Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.36

В. В. Сазонов

О ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТ БОЛЬШОГО ПАРАМЕТРА

Рассматриваются дифференциальные уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы, содержащие большой параметр μ. Параметр характеризует потенциальные силы, действующие в системе по некоторым ее обобщенным координатам. Доказывается существование решений этих уравнений, определенных на интервале времени длины $\sim\mu^a$ $(0 < a < 1/3)$ и переходящих при $\mu \to +\infty$ в решение вырожденных уравнений, получающихся из исходных при $\mu = \infty$. Доказательство проведено в предположении, что порождающее решение устойчиво в первом приближении, частоты быстрых колебаний системы постоянны и выполнен еще ряд громоздко формулируемых ограничений.

Уравнения рассматриваемого в статье вида ранее изучались в рамках задачи о реализации идеальных связей с помощью больших упругих сил. При менее жестких условиях были получены аналогичные результаты, но для интервала времени, длина которого $\mu \to +\infty$ остается ограниченной.

1. Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается уравнениями Лагранжа следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_j^{\cdot}}\frac{\partial T^*}{\partial q_j} = -\mu^2\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j \quad (j = 1, \ldots, l)$$

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{l} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, q_i^{\cdot} q_k^{\cdot} + \sum_{i=1}^{l} a_i(t, q_1, \ldots, q_l)\, q_i^{\cdot} + a_0(t, q_1, \ldots, q_l) \tag{1.1}$$

$$\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n), \quad Q_j = Q_j(t, q_1, \ldots, q_l, q_1^{\cdot}, \ldots, q_l^{\cdot})$$

Здесь μ — положительный параметр, $1 \leqslant n \leqslant l$, матрица $(a_{ik})_{i,\,k=1}^{l}$ в выражении для T^* симметрична и положительна определена. Исследуем поведение одного класса решений уравнений (1.1) при $\mu \to +\infty$. Чтобы дать точную постановку задачи, перейдем в (1.1) к переменным Рауса q_j, $q_j^{\cdot}$, q_α, $p_\alpha = \partial T^*/\partial q_\alpha^{\cdot}$ $(j = 1, \ldots, n;\ \alpha = n+1, \ldots, l)$. Введя векторы $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$, $x = (g_{n+1}, p_{n+1}, \ldots, q_l, p_l)^T$ и определив нужным образом симметричную положительно определенную матрицу $A_0(q)$ порядка n и функции $F(t, x, q, q^{\cdot}) \in R^{2(l-n)}$, $f(t, x, q, q^{\cdot}) \in R^n$, уравнения Рауса рассматриваемой механической системы можно записать в виде

$$x^{\cdot} = F(t, x, q, q^{\cdot}), \quad A_0(q)\, q^{\cdot\cdot} + \mu^2 \partial\Pi(q)/\partial q = f(t, x, q, q^{\cdot}) \tag{1.2}$$

Выписанные уравнения представляют самостоятельный интерес, поскольку уравнения движения некоторых механических систем приводятся к виду (1.2) без использования переменных Рауса. Ниже уравнения (1.2) будем рассматривать вне связи с уравнениями (1.1). Полагаем, что в (1.2) x и $F \in R^m$ $(m \geqslant 0)$, q и $f \in R^n$ $(n \geqslant 1)$, $\Pi \in R^1$, $A_0(q)$ — симметричная положительно определенная матрица порядка n; $\Pi(q)$, $A_0(q)$, $f(t, x, q, q^{\cdot})$ и $F(t, x, q, q^{\cdot})$ будем считать достаточно гладкими функциями своих аргументов, т. е. имеющими все необходимые для последующего анализа производные. Полагаем также, что $\partial\Pi(0)/\partial q = 0$ и матрица $\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$ положительно определена.

Систему

$$x^{\cdot} = F(t, x, 0, 0) \tag{1.3}$$

назовем вырожденной. Пусть она имеет решение $x = \varphi(t)$, определенное на интервале $0 \leqslant t < +\infty$. Ниже при некоторых условиях доказывается предложение: для любых чисел $C_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $L > 0$ и $a \in (0, {}^1/_3)$ существуют такие положительные постоянные M, C_4, C_5 и C_6, что при любом $\mu \geqslant M$ решение системы (1.2) $x(t, \mu)$, $q(t, \mu)$ с начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам $\| x(0, \mu) - \varphi(0) \| \leqslant C_1\mu^{-1}$, $\| q(0, \mu) \| \leqslant C_2\mu^{-2}$ и $\| q^{\cdot}(0, \mu) \| \leqslant C_3\mu^{-1}$, определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$ и удовлетворяет на нем оценкам $\| x(t, \mu) - \varphi(t) \| \leqslant C_4\mu^{a-1}$, $\| q(t, \mu) \| \leqslant C_5\mu^{-2}$, $\| q^{\cdot}(t, \mu) \| \leqslant C_6\mu^{-1}$. Здесь $\| \ \|$ — евклидова норма.

