ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549—558.
2. *Овсеевич А. И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845—848.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.IV.1989

УДК 532.526 : 534.1

А. Г. Бершадский

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для автоколебаний, генерируемых при неустойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, типична следующая зависимость амплитуды возмущений скорости от параметра закритичности: $A \sim \delta^{1/2}$ [1]. Однако имеется особый случай (он исследуется в данной заметке), когда эта зависимость линейна (так же как для бифуркации в стационарный режим [1]); получено условие существования таких автоколебаний и алгоритм, позволяющий находить их частоту и амплитуду. У этих автоколебаний имеется еще одно отличие от обычных гидродинамических автоколебаний: в них до- и закритические режимы сосуществуют. При этом докритические автоколебания оказываются неустойчивыми, а закритические устойчивыми.

Задача об устойчивости стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости может быть сведена к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения [1, 2]

$$du/dt = Lu + F(u,\ u) \tag{1}$$

где u — элемент некоторого гильбертового пространства, L — линейный оператор в этом пространстве, F — билинейный оператор в этом пространстве. Если спектр оператора L выходит в правую полуплоскость, то первичное стационарное течение становится неустойчивым [2]. Оператор L несамосопряженный. Полную систему векторов в рассматриваемом гильбертовом пространстве образуют собственные и присоединенные векторы этого оператора [2]. Разложим решение уравнения (1) в ряд по указанной системе векторов

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\psi_k \tag{2}$$

Из вещественности физических полей следует, что в спектре оператора L комплексные собственные значения ν всегда сосуществуют с комплексно-сопряженными значениями $\bar{\nu}$ [2]: $L\psi = \lambda\psi$, $L\bar{\psi} = \bar{\nu}\bar{\psi}$. Если стационарное течение допускает группы симметрии, то на одной прямой, параллельной мнимой оси, может располагаться более чем одна пара собственных значений оператора L [1]. Пусть вблизи мнимой оси существует прямая, на которой располагаются две такие пары: $\nu_1 = \delta + i\omega_0$; $\nu_2 = \delta + 2i\omega_0$; $\bar{\nu}_1$; $\bar{\nu}_2$, где величина $|\delta|$ мала. Остальные собственные значения оператора L лежат левее этой прямой и мнимой оси. Из дальнейшего будет ясно, что для существования автоколебаний достаточно выполнения указанных условий с точностью $O(\delta^3)$.

Пусть ν_1 и ν_2 — простые собственные значения [2]. Тогда, подставляя ряд (2) в (1) и умножая скалярно на собственные векторы оператора L^+, сопряженного к L, получаем для a_1 и a_2 уравнения

$$\frac{da_j}{dt} = \nu_j a_j + \sum_{k,\,m=1}^{\infty} b_{jkm} a_k a_m, \quad j = 1, 2$$

$$d_{jkm} = (\varphi_j, F(\psi_k, \psi_m))/(\varphi_j, \psi_m); \quad L^+\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$$

При выводе этих уравнений учтено, что функция φ_j ортогональна всем ψ_k, кроме ψ_1, а φ_2 ортогональна всем ψ_k, кроме ψ_2. Уравнения для $a_3 = \bar{a}_1$ и для $a_4 = \bar{a}_2$ получаются комплексным сопряжением. Можно показать, что при прочих фиксированных параметрах, величина $\delta \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_c)$ [1, 2]. Поэтому будем называть δ параметром закритичности.

Сделаем замену переменных $\Theta = \omega t$, где ω — искомая частота автоколебаний. Разложим $a_n(\Theta)$ и ω в ряды по степеням δ (об обосновании такого рода аналитических разложений для задач гидродинамической устойчивости см. [1, 2])

$$a_n = \delta a_n^{(1)} + \delta^2 a_n^{(2)} + \ldots, \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega_1 + \delta^2\omega_2 + \ldots, \quad b_{jkm}^{(0)} = b_{jkm}\,(\delta = 0)$$

Подставляя эти разложения в уравнения, получаем в первом порядке

$$a_j^{(1)}(\Theta) = A_j \exp(ij\Theta) \tag{3}$$

Амплитуды A_j находятся из следующих порядков разложения. Можно показать что для $h > 4$

$$a_n^{(1)}(\Theta) = (c_0 + c_1\Theta + \ldots + c_k\Theta^k)\exp\left(\lambda_n \frac{\Theta}{\omega_0}\right)$$

(наличие полиномиального по Θ сомножителя связано с присоединенными векторами [3]). Так как $\mathrm{Re}\,\nu_n < 0$ при $n > 4$, то для $n > 4$ величины $a_n^{(1)}(\Theta)$ затухают со временем.

Дальше уравнения будут выписываться с точностью до затухающих во времени слагаемых, так как последние не представляют интереса. Тогда во втором порядке получаем (точкой обозначено дифференцирование по Θ)

$$\dot{a}_j^{(2)} - ija_j^{(2)} = -\frac{\omega_1}{\omega_0}\dot{a}_j^{(1)} + \frac{\beta}{\omega_0}a_j^{(1)} + \sum_{n,m=1}^{4} b_{jnm}^{(0)} a_n a_m$$

где $\beta = 1$ для закритического случая, $\beta = -1$ для докритического случая. Если в правые части этих уравнений подставить теперь $a_j^{(1)}$ из (3), то члены $\sim\exp(i\Theta)$ при $j = 1$ и члены $\sim\exp(i2\Theta)$ при $j = 2$ будут приводить к резонансам. Условия отсутствия этих резонансов

$$\begin{gathered} A_2 = b_{211}^{(0)} A_1^2/(2i\omega_1 - \beta) \\ (2i\omega_1 - \beta)(\beta - i\omega_1) + |A_1|^2 k = 0 \\ k = k_1 + ik_2 = \mathrm{Re}\,\{(b_{123}^{(0)} + b_{132}^{(0)})\, b_{211}^{(0)}\} + i\,\mathrm{Im}\,\{b_{123}^{(0)} + b_{132}^{(0)}\} \end{gathered} \tag{4}$$

