Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 62—50

Б. Н. Соколов

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Приводятся некоторые оценки величины области, из которой можно за фиксированное время привести линейную систему в начало координат с заданным значением интегрального квадратичного по управлению функционала. Дается оценка величины требуемого управления. Предлагаются условия, позволяющие для любой ограниченной области построить регулятор, переводящий систему из любой точки этой области в начало координат за фиксированное время со значением управления, не превышающим заданную величину.

Вопросы построения программного ограниченного управления, приводящего линейную систему за конечное время в заданное состояние изложены в [1, 2].

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x^{\cdot} = Ax + bu \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный вектор, A — постоянная матрица, b — вектор, u — скалярное управление. Предполагается, что система (1) вполне управляема, т. е. векторы b, $Ab, \ldots, A^{n-1}b$ линейно независимы [3].

Пусть $x(0) = x_0$ — положение объекта в момент $t_0 = 0$, а $u(x_0, \quad T - t)$ — управление, переводящее фазовый вектор из положения x_0 в начало координат к моменту T, такое, что

$$\begin{gathered}\mu_0^2 - \mu^2(0) \geqslant 0, \ \mu_0^2 = \text{const} \\ \mu^2(t) = \int_t^T u^2(x(t), T - \tau)\, d\tau\end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим $D(\mu_0^2, T)$ область, из которой система (1) может быть переведена в начало координат за время T со значением интеграла (2), не превосходящим μ_0^2. Известно [3], что $D(\mu_0^2, T)$ — эллипсоид с центром в начале координат.

Оценим снизу радиус области $D(\mu_0^2, T)$, т. е. найдем радиус шара, целиком вписывающегося в нее. Заменим в уравнениях (1) время на обратное и рассмотрим область $D'(\mu_0^2, T)$ достижимости из начала координат системы

$$x^{\cdot} = -Ax + bu, \ x(0) = 0 \tag{3}$$

за время T и значением интеграла (2), не превосходящим μ_0^2. Очевидно, что D' совпадает с D.

Оптимальное программное управление $u(0, T - t)$, переводящее за время T систему (3) из начала координат на границу области достижимости $D(\mu_0^2, T)$, может быть представлено в виде [3]

$$u(0, T - t) = U(T - t), \ U(T - t) = l^* \exp(-A(T - t))\, b$$

Здесь $\exp(-A(T - t))\, b$ — импульсная переходная функция системы (3), нуль в скобках при u означает, что движение начинается из начала координат. Вектор l определяется краевыми условиями на правом конце и ограничением $\mu_0^2 - \mu^2(0) \geqslant 0$ на величину интеграла (2) при $t = 0$ и $x(0) = 0$. Окончательно имеем представление

$$u(0, T - t) = \mu_0 U(T - t)\, I^{-1/2}, \quad I = \int_0^T U^2(T - \tau)\, d\tau \tag{4}$$

Подставим управление (4) в уравнение движения (3) и найдем по формуле Коши максимальное смещение фазовой точки из начала координат в направлении l

$$l^* x(T) = \int_0^T U(T - \tau)\, u(0, T - \tau)\, d\tau = \mu_0 I^{1/2}$$

Отсюда получаем для минимального радиуса R области достижимости $D(\mu_0^2, T)$ равенство

$$\mu_0^{-2}R^2 = \min_l I, \ |l| = 1 \tag{5}$$

Введем обозначения: $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + 1$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $N = [T]$ — целая часть T. Преобразуем и оценим выражение в правой части соотношения (5). Оно не меньше чем

$$\min_l \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} U^2(T-\tau)\, d\tau = \min_l \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 (l^* \exp(-A(T-t_i)) \exp(A\tau')\, b)^2\, d\tau'$$

В последнем интеграле сделана замена переменных $\tau_i = t_i + \tau'$. Соответствующая сумма интегралов равна

$$\min_l \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{-1} (\zeta_i^* \exp(A\tau)\, b)^2\, d\tau\, (l^* \exp(-A(T-t_i)))^2 \geqslant c_0 \sum_{i=0}^{N-1} \min_l (l^* \exp(-A(T-t_i)))^2$$

$$\zeta_i^*(l) = l^* \exp(-A(T-t_i)) / | l^* \exp(-A(T-t_i)) |, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

$$c_0 = \min_l \int_0^1 (l^* \exp(A\tau)\, b)^2\, d\tau, \quad |l| = 1$$

причем $c_0 > 0$, так как система (1) вполне управляема [3]. Второй сомножитель в последнем выражении (6) равен

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\max_l (l^* \exp(A(T-t_i)))^2]^{-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \| \exp(A(T-t_i)) \|^{-2} \tag{7}$$

