Собственные значения оператора G_0 следующие: $\sigma_1^{(0)} = i$, $\sigma_2^{(0)} = 2i$, а соответствующие им собственные векторы $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$. Для определения оператора G_1 можно воспользоваться формулой М. Г. Крейна [5]

$$G_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{T_0} \oint\limits_{\gamma_0} \oint\limits_{\gamma_0} \frac{(\lambda - \mu)\, e^{(\mu-\lambda)\tau}}{1 - e^{(\mu-\lambda)\tau}} (G_0 - \lambda I)^{-1} A_1 (G_0 - \mu I)^{-1}\, d\tau\, d\lambda\, d\mu \quad (6)$$

$$T_0 = 2\pi\omega_0^{-1}, \quad A_1 = \omega_0^{-1} \operatorname{diag}\{\beta - i\omega_1, \quad \beta - 2i\omega_1\}$$

где γ_0 — контур, охватывающий достаточно тесно спектр оператора G_0.

Гармонические возмущения правой части уравнения, очевидно, не дают вклада в $\mathrm{Re}\,\{\sigma\} \sim \delta$.

Если разложить в ряд по степеням δ спектр оператора G: $\sigma = \sigma^{(0)} + \delta\sigma^{(1)} + \ldots$, то получим

$$\sigma^{(1)} = (y, G_1 x) \quad (7)$$

где x — собственный вектор оператора G_0, y — собственный вектор сопряженного ему оператора, скобки здесь означают двумерное скалярное произведение. Тогда, подставляя значение G_1 из (6) в (7) и вычисляя интегралы, получаем

$$\mathrm{Re}\,\{\sigma\} = -\beta\omega_0^{-1}\delta + \ldots .$$

Отсюда следует, что при малых δ докритические автоколебания ($\beta = -1$) неустойчивы ($\mathrm{Re}\,\{\sigma\} > 0$), а закритические ($\beta = 1$) устойчивы ($\mathrm{Re}\,\{\sigma\} < 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. *Юдович В. И.* О возникновении автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. № 4. С. 638—655.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
4. *Бершадский А. Г.* О влиянии вынужденных малых колебаний на устойчивость стационарных течений жидкости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. № 1. С. 168—171.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

Донецк

Поступила в редакцию 27.III.1989

УДК 532.516 : 534.1

А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

ОБРАЗОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НУЛЕВОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ТЕМПЕРАТУРНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В результате анализа уравнений свободной конвекции в температурно-стратифицированной среде (ТСС) показано, что при включении теплового источника наряду со всплывающим факелом образуются внутренние волны нулевой частоты. Рассчитана длина волны этих волн, определены параметры переходных процессов.

Существенным элементом конвективных течений, порождаемых тепловыми источниками в жидкостях с солевой стратификацией, являются внутренние волны нулевой частоты, наблюдаемые экспериментально [1]. В ТСС рассчитывались только параметры факела, всплывающего над локализованным источником тепла [2]. Представляет интерес исследование возможности существования внутренних волн нулевой частоты, возбуждаемых тепловым источником в ТСС, и определение их параметров.

1. Постановка задачи. Линеаризованная система уравнений конвекции в ТСС в цилиндрической системе координат, в начале которой расположен точечный источник тепла мощностью P, а ось z направлена против вектора силы тяжести $\mathbf{g}$, имеет вид

$$\begin{gathered}
\partial \mathbf{u}/\partial t = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{\nu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \alpha T'\mathbf{g} \\
\partial T'/\partial t + \nabla\cdot(\mathbf{u}T_0(z)) = \chi\Delta T' + \frac{P}{c_p\rho_0}\frac{\delta(z)\,\delta(r)}{2\pi r}\theta(t) \\
\partial\rho/\partial t - \alpha\rho_0\nabla\cdot(\mathbf{u}T_0(z)) + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{u} = -\frac{\alpha P}{c_p}\frac{\delta(z)\,\delta(r)}{2\pi r}\theta(t) \\
\rho = \rho_0(1-\alpha T),\quad T = T_0(z) + T',\quad T_0(z) = T_0(1 + z/(\alpha T_0\Lambda))
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость среды, p — давление за вычетом гидростатического давления, T, $T_0(z)$, T' — полная, стратифицирующая и избыточная температуры, T_0, ρ_0 — температура и плотность среды на уровне $z = 0$, ρ — плотность среды, α, χ, ν — коэффициенты температурного расширения, температуропроводности, кинематической вязкости, c_p — теплоемкость среды при постоянном давлении, Λ — масштаб стратификации температуры. Начальные и граничные, взятые на бесконечности, условия на функции $\mathbf{u}$, p, T' — однородные.

