В то же время область конвекции ограничена и вне ее пределов применимы решения линеаризованной задачи, как рассматривалось и в [6].

При докритических режимах течения, т. е. когда мощность источника меньше критической [1], решения уравнения (1.3) применимы во всем пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чашечкин Ю. Д., Беляев В. С.* Режимы свободной термоконцентрационной конвекции над точечным источником тепла // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 3. С. 574—577.
2. *Morton B. R., Taylor G. I., Turner J. S.* Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1956. V. 234. No 1196. P. 1—23.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Кабанов А. С., Нетреба С. Н.* Свободная конвекция от точечного источника тепла в устойчиво стратифицированной среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 60—65.

Москва

Поступила в редакцию
2.XI.1988

УДК 539.3

А. А. Локшин, Е. А. Сагомонян

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБОГО РАЗРЫВА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ЖЕСТКОЙ РАЗГРУЗКОЙ

Исследуется волна разгрузки в нелинейном полубесконечном стержне, возникающая после приложения гладкой нагрузки к его торцу. Разгрузка материала стержня предполагается жесткой. Подобная задача рассматривалась в работе [1] (см. также [2], с. 104), где задавалось напряжение на торце стержня. Решение этой задачи было сведено [I] к неявному функциональному соотношению, которое анализировалось затем при помощи асимптотических методов. В данной работе постановка отличается от [1] лишь тем, что на торце стержня задается не напряжение, а скорость. Однако при такой постановке решение задачи удается получить в явном виде. Указана связь результатов данной работы с результатами работы [1].

1. Рассмотрим полубесконечный стержень плотности $\rho = \text{const}$, расположенный на полуоси $x \geqslant 0$. Предположим, что при активном нагружении напряжения и деформации связаны в стержне соотношением

$$\sigma = b(\varepsilon), \quad b' > 0, \quad b'' \geqslant 0 \tag{1.1}$$

а при разгрузке деформации остаются постоянными. Предположим далее, что в момент $t = 0$ к торцу стержня, находившегося в ненапряженном покоящемся состоянии, прикладывается нагрузка. Эту нагрузку зададим следующим образом:

$$v(t, 0) = v_0(t) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

(v — скорость материального элемента). При этом предполагаем, что функция $v_0(t)$ отлична от нуля лишь на интервале $(0, T)$, монотонно возрастает на интервале $(0, t_m)$ и монотонно убывает на интервале (t_m, T). Таким образом, функция $v_0(t)$ достигает единственного максимума при $t = t_m$.

Задача состоит в том, чтобы определить уравнение фронта волны разгрузки. Это уравнение будем искать в виде $x = \varphi(t)$. Заранее неизвестную точку оси t, из которой исходит фронт волны разгрузки, будем обозначать через t^*. Таким образом, $\varphi(t^*) = 0$.

2. В области нагружения, лежащей на плоскости t, x перед фронтом разгрузки, волновое движение будет описываться простой волной разрежения (таким образом, ударные волны не образуются). А именно, в лагранжевых координатах справедливо уравнение простой волны для деформаций, решение которого, как известно, может быть записано в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(t - x/\sqrt{b'(\varepsilon)/\rho}\right) \tag{2.1}$$

где ε_0 — некоторая функция. Далее, в области нагружения тождественно равен нулю один из инвариантов Римана:

$$v + g(\varepsilon) = 0; \quad g(\varepsilon) \equiv \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{b'(\varepsilon)}{\rho}}\, d\varepsilon \tag{2.2}$$

Следовательно,

$$v_0(t) = -g(\varepsilon_0(t)) \tag{2.3}$$

Применяя теперь к обеим частям равенства (2.1) функцию g, получаем при помощи (2.2) и (2.3) формулу для скоростей в области активного нагружения

$$v = v_0\left(t - x/\sqrt{b' \circ g^{-1}(-v)/\rho}\right) \tag{2.4}$$

(кружок означает суперпозицию функций).

3. Запишем теперь (в лагранжевых координатах) уравнения движения в области жесткой разгрузки

$$\partial\sigma/\partial x = \rho \partial v/\partial t, \quad \partial v/\partial x = 0 \tag{3.1}$$

откуда сразу получаем

$$v = v_0(t), \quad t > t^* \tag{3.2}$$

Напомним, что величина t^* пока неизвестна.

Теперь воспользуемся условием непрерывности скоростей на фронте волны разгрузки. Подставляя в правую часть равенства (2.4) $\varphi(t)$ вместо x и $v_0(t)$ вместо v, имеем из (2.4) и (3.2)

$$v_0(t) = v_0\left(t - \varphi(t)/\sqrt{b' \circ g^{-1}(-v_0(t))/\rho}\right) \tag{3.3}$$

Это функциональное уравнение замечательно тем, что в правой и левой части аргументы стоят под знаком одной и той же функции. Указанное обстоятельство позволяет решить это уравнение в явном виде.

Действительно, для каждого $t > t^*$ обозначим через $\bar{t}$ значение времени, такое, что $v_0(t) = v_0(\bar{t})$, $\bar{t} < t$. Тогда, поскольку функция $v_0(t)$ по условию состоит лишь из двух участков монотонности, из функционального уравнения (3.3) получаем искомое уравнение фронта волны разгрузки (аргумент, стоящий в правой части (3.3) под знаком v_0, приравнивается к $\bar{t}$):

$$\varphi(t) = (t - \bar{t})/\sqrt{b' \circ g^{-1}(-v_0(t))/\rho} \tag{3.4}$$

Вспомним, наконец, что $\varphi(t^*) = 0$. Из (3.4) следует, однако, что это равенство возможно, лишь если $\bar{t}^* = t^*$. Следовательно, t^* — точка максимума кривой $v_0(t)$, т. е. $t^* = t_m$.