Предположим, что характеристические числа матрицы A, обладающие наибольшими вещественными частями α, имеют простые элементарные делители (предположение А). Тогда при $T - t_i \geqslant 0$ имеет место оценка [4]

$$\| \exp(A(T-t_i)) \| \leqslant c_1 \exp(\alpha(T-t_i)) \tag{8}$$

где постоянная c_1 зависит только от матрицы A. Используя оценку (8) и неравенства (6) и (7), окончательно получаем

$$R^2 \geqslant R_0^2(\mu_0, T) = \mu_0^2 c_0 c_1^{-2} \sum_{i=0}^{N-1} \exp(-2\alpha(T-t_i)) \tag{9}$$

Лемма 1. Если матрица A удовлетворяет предположению A, то минимальный радиус R области достижимости $D(\mu_0^2, T)$ вполне управляемой динамической системы (3) допускает оценку снизу (9). Если однородная система (1) устойчива, R_0 неограниченно растет с ростом T при фиксированных ресурсах μ_0, причем

$$R^2 \geqslant R_0^2(\mu_0, T) = \mu_0^2 c_0 c_1^{-2} [T] \tag{10}$$

Доказательство. Справедливость первого предложения вытекает из полученных выше оценок. Из устойчивости системы (1) следует [4]: либо $\alpha = 0$ и выполнено предположение A, либо $\alpha < 0$. В любом случае имеет место оценка (8), где следует положить $\alpha = 0$. При $\alpha = 0$ соотношение (9) переходит в оценку (10), что обусловливает соответствующий рост R_0.

Оценим теперь величину программного управления $u(0, T-t)$, обеспечивающего перевод фазовой точки системы (3) из начала координат на границу области $D(\mu_0^2, T)$. Из выражения (4) для $T = 1, 2, \ldots$, имеем оценку

$$| u(0, T-t) | / \mu_0 \leqslant \left[\min_t \min_\zeta (\zeta^* \exp(At)\, b)^{-2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 (\zeta^* \exp(A(t_i+\tau))\, b)^2\, d\tau \right]^{-1/2}$$

$$\zeta^* = l^* \exp(-AT) / | l^* \exp(-AT) |$$

Здесь в интегралах была сделана замена переменных $t_i + \tau' = \tau$, затем штрих опущен.

Правая часть последнего неравенства не превосходит величины

$$c_0^{-1/2}\left[\min_t \sum_{i=0}^{N-1} [\max_{\zeta_i} (\zeta_i^* \exp(A(t-t_i))\, b)^2]^{-1}\right]^{-1/2} =$$

$$= c_0^{-1/2} \max_t \left\{\sum_{i=0}^{N-1} \|\exp(A(t-t_i))\, b\|^{-2}\right\}^{-1/2}$$

$$\zeta_i(\zeta) = \zeta^* \exp(At_i) / |\zeta^* \exp(At_i)|$$

Выражение в фигурных скобках в правой части последнего соотношения при фиксированном t возрастает с ростом $N = [T]$. Поэтому сумма будет минимальна, если она состоит из одного слагаемого, т. е. при $N = 1$. Таким образом, получим, используя оценку (8), при $t \in [0, T]$

$$|u(0, T-t)|\, \mu_0^{-1} \leqslant c_0^{-1/2} \max_\tau \|\exp(A\tau)\, b\| \leqslant c_0^{-1/2} c_1 |b| \max_\tau \exp(\alpha\tau), \quad \tau \in [0, 1] \qquad (11)$$

Если система (1) устойчива, т. е. $\alpha \leqslant 0$, то максимум в правой части оценки (11) достигается при $\tau = 0$. В итоге имеем

$$|u(0, T-t)| \leqslant u_0 = \mu_0 c_0^{-1/2} c_1 |b|, \quad t \in [0, T] \qquad (12)$$

Лемма 2. Пусть задано семейство (4) управлений $u(0, T-t)$, переводящих вполне управляемую систему (3) из начала координат на границу области достижимости $D(\mu_0^2, T)$ за время $T \geqslant 1$. Тогда существует такая постоянная c_2, от T и μ_0 не зависящая, что для всех управлений семейства (4) при всех $t \in [0, T]$ равномерно выполнено условие $|u(0, T-t)| \leqslant u_0 = \mu_0 c_2$.

Доказательство следует из оценки (11) либо из уточненной оценки (12), если система (1) устойчива. В последнем случае $c_2 = c_1 c_0^{-1/2} |b|$.

Известно [3], что синтез в линейной задаче с квадратичным функционалом реализует линейный регулятор с коэффициентами обратной связи, зависящими от времени. На оптимальных траекториях значения величины управления по обратной связи совпадают с программным. Это позволяет сформулировать теорему.

Теорема. Пусть динамическая система (1) вполне управляема, а соответствующая однородная система устойчива. Тогда для любых наперед заданных констант u_0 и R_0 можно подобрать такой момент окончания движения T, что оптимальный линейный регулятор, отвечающий минимуму интеграла (2), переводит систему (1) из любого фазового положения x_0: $|x_0| \leqslant R_0$ в начало координат с величиной управления, не превосходящей u_0: $|u(x(t), T-t)| \leqslant u_0$.