дают

$$|A_1|^2 = -\frac{3\beta}{k_2}\omega_1, \quad \omega_1 = \beta\left(\frac{3}{4}\frac{k_1}{k_2} \pm \sqrt{\frac{9}{16}\frac{k_1^2}{k_2^2} + \frac{1}{2}}\right) \tag{5}$$

То, что найдена не сама величина A_1, а ее модуль не существенно, так как начальная фаза одного из автоколебаний дублета может быть выбрана произвольно, в частности, можно считать A_1 вещественным. Из первого соотношения (5) следует, что правая его часть должна быть положительной. Это достижимо при любом знаке β за счет выбора подходящего знака во втором соотношении (5). Таким образом, до- и закритические автоколебания в данном случае сосуществуют (в отличие от обычных автоколебаний, где до- и закритические автоколебания исключают друг друга). Поэтому здесь особенно важен вопрос об устойчивости до- и закритических режимов.

Для ответа на этот вопрос можно ограничиться первыми порядками по δ. Рассмотрим линеаризованные на исследуемом автоколебании уравнения

$$(\omega_0 + \delta\omega_1)\,\dot{a}_j = (\beta\delta + ij\omega_0)\,a_j + \delta\sum_{k,m=1}^{4} b_{jkm}\,(a_k^{(1)} a_m + a_m^{(1)} a_k)$$

где $a_k^{(1)}(\Theta)$ — моды исследуемого автоколебания в первом порядке по δ. Представление Флоке для эволюционного оператора этих уравнений таково [4, 5]:

$$V(\Theta) = Q(\Theta)\exp(G\Theta)$$

Устойчивость или неустойчивость автоколебания определяется расположением спектра оператора G. Для того чтобы определить, когда спектр оператора G заходит в правую полуплоскость, можно воспользоваться малостью δ. Раскладываем оператор по степеням δ:

$$G = G_0 + \delta G_1 + \ldots, \quad G_0 = i\,\mathrm{diag}\,\{1, 2\}$$

Собственные значения оператора G_0 следующие: $\sigma_1^{(0)} = i$, $\sigma_2^{(0)} = 2i$, а соответствующие им собственные векторы $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$. Для определения оператора G_1 можно воспользоваться формулой М. Г. Крейна [5]

$$G_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{T_0} \oint\limits_{\gamma_0} \oint\limits_{\gamma_0} \frac{(\lambda - \mu)\, e^{(\mu-\lambda)\tau}}{1 - e^{(\mu-\lambda)\tau}} (G_0 - \lambda I)^{-1} A_1 (G_0 - \mu I)^{-1}\, d\tau\, d\lambda\, d\mu \tag{6}$$

$$T_0 = 2\pi\omega_0^{-1}, \quad A_1 = \omega_0^{-1} \operatorname{diag}\{\beta - i\omega_1, \quad \beta - 2i\omega_1\}$$

где γ_0 — контур, охватывающий достаточно тесно спектр оператора G_0.

Гармонические возмущения правой части уравнения, очевидно, не дают вклада в $\operatorname{Re}\{\sigma\} \sim \delta$.

Если разложить в ряд по степеням δ спектр оператора G: $\sigma = \sigma^{(0)} + \delta\sigma^{(1)} + \ldots$, то получим

$$\sigma^{(1)} = (y, G_1 x) \tag{7}$$

где x — собственный вектор оператора G_0, y — собственный вектор сопряженного ему оператора, скобки здесь означают двумерное скалярное произведение. Тогда, подставляя значение G_1 из (6) в (7) и вычисляя интегралы, получаем

$$\operatorname{Re}\{\sigma\} = -\beta\omega_0^{-1}\delta + \ldots.$$

Отсюда следует, что при малых δ докритические автоколебания ($\beta = -1$) неустойчивы ($\operatorname{Re}\{\sigma\} > 0$), а закритические ($\beta = 1$) устойчивы ($\operatorname{Re}\{\sigma\} < 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. *Юдович В. И.* О возникновении автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. № 4. С. 638—655.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
4. *Бершадский А. Г.* О влиянии вынужденных малых колебаний на устойчивость стационарных течений жидкости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. № 1. С. 168—171.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

Донецк

Поступила в редакцию 27.III.1989

УДК 532.516 : 534.1

А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

ОБРАЗОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НУЛЕВОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ТЕМПЕРАТУРНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В результате анализа уравнений свободной конвекции в температурно-стратифицированной среде (ТСС) показано, что при включении теплового источника наряду со всплывающим факелом образуются внутренние волны нулевой частоты. Рассчитана длина волны этих волн, определены параметры переходных процессов.

Существенным элементом конвективных течений, порождаемых тепловыми источниками в жидкостях с солевой стратификацией, являются внутренние волны нулевой частоты, наблюдаемые экспериментально [1]. В ТСС рассчитывались только параметры факела, всплывающего над локализованным источником тепла [2]. Представляет интерес исследование возможности существования внутренних волн нулевой частоты, возбуждаемых тепловым источником в ТСС, и определение их параметров.

1. Постановка задачи. Линеаризованная система уравнений конвекции в ТСС в цилиндрической системе координат, в начале которой расположен точечный источник