Уравнения для x в системе (1.2) может не быть $(m = 0)$. В этом случае рассматриваются второе уравнение (1.2), в правую часть которого вектор x не входит, и его решение $q(t, \mu)$ с начальными условиями $\| q(0, \mu) \| \leqslant C_1\mu^{-2}$, $\| q^{\cdot}(0, \mu) \| \leqslant C_2\mu^{-1}$. При $\mu \geqslant M$ доказывается существование таких решений на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$ и выполнение для них оценок $q(t, \mu) \| \leqslant C_3\mu^{-2}$, $\| q^{\cdot}(t, \mu) \| \leqslant C_4\mu^{-1}$. Числа C_1, C_2, $L \in (0, +\infty)$ и $a \in (0, {}^1/_3)$ задаются произвольно, числа M, C_3, $C_4 \in (0, +\infty)$ находятся в функции C_1, C_2, L и a. Исследование указанного уравнения получается из исследования системы (1.2) опусканием пунктов, относящихся к вектору x, и поэтому не приводится.

2. Для построения искомых решений системы (1.2) необходимо выполнить вспомогательные преобразования, аналогичные применявшимся в [1]. Сначала опишем эти преобразования формально, а затем сформулируем накладываемые на них условия. В системе (1.2) сделаем замену неизвестной $x = \varphi(t) + \xi$ и умножим ее второе уравнение слева на $A_0^{-1}(q)$. В получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены, линейные относительно ξ, q и $q^{\cdot}$. В результате будем иметь

$$\xi^{\cdot} = A(t)\,\xi + F_1(t, \xi, q, q^{\cdot}) \tag{2.1}$$

$$q^{\cdot\cdot} + \mu^2\Lambda q = B(t)\,\xi + C(t)\,q^{\cdot} + f_1(t, \xi, q, q^{\cdot}) + \mu^2 h_1(q)$$

$$A(t) = \partial F(t, \varphi(t), 0, 0)/\partial x, \quad B(t) = A_0^{-1}(0)\,\partial f(t, \varphi(t), 0, 0)/\partial x$$

$$C(t) = A_0^{-1}(0)\,\partial f(t, \varphi(t), 0, 0)/\partial q^{\cdot}, \quad \Lambda = A_0^{-1}(0)\,\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$$

причем при ξ, q, $q^{\cdot} \to 0$ справедливы оценки

$$F_1(t, \xi, q, q^{\cdot}) = O(\| q \| + \| q^{\cdot} \| + \| \xi \|^2), \quad h_1(q) = O(\| q \|^2)$$

$$f_1(t, \xi, q, q^{\cdot}) - f_1(t, 0, 0, 0) = O(\| q \| + \| q^{\cdot} \|^2 + \| \xi \|^2)$$

Так как матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$ симметричны и положительно определены, соответствующие им квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду. Иными словами, существует невырожденная матрица S порядка n, такая, что

$$S^T A_0(0)\, S = E_n$$

$$S^T(\partial^2\Pi(0)/\partial q^2)\, S = \operatorname{diag}(\omega_1^2 E_{n_1}, \ldots, \omega_r^2 E_{n_r}) \tag{2.2}$$

$$n_j > 0 \ (j = 1, \ldots, r), \ n_1 + n_2 + \ldots + n = n, \ 0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots$$

$$\ldots < \omega_r$$

Здесь E_k — единичная матрица порядка k. Сделав в (2.1) замену неизвестной $q \to Sq$, будем считать, что матрица Λ в этой системе совпадает с правой частью второй формулы (2.2).