Доказательство следует из лемм 1 и 2. При заданной величине ограничения u_0 получаем, согласно неравенству (12), значение $\mu_0 = u_0 c_0^{1/2} C_1^{-1} |b|^{-1}$, гарантирующее при любом $t \in [0, T]$, $T \geqslant 1$, требуемую оценку управления. Затем, согласно оценке (10), вычисляем R_0 и величину T, обеспечивающую условие $|x_0| \leqslant R_0(\mu_0, T)$. Для этого достаточно положить $T \geqslant |x_0|^2 \cdot \mu_0^{-2} c_0^{-1} c_1^2 + 1$. Подставляя сюда соответствующее значение μ_0, окончательно получим: $T \geqslant |x_0|^2 u_0^{-2} c_0^{-2} c_1^4 |b|^2 + 1$.

Пример. Рассмотрим точку, перемещаемую с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной направляющей. Предположим, что скорость точки может мгновенно меняться в заданных пределах. К точке подвешены m маятников разной длины. Требуется, управляя скоростью точки, переместить систему в начало координат с гашением всех колебаний. Можно проверить, что указанная система устойчива и вполне управляема (проверка управляемости проведена в [5]). Поэтому для любой ограниченной области фазового пространства можно построить, согласно доказанной теореме, линейный регулятор скорости, переводящий систему из любого начального положения в этой области в начало координат. Значение управления на реализовавшихся траекториях не будет превышать любой заранее заданной величины.

Замечания 1°. Если система (1) неустойчива, то ограниченного заданной постоянной управления, переводящего фазовую точку в начало координат, может не существовать. В качестве примера рассмотрим уравнение $x^\cdot = x + u$, $|u| \leqslant u_0$, $x \in R^1$. При $|x_0| > u_0$, очевидно, искомого управления не существует. Поэтому условия доказанной выше теоремы близки к необходимым.

2°. Все оценки и выводы справедливы также для случая, если u — вектор, а b — соответствующая матрица.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549—558.
2. *Овсеевич А. И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845—848.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1989

УДК 532.526 : 534.1

А. Г. Бершадский

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для автоколебаний, генерируемых при неустойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, типична следующая зависимость амплитуды возмущений скорости от параметра закритичности: $A \sim \delta^{1/2}$ [1]. Однако имеется особый случай (он исследуется в данной заметке), когда эта зависимость линейна (так же как для бифуркации в стационарный режим [1]); получено условие существования таких автоколебаний и алгоритм, позволяющий находить их частоту и амплитуду. У этих автоколебаний имеется еще одно отличие от обычных гидродинамических автоколебаний: в них до- и закритические режимы сосуществуют. При этом докритические автоколебания оказываются неустойчивыми, а закритические устойчивыми.

Задача об устойчивости стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости может быть сведена к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения [1, 2]

$$du/dt = Lu + F(u, u) \tag{1}$$

где u — элемент некоторого гильбертового пространства, L — линейный оператор в этом пространстве, F — билинейный оператор в этом пространстве. Если спектр оператора L выходит в правую полуплоскость, то первичное стационарное течение становится неустойчивым [2]. Оператор L несамосопряженный. Полную систему векторов в рассматриваемом гильбертовом пространстве образуют собственные и присоединенные векторы этого оператора [2]. Разложим решение уравнения (1) в ряд по указанной системе векторов

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\psi_k \tag{2}$$

Из вещественности физических полей следует, что в спектре оператора L комплексные собственные значения ν всегда сосуществуют с комплексно-сопряженными значениями $\bar{\nu}$ [2]: $L\psi = \lambda\psi$, $L\bar{\psi} = \bar{\nu}\bar{\psi}$. Если стационарное течение допускает группы симметрии, то на одной прямой, параллельной мнимой оси, может располагаться более чем одна пара собственных значений оператора L [1]. Пусть вблизи мнимой оси существует прямая, на которой располагаются две такие пары: $\nu_1 = \delta + i\omega_0$; $\nu_2 = \delta + 2i\omega_0$; $\bar{\nu}_1$; $\bar{\nu}_2$, где величина $|\delta|$ мала. Остальные собственные значения оператора L лежат левее этой прямой и мнимой оси. Из дальнейшего будет ясно, что для существования автоколебаний достаточно выполнения указанных условий с точностью $O(\delta^3)$.

Пусть ν_1 и ν_2 — простые собственные значения [2]. Тогда, подставляя ряд (2) в (1) и умножая скалярно на собственные векторы оператора L^+, сопряженного к L, получаем для a_1 и a_2 уравнения

$$\frac{da_j}{dt} = \nu_j a_j + \sum_{k,m=1}^{\infty} b_{jkm} a_k a_m, \quad j = 1, 2$$

$$d_{jkm} = (\varphi_j, F(\psi_k, \psi_m))/(\varphi_j, \psi_m); \quad L^+\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$$