большом интервале времени $t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, если $u_N^\circ = x^\circ + O(\varepsilon^{N+1})$, $v_N^\circ = y^\circ + O(\varepsilon^{N+1})$.

4. Пример. Рассмотрим колебания квазилинейного осциллятора с медленно изменяющимися параметрами (1.3). При помощи изложенного в разд. 2 подхода получим две формы эквивалентных уравнений первого приближения с соответствующими выражениями для коэффициентов p, q и p^*, q^*. Согласно (1.4), (2.1)—(2.3), (2.8)—(2.11) имеем для первой формы представления коэффициентов (см. п. 1 разд. 2)

$$p = p(\tau, \rho) \equiv -\frac{\nu'}{2\nu} - \frac{h_s}{\nu\rho}, \quad p = p^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \equiv p(\tau, \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ)) \tag{4.1}$$

$$q = q(\tau, \rho) \equiv -\frac{h_c}{\nu\rho}, \quad q = q^*(\tau, \tau_0, r^\circ) \equiv q(\tau, \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ))$$

$$h_{c,s} = h_{c,s}(\tau, \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\tau, \rho\cos\varphi, -\nu(\tau)\rho\sin\varphi)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\varphi\, d\varphi, \quad r^\circ = \left(x^{\circ 2} + \frac{x^{\cdot 02}}{\nu_0^2}\right)^{1/2}$$

Во второй форме уравнений согласно (1.4), (2.14)—(2.20) (см. п. 2) разд. 2) имеем аналогичные выражения

$$p = p(\tau, \alpha, \beta) \equiv -\frac{\nu'}{2\nu} - \frac{1}{2\nu\rho^2}(\alpha h_1^{s} + \beta h_1^{c})$$

$$q = q(\tau, \alpha, \beta) \equiv -\frac{1}{2\nu\rho^2}(\beta h_1^{s} - \alpha h_1^{c}) \qquad (4.2)$$

$$p = p^*(\tau, \tau_0, x^\circ, y^\circ) \equiv p(\tau, \alpha^*, \beta^*), \quad q = q^*(\tau, \tau_0, x^\circ, y^\circ) \equiv q(\tau, \alpha^*, \beta^*)$$

$$h_1^{c,s} = h_1^{c,s}(\tau, \alpha, \beta) = 2h^{c,s}(\tau, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\tau, x, y)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\theta\, d\theta, \quad \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Приведем теперь эквивалентные системы первого приближения (2.10), (2.11) или (2.19), (2.20) к виду одного линейного «однородного» уравнения второго порядка (члены $O(\varepsilon^2)$ опускаются). Для определенности возьмем первую форму (2.10), (2.11), (4.1). Продифференцируем первое уравнение (2.10) по t, выразим v, $v^\cdot$ через u, $u^\cdot$, τ и подставим их в продифференцированное выражение. Получим искомые эквивалентные уравнения с погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$u^{\cdot\cdot} + \nu^2 u = -[2\varepsilon / (\nu\rho)]\,[h_s(\tau, \rho)\, u^\cdot - h_c(\tau, \rho)\, u] \qquad (4.3)$$

$$u_1^{\cdot\cdot} + \nu^2 u_1 = -[2\varepsilon / (\nu\rho)]\,[h_s(\tau, \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ))\, u^\cdot{}_1 - h_c(\tau, \rho^*(\tau, \tau_0, r^\circ))\, u], \quad \rho^2 = u^2 + u^{\cdot 2} / \nu^2$$

Коэффициенты при $u^\cdot$, $u_1^\cdot$ определяют эффективную «диссипацию», а при u, u_1 — «возвращающую силу». Аналогично получаются уравнения вида (4.3) на основе второй формы эквивалентных уравнений, см. (2.19), (2.20), (4.2).

Существенное отличие получающихся уравнений от известных в теории линейных колебательных систем заключается в том, что малые нелинейные возмущающие члены εh могут приводить и к появлению диссипации и к возрастанию эффективной частоты (см. выражения для p, p^* и q, q^* (4.1), (4.2) для осциллятора, а также общие формулы (2.10), (2.11) — (2.13), (2.19), (2.20)). Это свойство не присуще линейным системам. И наоборот, возрастание амплитуды колебаний (отрицательная диссипация) может приводить к уменьшению частоты. Отметим, что уравнение для переменной u, помимо члена $\nu(\tau)\, v$, содержит дополнительные малые слагаемые $O(\varepsilon)$, которые должны быть учтены в первом приближении. Как указывалось выше, получающиеся эквивалентные уравнения первого приближения, в отличие от исходных, имеют определенную структуру (определяются двумя коэффициентами), а также являются «однородными», т. е. имеют точку покоя в начале координат.

Отметим, что в случае полиномиальных по x, y или x, $x^\cdot$ возмущений f, g или h построение эквивалентных уравнений приводит к элементарным квадратурам от целых степеней тригонометрических функций вида $\cos^n\varphi\,\sin^m\varphi$ или $\cos^n\theta\,\sin^m\theta$ на промежутке $[0, 2\pi]$, а также к интегрированию усредненных уравнений первого приближения (2.3), (2.17), что может поотребовать определенных вычислительных затрат. Если усредненные уравнения не зависят от τ (для ρ или α, β), то интегрирование проводится в квадратурах; здесь могут также применяться методы интегрирования уравнений первого порядка. Классические уравнения типа Дуффинга, Ван дер Поля и многие другие [1—4, 9, 11] могут быть исследованы до конца. Подход оказывается достаточно эффективным и в более сложных случаях нелинейностей: типа сухого трения, люфта, петель гистерезиса, квадратичного трения и т. п. [2—6, 11]. Конечно, случаи негладких возмущений требуют соответствующего обоснования.

Полученные результаты непосредственно переносятся на системы вида (1.1) или (1.3), дополнительно содержащие медленный вектор z: $f = f(\tau, x, y, z)$, $g = g(\tau, x, y, z)$ или $h = h(\tau, x, x^\cdot, z)$, где $z^\cdot = \varepsilon Z(\tau, x, y, z)$ или $z^\cdot = \varepsilon Z(\tau, x, x^\cdot, z)$. При этом, однако, $\nu = \nu(\tau)$, т. е. зависимость ν от z не допускается, поскольку она может привести к так называемым существенно нелинейным системам, требующим дополнительного изучения.

Значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет развитие и обоснование подходов к построению эквивалентных линейных систем для интегродифференциальных уравнений, для существенно нелинейных систем и для многочастотных (многофазных) систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
4. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
5. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960. 792 с.
6. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 583 с.
7. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
8. *Сидоров И. М., Тимофеев В. В.* Многочастотные колебания в нелинейных системах управления. М.: Наука, 1984. 248 с.
9. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
10. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for nonlinear differential equations // J. Mec. 1969. V. 8. N 3. P. 357—372.
11. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
12. *Акуленко Л. Д.* Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 771—777.

Москва

Поступила в редакцию
9.X.1989