Последующие преобразования служат для упрощения линейных членов системы (2.1). Подстановка $q = z + \mu^{-2}\Lambda^{-1}B(t)\xi$ приводит эту систему к виду

$$\xi^{\cdot} = A(t)\xi + F_2(t, \xi, z, z^{\cdot}, \mu) \tag{2.3}$$
$$z^{\cdot\cdot} + \mu^2\Lambda z = C(t)z^{\cdot} + f_2(t, \xi, z, z^{\cdot}, \mu) + \mu^2 h_1(z)$$

где при $\xi, z, z^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$ имеем

$$F_2(t, \xi, z, z^{\cdot}, \mu) = O(\|z\| + \|z^{\cdot}\| + \mu^{-2}\|\xi\| + \|\xi\|^2)$$
$$f_2^{\circ}(t, \mu) = O(1), \quad f_2(t, \xi, z, z^{\cdot}, \mu) - f_2^{\circ}(t, \mu) =$$
$$= O[\|z\| + \mu^{-2}(\|\xi\| + \|z^{\cdot}\|) + \|\xi\|^2 + \|z^{\cdot}\|^2]$$

Здесь и ниже для произвольной функции $g(t, \cdot, \cdot, \cdot, \mu)$ обозначается $g^{\circ}(t, \mu) = g(t, 0, 0, 0, \mu)$. В результате сделанной подстановки из второго уравнения исследуемой системы исчез член $B(t)\xi$.

Следующее преобразование служит для упрощения члена $C(t)z^{\cdot}$. Введем вместо z новую неизвестную

$$u = z + \mu^{-2}D(t)z^{\cdot} \tag{2.4}$$

Явный вид матрицы $D(t)$ будет указан ниже. Дифференцируя соотношение (2.4) дважды по t в силу системы (2.3), получим

$$u^{\cdot} = -D\Lambda z + [E_n + \mu^{-2}(D^{\cdot} + DC)]z^{\cdot} + D(h_1 + \mu^{-2}f_2) \tag{2.5}$$
$$u^{\cdot\cdot} = -\mu^2\Lambda z + (C - D\Lambda)z^{\cdot} + f_2'(t, \xi, z, z^{\cdot}, \mu) + \mu^2 h_1 \tag{2.6}$$

Для функции f_2' в (2.6) при $\xi, z, z^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$ справедливы те же оценки, что и для функции f_2 в (2.3). Разрешив соотношения (2.4), (2.5) относительно z и $z^{\cdot}$, найдем

$$z = u - \mu^{-2}D\{u^{\cdot} + D[\Lambda u - h_1(u)]\} + O(\mu^{-4})$$
$$z^{\cdot} = u^{\cdot} + D[\Lambda u - h_1(u)] + O(\mu^{-2})$$

Подставив полученные выражения в (2.6) и первое уравнение (2.3), придем к системе

$$\xi^{\cdot} = A(t)\xi + F_3(t, \xi, u, u^{\cdot}, \mu) \tag{2.7}$$
$$u^{\cdot\cdot} + \mu^2\Lambda u = C'(t)u^{\cdot} + f_3(t, \xi, u, u^{\cdot}, \mu) + \mu^2 h_1(u)$$

Здесь

$$C'(t) = C(t) + \Lambda D(t) - D(t)\Lambda \tag{2.8}$$

и при $\xi, u, u^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$ справедливы оценки

$$F_3^{\circ}(t, \mu) = O(\mu^{-2}), \quad F_3(t, \xi, u, u^{\cdot}, \mu) - F_3^{\circ}(t, \mu) =$$
$$= O(\|u\| + \|u^{\cdot}\| + \mu^{-2}\|\xi\| + \|\xi\|^2)$$

Оценки f_3 получаются из оценок f_2 заменой $z \to u$, $z^{\cdot} \to u^{\cdot}$.

Опишем построение матрицы D. Матрицы C, C' и D представим в блочной форме, причем разбиение на блоки возьмем такое же, как во второй формуле (2.2): $C = (C_{jk})_{j,k=1}^{r}$, $C' = (C_{jk}')_{j,k=1}^{r}$, $D = (D_{jk})_{j,k=1}^{r}$. Здесь C_{jk}, C_{jk}' и D_{jk} — матрицы размером $n_j \times n_k$. Соотношение (2.8) можно записать в виде

$$C_{jk}' = C_{jk} + (\omega_j^2 - \omega_k^2)D_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, r)$$

Матрицу $D(t)$ определим формулами: $D_{jk} = (\omega_k^2 - \omega_j^2)^{-1}C_{jk}$ при $j \neq k$ и $D_{jj} = 0$. В таком случае

$$C'(t) = \operatorname{diag}(C_{11}, \ldots, C_{rr})$$

Рассмотрим линейные системы

$$u_j^{\cdot} = 1/2C_{jj}(t)\,u_j, \quad u_j \in R^{n_j}, \quad 0 \leqslant t < +\infty \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.9}$$