Поле скоростей, которое является аксиально-симметричным, допускает представление в виде [3]

$$\begin{gathered}
u = \mathbf{v} + \mathbf{w},\quad \mathbf{v} = -\nabla h,\quad w_r = -\partial\Phi/\partial r,\quad w_z = -\partial\Psi/\partial z \\
\Delta_r\Phi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,\quad \Delta_r = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)
\end{gathered}$$

Здесь w_r, w_z — радиальная и вертикальная компоненты соленоидальной части скорости, h, Φ, Ψ — неизвестные функции координат и времени.

Компоненты полного вектора скорости можно записать в виде

$$u_r = -\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial z},\quad u_z = -\frac{\partial h}{\partial z} + \Delta_r f,\quad f = \int_0^z \Phi(r,\zeta,t)\,d\zeta \tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в (1.1) позволяет свести исходную систему к системе

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta f + N^2\Delta_r f = Q\frac{\delta(z)\,\delta(r)}{2\pi r}\theta(t) \\
h = -\frac{\chi}{g}\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)f,\quad N^2 = \frac{g}{\Lambda},\quad Q = \frac{g\alpha P}{c_p\rho_0}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Применяя к первому уравнению (1.3) преобразование Фурье — Бесселя вида

$$F(k_r,k_z,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty} f(r,z,t)\exp(ik_z z - i\omega t)\,dt\,dz\right\} rJ_0(k_r r)\,dr$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, находя изображение функции $f(r, z, t)$ и применяя обратное преобразование, получим

$$\begin{gathered}
f(r,z,t) = \frac{Q}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\pi\delta(\omega) - i\,\mathrm{Vp}\,(1/\omega))\exp(i\omega t - ik_z z)\,d\omega\,dk_z}{k^2(\omega^2 - i(\nu+\chi)k^2\omega - \nu\chi k^4 - N^2k_r^2/k^2)}\right\}\times \\
\times k_r J_0(k_r r)\,dk_r;\quad k^2 = k_r^2 + k_z^2
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Свойства функции $\mathrm{Vp}\,(1/\omega)$ определяются соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\,\mathrm{Vp}\left(\frac{1}{\omega}\right)d\omega = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(\omega)}{\omega}d\omega + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(\omega)}{\omega}d\omega\right)$$

После интегрирования по переменной ω равенство (1.4) приобретает вид

$$\begin{gathered}
f(r,z,t) = (2\pi)^{-2}Q(I_0 + I_+ + I_-) \\
I_0 = -\theta(t)\int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-ik_z z)\,dk_z}{k^2(\nu\chi k^4 + N^2k_r^2/k^2)}\right\}k_r J_0(k_r r)\,dk_r \\
I_\pm = \pm\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}F_\pm(k_r,k_z,t)\exp(-ik_z z)\,dk_z\right\}k_r J_0(k_r r)\,dk_r \\
F_\pm(k_r,k_z,t) = (i(\nu+\chi)k^2/2 \pm M)^{-1}M^{-1}\exp(-(\nu+\chi)k^2t/2 \pm iMt) \\
M = (N^2k_r^2/k^2 - (\nu-\chi)^2k^4/4)^{1/2}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Асимптотическая оценка $I_\pm$. Для оценки поведения $I_\pm$ при больших значения времени t подынтегральное выражение предварительно приводится к виду, удобному для применения асимптотических методов, для чего в области $\operatorname{Im} M = 0$ проводится преобразование координат вида

$$k_r^2 = \eta^2 p^2 q^2 V^2(p, q), \; k^2 = V^2(p, q) = p^2/\chi + q^2/\nu,$$
$$\eta = (\nu - \chi)/(N(\nu\chi)^{1/2})$$

а в области $\operatorname{Im} M \neq 0$ используется преобразование

$$k_r^2 = y^2 H(x, y), \; k^2 = y^2(1 - H(x, y)), \; H(x, y) = (x^2 + (\nu - \chi)^2 y^4/4)/N^2$$