4. Покажем теперь, что поле напряжений, возникающее в области жесткой разгрузки, может быть восстановлено так, чтобы удовлетворялось условие непрерывности напряжений на фронте волны разгрузки.

Имеем из (3.1), (3.2) в области разгрузки

$$\partial\sigma/\partial x = \rho v_0'(t), \quad t > t_m$$

откуда

$$\sigma(t, x) = \rho v_0'(t)\, x + F(t) \tag{4.1}$$

где $F(t)$ — некоторая функция, подлежащая определению. В частности, на фронте имеем

$$\sigma(t, \varphi(t)) = \rho v_0'(t)\, \varphi(t) + F(t) \tag{4.2}$$

С другой стороны, в области активного нагружения (где распространяется простая волна) равенство (2.2) и определяющее соотношение (1.1) дают

$$\sigma = b \circ g^{-1}(-v) \tag{4.3}$$

откуда

$$\sigma(t, \varphi(t)) = b \circ g^{-1}(-v(t, \varphi(t)) \equiv b \circ g^{-1}(-v_0(t)), \quad t > t_m \tag{4.4}$$

Приравнивая правые части равенств (4.2) и (4.4) и учитывая выражение (3.4) для $\varphi(t)$, окончательно получаем

$$F(t) = b \circ g^{-1}(-v_0(t)) - v_0'(t)\,(t - \bar{t})\sqrt{\rho b_0' \circ g^{-1}(-v_0(t))} \tag{4.5}$$

Итак, формулы (4.1), (4.5) явно восстанавливают поле напряжений в области разгрузки, удовлетворяющее условию непрерывности на фронте $x = \varphi(t)$.

5. Обозначим $\sigma_0(t) \equiv \sigma(t, 0)$. Тогда из (4.1), (4.5) следует, что

$$\sigma_0(t) = b \circ g^{-1}(-v_0(t)) - v_0'(t)(t - \bar{t}) \times \sqrt{\rho b' \circ g^{-1}(-v_0(t))}, \ t > t_m \tag{5.1}$$

в то время как в силу (4.3)

$$\sigma_0(t) = b \circ g^{-1}(-v_0(t)), \ t < t_m \tag{5.2}$$

Из двух последних формул видно, что для функции $v_0(t)$, удовлетворяющей сформулированным в разд. 1 условиям, функция $-\sigma_0(t)$ оказывается неотрицательной, монотонно возрастающей на $(0, t_m)$ и монотонно убывающей на (t_m, T). Полученный результат согласуется с выводом о том, что фронт разгрузки выходит из точки t_m оси t.

Замечание. Формула (4.4) дает выражение для величины напряжения на фронте $\sigma = \sigma(t, \varphi(t))$ через граничное значение скорости $v_0(t)$. Разрешая уравнение (4.4) относительно $v_0(t)$ и исключая $v_0(t)$ из (5.1), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее $\sigma = \sigma(t, \varphi(t))$ и $\sigma_0(t)$:

$$d\sigma/dt = (\sigma_0(t) - \sigma)/(t - \bar{t}) \tag{5.3}$$

В этой формуле следует считать $\bar{t} = \bar{t}(\sigma)$, поскольку напряжение в простой волне постоянно на характеристике, соединяющей точки $(\bar{t}, 0)$ и $(t, \varphi(t))$. (Действительно, при каждом $t > t_m$ по построению точки $\bar{t}$ имеем $v(t, \varphi(t)) = v_0(\bar{t})$, но отсюда вытекает, что $\sigma(t, \varphi(t)) = \sigma_0(t)$, откуда и следует сделанное утверждение.) Прямой вывод уравнения (5.3) был дан в [1], где было показано также, что это уравнение интегрируется в квадратурах, и получено функциональное соотношение, связывающее $\sigma = \sigma(t, \varphi(t))$, $\sigma_0(t)$ и t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зволинский Н. В., Шхинек К. Н.* Об определении волны разгрузки в одном частном случае // ПММ. Т. 31. Вып. 1. С. 171—175.
2. *Новацкий В. К.* Волновые задачи пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.VI.1989

УДК 539.374

Ю. И. Кадашевич, А. Б. Мосолов

О СООТНОШЕНИЯХ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С «НОВОЙ» МЕРОЙ ВНУТРЕННЕГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается переход от раннего варианта эндохронной теории пластичности (ЭТП) к теории с «новой» мерой внутреннего времени и взаимосвязь последней с теорией течения.

ЭТП первоначально была предложена как теория, в которой не было поверхности текучести (ПТ) [1]. Это существенно отличало ее как от хорошо известных классических теорий пластичности (типа теории течения), так и от многих современных теорий, базирующихся на понятии ПТ. В последнее время, однако, широкое распространение получил вариант ЭТП, основанный на «новой» мере внутреннего времени, в качестве которой фактически используется параметр Одквиста [2—4]. В этом варианте теории ПТ уже присутствует, что можно рассматривать как отказ авторов этого подхода от первоначальной идеи построения аналитического (несингулярного) функционала пластичности для произвольных сложных процессов деформации.

1. Воспользуемся векторным представлением процессов нагружения и деформации. Пусть σ и e — соответственно векторы напряжений и деформаций [5].

Функционал ЭТП записывается в виде

$$\sigma = \int_0^z J(z - \eta)\, de(\eta) \tag{1.1}$$

формально аналогичном функционалу линейной вязкоупругости, только вместо физического времени t для описания истории процессов деформации и нагружения ис-