Будем считать, что они приводимы по Ляпунову [2], т. е. существуют замены переменных $u_j = \Psi_j(t)\,y_j$, где $\Psi_j(t)$ — матрицы Ляпунова и $y_j \in R^{n_j}$, преобразующие эти системы в системы $y_j^{\cdot} = H_j y_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ с постоянными матрицами. Положим

$$\Psi(t) = \operatorname{diag}(\Psi_1(t), \ldots, \Psi_r(t)), \quad H = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_r) \tag{2.10}$$

Замена неизвестной $u = \Psi(t)\,y$ переводит (2.7) в систему

$$\xi^{\cdot} = A(t)\,\xi + F_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) \tag{2.11}$$
$$y^{\cdot\cdot} - 2Hy^{\cdot} + (\mu^2\Lambda + H^2)\,y = f_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) + \mu^2 h_2(t, y)$$

в которой функции F_4, f_4 и h_2 при $\xi, y, y^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$ удовлетворяют оценкам, аналогичным оценкам функций F_3, f_3 и h_1 при $\xi, u, u^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$.

Теперь относительно уравнений (1.2) и выполненных преобразований сделаем еще ряд предположений. Система

$$\xi^{\cdot} = A(t)\,\xi \tag{2.12}$$

является системой уравнений в вариациях для решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1.3). Обозначим через $\Phi_0(t, s)$ фундаментальную матрицу решений системы (2.12) с начальным условием $\Phi_0(s, s) = E_m$. Предположим, что эта матрица ограничена на множестве $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$. Предположим также, что собственные числа матриц H_j $(j = 1, \ldots, r)$ имеют неположительные вещественные части, причем собственные числа, лежащие на мнимой оси, имеют простые элементарные делители.

В силу оценок, которым удовлетворяют функции F_4, f_4 и h_2 в (2.11- при $\xi, y, y^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$, для любого $t \geqslant 0$ существуют такие положительные числа δ, K и M_1, что при всех μ, ξ, η $(\eta \in R^m)$, $y, y^{\cdot}, u, u^{\cdot}$, удовлетворяющих неравенствам $\mu \geqslant M_1$, $\max(\|\xi\|, \|\eta\|, \|y\|, \|y^{\cdot}\|, \|u\|, \|u^{\cdot}\|) \leqslant \delta$ имеем

$$\|F_4^{\circ}(t, \mu)\| \leqslant K\mu^{-2}, \quad \|d^m f_4^{\circ}(t, \mu)/dt^m\| \leqslant K \quad (m = 0, 1, 2) \tag{2.13}$$

$$\|F_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - F_4^{\circ}(t, \mu)\| \leqslant K(\|y\| + \|y^{\cdot}\| + \mu^{-2}\|\xi\| + \|\xi\|^2) \tag{2.14}$$

$$\|f_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - f_4^{\circ}(t, \mu)\| \leqslant K[\|y\| + \mu^{-2}(\|y^{\cdot}\| + \|\xi\|) + \|y^{\cdot}\|^2 + \|\xi\|^2], \quad \|h_2(t, y)\| \leqslant K\|y\|^2$$

$$\|F_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - F_4(t, \eta, u, u^{\cdot}, \mu)\| \leqslant K(\alpha_0\beta + \alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\|f_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - f_4(t, \eta, u, u^{\cdot}, \mu)\| \leqslant K[\alpha_1 + \beta(\alpha_0 + \alpha_2)] \tag{2.15}$$
$$\|h_2(t, y) - h_2(t, u)\| \leqslant K\alpha_1(\|y\| + \|u\|)$$
$$\alpha_0 = \|\xi - \eta\|, \quad \alpha_1 = \|y - u\|, \quad \alpha_2 = \|y^{\cdot} - u^{\cdot}\|$$
$$\beta = \|\xi\| + \|\eta\| + \|y\| + \|u\| + \|y^{\cdot}\| + \|u^{\cdot}\| + \mu^{-2}$$

Будем считать, что обладающие указанными свойствами числа δ, K и M_1 можно выбрать независящими от t при $t \geqslant 0$. Иными словами, оценки (2.13)—(2.15) выполняются равномерно по t на интервале $0 \leqslant t < +\infty$. При сделанных предположениях справедлива

Теорема. Для любых чисел $L > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ и $a \in (0, {}^1/_3)$ существуют такие положительные постоянные M, B_3 и B_4, что при любом $\mu \geqslant M$ решении системы (2.11) $\xi(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ с начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$\|\xi(0, \mu)\| \leqslant B_1\mu^{-1}, \quad \|y(0, \mu)\| \leqslant B_2\mu^{-2}, \quad \|y^{\cdot}(0, \mu)\| \leqslant B_2\mu^{-1}$$

определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$ и удовлетворяет на нем оценкам

$$\| \xi (t, \mu) \| \leqslant B_3 \mu^{a-1}, \quad \| y (t, \mu) \| \leqslant B_4 \mu^{-2}, \quad \| y^{\cdot} (t, \mu) \| \leqslant B_4 \mu^{-1} \tag{2.16}$$

Замечания. 1° Если дополнительно к сделанным предположениям потребовать, чтобы матрицы $B(t)\, \mu^{a-1}$ и $D(t)\, \mu^{-1}$ были ограниченными функциями t и μ при $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$, $\mu \geqslant M$, то из теоремы следует справедливость сформулированного в п. 1 предложения о существовании решений системы (2.2), близких порождающему решению $x = \varphi(t)$, $q = 0$.

2° При формулировке теоремы относительно сделанных преобразований предполагались выполненными три основных условия: 1) о приводимости по Ляпунову систем (2.9) к системам с постоянными устойчивыми матрицами, 2) об устойчивости системы (2.12), т. е. об устойчивости в линейном приближении решения $x = \varphi(t)$ вырожденной системы (1.3), 3) о специальных равномерных оценках функций F_4, f_4 и h_2 при $\xi, y, y^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$. Рассмотрим проверку выполнения этих условий в простых ситуациях. Пусть, например, обобщенные силы Q_j $(j = 1, \ldots, l)$ в уравнениях (1.1) потенциальны. Не ограничивая общности, можно считать, что матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2 \Pi(0)/\partial q^2$ совпадают с правыми частями формул (2.2). Тогда в (2.3) $C^T(t) = -C(t)$. Используя последнее соотношение, можно доказать, что фундаментальные матрицы $X_j(t)$ систем (2.9) с начальными условиями $X_j(0) = E_{n_j}$ ортогональны: $X_j^{-1}(t) = X_j^T(t)$. В этом случае в (2.10) можно взять $\Psi_j(t) = X_j(t)$, $H_j = 0$. Таким образом, существует содержательный класс механических систем, удовлетворяющих условию 1). Пусть теперь система (1.2) и решение $\varphi(t)$ являются периодическими. Тогда условие 3) и условие замечания 1° выполняются тривиально, а проверка условий 1) и 2) упрощается.

Вообще, все три условия введены для обеспечения возможности исследования решений системы (2.11) на интервалах времени произвольной длины. Если, например, система (2.12) или одна из систем (2.9) экспоненциально неустойчива, то оценки (2.16 при $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$, $\mu \to +\infty$ невозможны. В этой связи интересно сравнить сформулированную выше теорему с результатами работ [3, 4]. Теоремы [3, 4] гарантируют существование решений системы (2.2), близких порождающему решению $x = \varphi(t)$, $q = 0$, при гораздо менее ограничительных условиях, но на отрезке времени, длина которого остается ограниченной при $\mu \to +\infty$.

3. Приведем некоторые соотношения, используемые при доказательстве теоремы. Рассмотрим начальную задачу $\xi(0) = \xi_0$ для отвечающей первому уравнению (2.11) линейной неоднородной системы

$$\xi^{\cdot} = A(t)\, \xi + F(t) \tag{3.1}$$

С помощью введенной выше матрицы $\Phi_0(t, s)$ решение такой задачи можно представить в виде

$$\xi(t) = \Phi_0(t, 0)\, \xi_0 + \int \Phi_0(t, s)\, F(s)\, ds \tag{3.2}$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется на отрезке $[0, t]$.

Нормой векторной функции $f(t)$, непрерывной на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, будем называть число $\nu_T(f) = \max \| f(t) \|$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Поскольку матрица $\Phi_0(t, s)$ ограничена на множестве $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$, для нормы решения (3.2) при любом $T \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\nu_T(\xi) \leqslant N_0 (\| \xi_0 \| + T \nu_T(F)), \quad N_0 = \text{const} > 0 \tag{3.3}$$