где p, q, x, y — новые переменные. В результате получается

$$I_\pm = \pm \frac{2\eta^2}{\nu - \chi}\left\{\int\limits_0^{a\sqrt{\nu}}\int\limits_0^{b(q)} + \int\limits_{a\sqrt{\nu}}^{+\infty}\int\limits_0^{c(q)}\right\}\frac{\exp\{-(p^2\xi_\pm + q^2/\xi_\pm)t\}}{p^2\xi_\pm + q^2/\xi_\pm} A(p, q)\,dp\,dq \,\pm$$

$$\pm \frac{1}{N^2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\int\limits_0^{X(y)} \exp(-(\nu + \chi)y^2 t/2 \pm ixt) B_\pm(x, y)\,dx\,dy \qquad (2.1)$$

$$A(p, q) = \frac{\cos(zV(p, q)(1 - \eta^2p^2q^2)^{1/2}) J_0(r\eta pqV(p, q))pq}{V(p, q)(1 - \eta^2p^2q^2)^{1/2}}$$

$$B_\pm(x, y) = \frac{\cos(zy(1 - H(x, y))^{1/2} J_0(ryH^{1/2}(x, y))}{(i(\nu + \chi)y^2/2 \pm x)(1 - H(x, y))^{1/2}}$$

$$\xi_+ = \frac{\nu}{\chi}, \quad \xi_- = 1, \quad a = (N/(\nu - \chi))^{1/2}, \quad b(q) = q\xi_+^{-1/2}$$

$$c(q) = (\eta q)^{-1}, \; X(y) = (N^2 - (\nu - \chi)^2 y^4/4)^{1/2}$$

В подынтегральные выражения (2.1) входят две различные осциллирующие функции — косинус и функция Бесселя. В связи с этим соотношения (2.1) определяют различное асимптотическое поведение $I_\pm$ в разных областях пространства и времени.

Для интегралов от $A(p, q)$ целесообразно ввести «малые» и «большие» расстояния, определяемые соотношениями

$$r, z \text{ — «малые», если } r, z \ll \chi a t$$
$$r, z \text{ — «большие», если } r, z \gg \nu a t$$

Для интегралов от $B_\pm$ имеют место соотношения

$$r, z \text{ — «малые», если } r, z \ll (\nu + \chi)\, at/\sqrt{2};$$
$$r, z \text{ — «большие», если } r, z \gg (\nu + \chi)\, at/\sqrt{2}.$$

Используя методы перевала, стационарной фазы [4] и представление (1.2), можно получить оценки компонент скорости u в различных пространственных областях.

Область «малых» расстояний $r, z \ll (\nu + \chi)\, a\sqrt{2}t$

$$u_r \sim Q(-Drz + W(\nu, \chi, N)\varepsilon Rt^{-2}\exp(-\varkappa R) J_1(\varkappa R)) \qquad (2.2)$$

$$u_z \sim {}^1/_2 Q(Dz^2 + W(\nu, \chi, N)\varkappa\varepsilon^2R^2t^{-2}(1 + \varepsilon^2)^{-1/4}\exp(-\varkappa R)(J_0(\varkappa, R) - J_1(\varkappa R)/(\varkappa R)))$$

$$D = (\nu - \chi)^4 N^{-4} t^{-9/2}\nu^{-7/2}\chi^{-3}/4$$

$$\varkappa = \left(\frac{N(1 + \varepsilon^2)}{4\nu\varkappa}\right)^{1/4}, \quad R^2 = r^2 + z^2, \quad \varepsilon = \frac{z}{Ntr}$$

Здесь $W(\nu, \chi, N)$ — функция ν, χ, N.

Первое слагаемое в (2.2) существенно только при докритических режимах течения в области $r, z \ll \chi t({}^1/_2 N/(\nu\chi)^{1/2})^{1/2}$. Второе слагаемое вместе с асимптотическими формулами для I_0 описывает переходной процесс формирования волн нулевой частоты. Оба слагаемых в (2.2) быстро затухают во времени.