Решение начальной задачи $y(0) = y_0$, $y^{\cdot}(0) = y_0^{\cdot}$ для отвечающей второму уравнению (2.11) линейной системы

$$y^{\cdot\cdot} - 2Hy^{\cdot} + (\mu^2 \Lambda + H^2)\, y = f(t) \tag{3.4}$$

можно записать в виде

$$y(t) = \Phi_1(t)\, y_0 + \Phi_2(t)\, y_0^{\cdot} + \int \Phi_2(t - s)\, f(s)\, ds \tag{3.5}$$

$$\Phi_1(t) = \operatorname{diag} \left[\left(E_{n_j} \cos \mu\omega_j t - H_j \frac{\sin \mu\omega_j t}{\mu\omega_j} \right) e^{H_j t} \right]_{j=1}^{r}$$

$$\Phi_2(t) = \operatorname{diag} \left(\frac{\sin \mu\omega_j t}{\mu\omega_j} e^{H_j t} \right)_{j=1}^{r}$$

Производная этого решения представляется формулой

$$y^{\cdot}(t) = \Phi_1^{\cdot}(t)\, y_0 + \Phi_2^{\cdot}(t)\, y_0^{\cdot} + \int \Phi_2^{\cdot}(t-s)\, f(s)\, ds \tag{3.6}$$

В силу устойчивости матриц H_j $(j = 1, \ldots, r)$ можно выбрать такое положительное число N_1, что при любых $T \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 1$ для нормы решения (3.5) в случае $y_0 = 0$, $y_0^{\cdot} = 0$ и производной этого решения имеют место оценки

$$\nu_T(y) \leqslant \mu^{-1} N_1 T \nu_T(f), \quad \nu_T(y^{\cdot}) \leqslant N_1 T \nu_T(f) \tag{3.7}$$

Если в (3.4) функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, то сделав в рассматриваемой начальной задаче замену неизвестной $y = z + \mu^{-2}\Lambda^{-1} f(t)$ и применив к преобразованной задаче формулы (3.5) и (3.6), получим для y и $y^{\cdot}$ выражения, содержащие кроме f еще $f^{\cdot}$ и $f^{\cdot\cdot}$. Из этих выражений следует существование такого положительного числа N_2, что для нормы решения (3.5) и его производной при любых $T \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 1$ справедливы оценки

$$\nu_T(y) \leqslant N_2 R, \quad \nu_T(y^{\cdot}) \leqslant \mu N_2 R \tag{3.8}$$

$$R = \| y_0 \| + \mu^{-1} \| y_0^{\cdot} \| + \mu^{-2} \nu_T(f) + \mu^{-3} \{ \nu_T(f^{\cdot}) + T [\nu_T(f) + \nu_T(f^{\cdot}) + \nu_T(f^{\cdot\cdot})] \}$$

4. Начальная задача $\xi(0) = \xi_0^*$, $y(0) = y_0^*$, $y^{\cdot}(0) = y_0^{\cdot *}$ для системы (2.11) эквивалентна интегральным уравнениям

$$\begin{gathered}
\xi(t) = \Phi_0(t, 0)\, \xi_0^* + \int \Phi_0(t, s)\, F_4[s, \xi(s), y(s), z(s), \mu]\, ds \equiv \\
\equiv L_0(\xi, y, z) \\
y(t) = \Phi_1(t)\, y_0^* + \Phi_2(t)\, y_0^{\cdot *} + \int \Phi_2(t-s)\, \{ f_4[s, \xi(s), y(s), \\
z(s), \mu] + \mu^2 h_2[s, y(s)] \}\, ds \equiv L_1(\xi, y, z) \\
z(t) = \Phi_1^{\cdot}(t)\, y_0^* + \Phi_2^{\cdot}(t)\, y_0^{\cdot *} + \int \Phi_2^{\cdot}(t-s)\, \{ f_4[s, \xi(s), y(s), \\
z(s), \mu] + \mu^2 h_2[s, y(s)] \}\, ds \equiv L_2(\xi, y, z)
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $z = y^{\cdot}$, $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$, L и a — произвольные числа из интервалов $(0, +\infty)$ и $(0, 1/3)$. Уравнения (4.1) будем решать методом последовательных приближений. Построим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\mu^a$ последовательности функций $\xi_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, положив

$$\begin{gathered}
\xi_0(t) \equiv 0, \quad y_0(t) \equiv 0, \quad z_0(t) \equiv 0 \\
\xi_{k+1} = L_0(\xi_k, y_k, z_k), \quad y_{k+1} = L_1(\xi_k, y_k, z_k) \\
z_{k+1} = L_2(\xi_k, y_k, z_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Докажем, что при достаточно малых $\| \xi_0^* \|$, $\| y_0^* \|$, $\| y_0^{\cdot *} \|$ и μ^{-1} эти последовательности сходятся к решению уравнений (4.1). Для определенности будем считать, что $\xi_0^* = \xi_0^*(\mu)$, $y_0^* = y_0^*(\mu)$ и $y_0^{\cdot *} = y_0^{\cdot *}(\mu)$ — непрерывные функции μ на интервале $1 \leqslant \mu < +\infty$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| \xi_0^* \| \leqslant B_1 \mu^{-1}, \quad \| y_0^* \| \leqslant B_2 \mu^{-2}, \quad \| y_0^{\cdot *} \| \leqslant B_2 \mu^{-1} \tag{4.3}$$

Здесь B_1 и B_2 — положительные постоянные.