Область «малых» радиальных и «больших» вертикальных расстояний $r \ll \chi t a$, $z \gg (\nu + \chi)\, t\; a/\sqrt{2}$

$$u_r \sim rz^{-1}Q(t)\cos(az)$$
$$u_z \sim -2Q(t)\operatorname{ci}(az) \qquad (2.3)$$

$$Q(t) = \frac{4\pi Q}{(N\nu\chi(\nu - \chi))^{1/2}}\left(\frac{\nu}{\nu + \chi}\exp(-\nu a^2 t) - \exp(-\chi a^2 t)\right)$$

Структура течения, описываемого соотношениями (2.3), представляет собой участки стационарных ячеек, наклоненных под углом к оси z, повторяющихся вдоль вертикали с периодом $2\pi a$. Интенсивность поля скоростей в ячейках уменьшается с высотой и экспоненциально затухает во времени. При этом скорости на границах соприкасающихся ячеек противоположно направлены.

Численные расчеты вертикального размера H ячейки дали следующие результаты.

Воздух: $\nu = 1{,}3\cdot10^{-5}$ м²/с, $\chi = 2\cdot10^{-8}$ м²/с, $N = 0{,}01$ Гц, $H = 2{,}3\cdot10^{-1}$ м.

Вода: $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1{,}5\cdot10^{-7}$ м²/с, $N = 0{,}01$ Гц, $H = 6\cdot10^{-2}$ м.

Область «больших» радиальных и «малых» вертикальных расстояний $r \gg (\nu + \chi)\, ta$, $z \ll \chi ta$

$$u_r \sim \frac{zQ}{r^2N}\left(\frac{\nu-\chi}{(\nu+\chi)^2} + \left(\frac{\pi r}{2}\right)^{1/2}(2a^2)^{5/4}\exp\left(-(\nu+\chi)\,a^2t\right)J_0(ar)\right)$$

$$u_z \sim \frac{z^2Q}{2r^2N}\left(\frac{\nu-\chi}{(\nu+\chi)^2} + \left(\frac{\pi r}{2}\right)^{1/2}(2a^2)^{5/4}\exp\left(-(\nu+\chi)\,a^2t\right) \times \right.$$
$$\left. \times\left(\frac{J_0\left(\sqrt{2}\,ar\,(2a)^{1/2}\right)}{2r} + \sqrt{2}aJ_1\left(r\,(\sqrt{2}a)^{1/2}\right)\right)\right) \qquad (2.4)$$

Течение, описываемое соотношениями (2.4), имеет малую интенсивность, большой порядок убывания вдоль радиального направления и быстро затухает во времени. Это обусловлено тем, что в эту область пространства не успели дойти ни существенный температурный перегрев, ни волны нулевой частоты.

3. Структура волн нулевой частоты. Структура течения волн нулевой частоты описывается интегралом I_0. Его асимптотическое поведение исследуется на больших расстояниях от источника тепла вдоль выделенного направления, которое характеризуется величиной γ — тангенсом угла к горизонтали и R — расстоянием от источника.

Метод перевала [4] и представление (1.2) дают оценки радиальной и вертикальной компонент скорости $\mathbf{u}$ при

$$R \gg (2\nu\chi/N^2)^{1/4}$$

$$u_r \sim U(\gamma, R)\sin(\Lambda - \pi/4), \quad u_z \sim -\gamma U(\gamma, R)\cos(\Lambda - \pi/4) \qquad (3.1)$$

$$U(\gamma, R) = \frac{\gamma Q\theta(t)}{8\pi NR\,(\nu\chi)^{1/2}}\exp(-\Lambda); \quad \Lambda = \left(\frac{N^2(1+\gamma^2)}{4\nu\chi}\right)^{1/4}R$$

Колебания нулевой частоты порождаются также функцией h, описывающей потенциальную часть скорости. Вычисленное громоздкое выражение не приводится, поскольку отношение потенциальной и соленоидальной частей скорости в области асимптотики пропорционально $\nu\chi\,(N^2/(4\nu\chi))^{3/4}/g \ll 1$, и вкладом функции h можно пренебречь.

Соотношения (3.1) описывают волны нулевой частоты (стационарные волны [5]), природа которых определяется совместным действием кинетических явлений и эффекта плавучести. Следствием этого является зависимость длины волны излучения от ν, χ, N:

$$\lambda = 2\pi\,(4\nu\chi\,(1+\gamma^2)/N^2)^{1/4}$$

Вид соотношений (3.1) указывает на то, что вектор потока плотности энергии $\mathbf{q} = \rho\mathbf{u}\,(u^2/2 + c_vT' + p/\rho)$ достигает наибольшего абсолютного значения при γ, близких к нулю, что определяет почти горизонтальное распространение внутренних волн нулевой частоты на больших расстояниях от источника.