Сначала докажем существование таких положительных чисел M_2, B_3 и B_4, что при $\mu \geqslant M_2$ справедливы оценки

$$\nu(\xi_k) \leqslant B_3 \mu^{a-1} \leqslant \delta, \quad \nu(y_k) \leqslant B_4 \mu^{-2} \leqslant \delta, \quad \nu(z_k) \leqslant B_4 \mu^{-1} \leqslant \delta \tag{4.4}$$

Здесь и далее для сокращения записи в обозначении нормы $\nu_T(\cdot)$ опущен индекс $T = L\mu^a$.

Поскольку

$$\xi_1(t) = \Phi_0(t, 0)\,\xi_0^* + \int \Phi_0(t, s)\, F_4^\circ(s, \mu)\, ds \tag{4.5}$$

$$y_1(t) = \Phi_1(t)\, y_0^* + \Phi_2(t)\, y_0^{\cdot *} + \int \Phi_2^\cdot(t - s)\, f_4^\circ(s, \mu)\, ds$$

$$z_1(t) = \Phi_1^\cdot(t)\, y_0^* + \Phi_2^\cdot(t)\, y_0^{\cdot *} + \int \Phi_2^\cdot(t - s)\, f_4^\circ(s, \mu)\, ds$$

соотношения (4.2) при $k \geqslant 1$ можно представить в виде

$$\xi_{k+1}(t) = \xi_1(t) + \int \Phi_0(t, s)\, \{F_4[s, \xi_k(s), y_k(s), z_k(s), \mu] - F_4^\circ(s, \mu)\}\, ds$$

$$y_{k+1}(t) = y_1(t) + \int \Phi_2(t - s)\, \{f_4[s, \xi_k(s), y_k(s), z_k(s), \mu] - f_4^\circ(s, \mu) + \mu^2 h_2[s, y_k(s)]\}\, ds$$

Выражение для $z_{k+1}(t)$ получается из последней формулы заменой $y_{k+1} \to z_{k+1}$, $y_1 \to z_1$, $\Phi_2 \to \Phi_2^\cdot$.

Предположим, что $\nu(\xi_k) \leqslant \delta$, $\nu(y_k) \leqslant \delta$, $\nu(z_k) \leqslant \delta$. Тогда при $\mu \geqslant \max(1, M_1)$ в всилу неравенств (2.14), (3.3) и (3.7) будем иметь

$$\nu(\xi_{k+1}) \leqslant \nu(\xi_1) + KLN_0\mu^a[\nu(y_k) + \nu(z_k) + \mu^{-2}\nu(\xi_k) + \nu^2(\xi_k)] \tag{4.6}$$

$$\nu(y_{k+1}) \leqslant \nu(y_1) + KLN_1\mu^{a-1}R_k, \quad \nu(z_{k+1}) \leqslant \nu(z_1) + KLN_1\mu^a R_k$$

$$R_k = \nu(y_k) + \mu^{-2}[\nu(z_k) + \nu(\xi_k)] + \nu^2(z_k) + \nu^2(\xi_k) + \mu^2\nu^2(y_k)$$

Применяя к соотношениям (4.5) неравенств (2.13), (3.3) и (3.8), получим

$$\nu(\xi_1) \leqslant N_0(\|\xi_0^*\| + KL\mu^{a-2}), \quad \nu(y_1) \leqslant N_2 P, \quad \nu(z_1) \leqslant \mu N_2 P$$

$$P = \|y_0^*\| + \mu^{-1}\|y_0^{\cdot *}\| + K\mu^{-2} + K\mu^{-3}(1 + 3L\mu^a)$$

Отсюда с учетом оценок (4.3) при $\mu \geqslant \max(1, M_1)$ будем иметь

$$\nu(\xi_1) \leqslant D_1\mu^{-1}, \quad \nu(y_1) \leqslant D_2\mu^{-2}, \quad \nu(z_1) \leqslant D_2\mu^{-1}$$

$$D_1 = N_0(B_1 + KL), \quad D_2 = N_2[2B_2 + K(2 + 3L)]$$

Выберем числа B_3 и B_4 так, чтобы выполнялись соотношения $B_4 > D_2$, $B_3 > K_1 = D_1 + KLN_0B_4$, и возьмем

$$\mu \geqslant M_2 = \max\{1, M_1, (B_3/\delta)^{1/(1-a)}, (B_4/\delta)^{1/2}, B_4/\delta, [K_2/(B_3 - K_1)]^{1/(1-2a)}, [K_3/(B_4 - D_2)]^{1/(1-3a)}\}$$

$$K_2 = KLN_0(B_3 + B_4 + B_3^2), \quad K_3 = KLN_1(B_3 + 2B_4 + B_3^2 + 2B_4^2)$$

Тогда, если для некоторого k неравенства (4.4) выполнены, то в силу (4.6)

$$\nu(\xi_{k+1}) \leqslant K_1\mu^{a-1} + K_2\mu^{3a-2} \leqslant B_3\mu^{a-1} \leqslant \delta$$

$$\nu(y_{k+1}) \leqslant D_2\mu^{-2} + K_3\mu^{3a-3} \leqslant B_4\mu^{-2} \leqslant \delta$$

и аналогичным образом $\nu(z_{k+1}) \leqslant B_4\mu^{-1} \leqslant \delta$. Поскольку при $k = 1$ неравенства (4.4) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость итераций (4.2). Рассмотрим последовательности $a_k = \nu(\xi_k - \xi_{k-1})$, $b_k = \nu(y_k - y_{k-1})$, $c_k = \nu(z_k - z_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В силу неравенств (2.15), (3.3), (3.7) и (4.4) при $\mu \geqslant M_2$ имеем

$$a_{k+1} \leqslant KLN_0\mu^a(a_k d_k + b_k + c_k), \quad b_{k+1} \leqslant g_k, \quad c_{k+1} \leqslant \mu g_k$$

$$g_k = KLN_1\mu^{a-1}[d_k(a_k + c_k) + b_k(1 + \mu^2 e_k)]$$

$$d_k = \nu(\xi_k) + \nu(\xi_{k-1}) + \nu(y_k) + \nu(y_{k-1}) + \nu(z_k) + \nu(z_{k-1}) + \mu^{-2}$$

$$e_k = \nu(y_k) + \nu(y_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Оценивая d_k и e_k с помощью неравенств (4.4), получим

$$a_{k+1} \leqslant P_1\mu^a (\mu^{a-1}a_k + b_k + c_k), \quad b_{k+1} \leqslant g_k', \quad c_{k+1} \leqslant \mu g_k'$$

$$g_k' = P_1\mu^{a-1} [\mu^{a-1} (a_k + c_k) + b_k], \quad P_1 = KL (2B_3 + 4B_4 + 1) \times \times \max (N_0, N_1)$$

Рассмотрим числовую последовательность $\rho_k = \mu^{(a-3)/2}a_k + b_k + \mu^{-1}c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При $\mu \geqslant M = \max [M_2, (6P_1)^{2/(1-3a)}]$ будем иметь $\rho_{k+1} \leqslant \leqslant \rho_k/2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $\xi_k (t)$, $y_k (t)$ и $z_k (t)$ сходятся равномерно на множестве $\{(t, \mu)\colon 0 \leqslant t \leqslant L\mu^a, \mu \geqslant M\}$ к некоторым непрерывным функциям $\xi_* (t, \mu)$, $y_* (t, \mu)$ и $z_* (t, \mu)$, удовлетворяющим неравенствам, получающимся из (4.4) заменой $\xi_k \to \xi_*$, $y_k \to y_*$, $z_k \to z_*$. Переходя в соотношениях (4.2) к пределу при $k \to \infty$, находим, что $\xi_* (t, \mu)$, $y_* (t, \mu)$, $z_* (t, \mu)$ — решение системы интегральных уравнений (4.1). Функция $\xi_* (t, \mu)$ непрерывно дифференцируема по t, функция $y_* (t, \mu)$ дважды непрерывно дифференцируема по t, причем $y_*^{\boldsymbol{\cdot}} (t, \mu) = z_* (t, \mu)$.

Единственность найденного решения доказывается стандартным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сазонов В. В.* Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 707—719.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
3. *Rubin H.*, *Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. No. 1. P. 65—87.
4. *Takens F.* Motion under the influence of a strong constraining force // Global theory of dynamical systems. Berlin; New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. P. 425—445.

Москва

Поступила в редакцию
18.X.1989