Как следует из (3.1), траектории частиц, участвующих в колебаниях нулевой частоты, представляют собой эллипсы, эксцентриситет которых увеличивается при удалении от источника, а наклон к горизонтали главной полуоси стремится к нулю.

Соотношения (3.1) определяют высокую чувствительность характеристик этих волн к параметрам среды. Так, в области с более резкими температурными градиентами волны затухают быстрее, их длина волны увеличивается. Из (3.1) также следует, что при переходе через границу раздела двух областей с разными температурными градиентами волны нулевой частоты частично отражаются и распадаются, что указывает на их неустойчивость по отношению к локальным температурным перегревам.

В реальных физических ситуациях при мощностях теплового источника, больших критической, в области вблизи источника тепла присутствует конвективное движение среды, в результате чего структура течения не может быть описана уравнениями (1.3).

В то же время область конвекции ограничена и вне ее пределов применимы решения линеаризованной задачи, как рассматривалось и в [6].

При докритических режимах течения, т. е. когда мощность источника меньше критической [1], решения уравнения (1.3) применимы во всем пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чашечкин Ю. Д., Беляев В. С.* Режимы свободной термоконцентрационной конвекции над точечным источником тепла // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 3. С. 574—577.
2. *Morton B. R., Taylor G. I., Turner J. S.* Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1956. V. 234. No 1196. P. 1—23.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Кабанов А. С., Нетреба С. Н.* Свободная конвекция от точечного источника тепла в устойчиво стратифицированной среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 60—65.

Москва

Поступила в редакцию 2.XI.1988

УДК 539.3

А. А. Локшин, Е. А. Сагомонян

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБОГО РАЗРЫВА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ЖЕСТКОЙ РАЗГРУЗКОЙ

Исследуется волна разгрузки в нелинейном полубесконечном стержне, возникающая после приложения гладкой нагрузки к его торцу. Разгрузка материала стержня предполагается жесткой. Подобная задача рассматривалась в работе [1] (см. также [2], с. 104), где задавалось напряжение на торце стержня. Решение этой задачи было сведено [I] к неявному функциональному соотношению, которое анализировалось затем при помощи асимптотических методов. В данной работе постановка отличается от [1] лишь тем, что на торце стержня задается не напряжение, а скорость. Однако при такой постановке решение задачи удается получить в явном виде. Указана связь результатов данной работы с результатами работы [1].

1. Рассмотрим полубесконечный стержень плотности $\rho = \text{const}$, расположенный на полуоси $x \geqslant 0$. Предположим, что при активном нагружении напряжения и деформации связаны в стержне соотношением

$$\sigma = b(\varepsilon),\ b' > 0,\ b'' \geqslant 0 \tag{1.1}$$

а при разгрузке деформации остаются постоянными. Предположим далее, что в момент $t = 0$ к торцу стержня, находившегося в ненапряженном покоящемся состоянии, прикладывается нагрузка. Эту нагрузку зададим следующим образом:

$$v(t, 0) = v_0(t) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

(v — скорость материального элемента). При этом предполагаем, что функция $v_0(t)$ отлична от нуля лишь на интервале $(0, T)$, монотонно возрастает на интервале $(0, t_m)$ и монотонно убывает на интервале (t_m, T). Таким образом, функция $v_0(t)$ достигает единственного максимума при $t = t_m$.

Задача состоит в том, чтобы определить уравнение фронта волны разгрузки. Это уравнение будем искать в виде $x = \varphi(t)$. Заранее неизвестную точку оси t, из которой исходит фронт волны разгрузки, будем обозначать через t^*. Таким образом, $\varphi(t^*) = 0$.

2. В области нагружения, лежащей на плоскости t, x перед фронтом разгрузки, волновое движение будет описываться простой волной разрежения (таким образом, ударные волны не образуются). А именно, в лагранжевых координатах справедливо уравнение простой волны для деформаций, решение которого, как известно, может быть записано в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (t - x/\sqrt{b'(\varepsilon)/\rho}) \tag{2.1}$$