Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 539.375

А. Л. Ни, В. Е. Фортов

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД ПРИ КОНТИНУАЛЬНО-КИНЕТИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ

Континуальная модель разрушения [1, 2], в рамках которой степень поврежденности вещества определяется объемом микропор или пустот, образующихся при росте растягивающих напряжений, переформулируется на случай вязкоупругих сред с конечными деформациями. В результате предлагаются уравнения движения вязкоупругой среды при континуальном разрушении. В неразрушенном веществе они совпадают с уравнениями движения [3—6], при малых повреждениях в условиях одноосного нагружения переходят в известные уравнения [1]. В рамках предложенной модели исследуются свойства некоторых простейших течений.

Реологическим моделям конденсированной сплошной среды, описывающим прочностные эффекты, посвящена обширная литература. Предложен [3, 7] феноменологический подход к построению определяющих соотношений, включающих в себя в пределе как гидродинамический, так и упругий режимы движения вещества, сохраняющего сплошность. Вопрос о включении в такого рода модели разрушения менее изучен. В [4] содержится обзор работ, выполненных к настоящему времени в этом направлении, и развита теория континуального разрушения нелинейно-упругих сред, в основе которой лежит феноменологический подход. В качестве макроскопической меры повреждения вещества служит тензор второго ранга, свойства которого изучались в [4]. В силу принятых в [4] предположений установлено, что рост поврежденности в термоупругих средах управляется не кинетическим уравнением, а конечным соотношением, связывающим значение поврежденности с текущим значением деформации, энтропии и распределенного источника повреждения. Вместе с тем существующие экспериментальные данные показывают, что например, для описания откола в конденсированном веществе вполне удовлетворительна кинетическая континуальная модель разрушения, где мерой повреждения служит объем образующихся пустот или пор [1]. В силу очевидного физического смысла она удобна для моделирования откольных явлений, поскольку описывает непрерывным образом переход от сплошного вещества к макротрещине с последующим отделением откольной тарелки. Этот факт особенно привлекателен для расчетов по схемам сквозного счета.

Примем, что разрушающуюся среду можно представить в виде матрицы из сплошного конденсированного вещества, в которой имеются микропоры. Рассмотрим волновую динамику такой среды. Введем следующие макроскопические переменные: V_p — объем пустот в единице объема, ρ° — истинная плотность конденсированного вещества, ρ — его усредненная плотность: $\rho = \rho^\circ (1 - V_p)$. Будем в дальнейшем придерживаться модели взаимопроникающих континуумов [8—9], ведя рассмотрение в декартовой системе координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

В интегральных законах сохранения массы, импульса и энергии для пористой среды

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\omega \rho^\circ\, dV_M = -\int \rho^\circ \mathbf{u}\mathbf{n}\, dS, \quad \frac{d}{dt}\int\limits_\omega \rho^\circ\, dV_M = \int \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\omega \rho^\circ e_T\, dV_M = \int\limits_S \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}\mathbf{u}\, dS, \quad e_T = e + \frac{1}{2}u^2$$

(e_T и e — удельная полная и внутренняя энергия, $\boldsymbol{\sigma} = \| \sigma_{ik} \|$ — тензор напряжений, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости). Объемные интегралы вычисляются по объему, занятому сплошной средой.

Поверхностные интегралы следует рассмотреть подробней. В силу сделанного предположения о структуре вещества граница элемента сплошной среды S является объединением внешней границы S_e и границ микропор S_i, лежащих внутри объема ω. Поверхностные интегралы в уравнениях движения вычисляются по объединению S_e, S_i.

В силу определения V_p, ρ, ρ°, $\rho^\circ dV_M = \rho dV$ и объемные интегралы сводятся к интегралам по объему, ограниченному S_e.

Вычислим, например, интеграл в правой части уравнений сохранения импульса. Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, имеем

$$\int\limits_S \sigma\mathbf{n}\, dS = \int\limits_\omega \nabla\sigma\, dV - \int\limits_\omega \nabla\sigma V_p\, dV$$

При переходе от поверхностных интегралов к объемным предполагалось, что σ можно гладким образом продолжить внутрь микропор. Это допущение требует специального обоснования. Например, в гидродинамическом приближении ситуация, когда $p = 0$ на границе с вакуумом, невозможна. Имеет смысл говорить лишь о некоем среднем давлении по физически бесконечно малому объему пористой среды, которое приписывается также свободным поверхностям, что возможно только при малых концентрациях пор: $V_p \ll 1$. С другой стороны, очевидно, что уравнения применимы и в предельной ситуации, когда вещество разрушено и напряжения в нем равны нулю. В этом смысле уравнение равномерно пригодны

Преобразуя стандартным образом поверхностные интегралы в объемные в интегральных законах сохранения, имеем

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\rho\mathbf{u} = 0,\ \partial\rho\mathbf{u}/\partial t + \nabla(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = (1 - V_p)\nabla\sigma\mathbf{u},$$
$$\partial\rho e_T/\partial t + \nabla(\rho\mathbf{u}e_T) = (1 - V_p)\nabla\sigma\mathbf{u} \quad (1)$$

Уравнения совместности скоростей и деформаций записываются так же, как и в случае сплошной среды [6] ($\mathbf{A}$ — тензор полной дисторсии)

$$\partial\mathbf{A}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{A};\ \mathbf{A} = \| A_{ik} \| = \| \partial x_i/\partial x_k \|,\ \mathbf{U} = \| U_{ik} \| =$$
$$= \| \partial u_i/\partial x_k \| \quad (2)$$

Лагранжевы переменные x_k $(i, k = 1, 2, 3)$ — координаты элемента сплошной среды в его исходной конфигурации.

Уравнения движения следует замкнуть определяющими соотношениями для тензора напряжений σ и объема пор V_p.

Для гипоупругопластических сред предлагалось [8] определять σ по характеристикам сплошной среды. Будем придерживаться этого в дальнейшем. Рассмотрим сначала гиперупругую среду. В соответствии со сказанным примем, что удельная внутренняя энергия — функция энтропии s и тензора $\mathbf{A}^\circ = (\rho/\rho)^{1/3}\mathbf{A}$, причем справедлив первый закон термодинамики

$$de = Tds + \rho^{\circ-1}\sigma : d\mathbf{A}^\circ\mathbf{A}^{\circ-1} \quad (3)$$

(T — температура). Это равенство и следующее из него выражение для тензора напряжений $\sigma = \rho^\circ (\partial e/\partial\mathbf{A}^\circ)_s\mathbf{A}^{\circ *}$ совпадают с соответствующими соотношениями для сплошной гиперупругой среды [5, 6] с заменой тензора полной дисторсии $\mathbf{A}$ на ранее введенный тензор $\mathbf{A}^\circ$. Сделанный выбор определяющих соотношений, разумеется, неединствен и соответствует выбору повреждаемости в форме скаляра [4]. В силу свойств тензора полной дисторсии верно равенство: $\rho^\circ \det \mathbf{A}^\circ = \rho_0$, где ρ_0 — плотность среды в исходной конфигурации.

Объем пустот V_p растет как за счет образования новых пор, так и в силу движения вещества, что отражает закон роста пор в объеме ω: $\partial V_p/\partial t + \mathbf{u}\nabla V_p = \psi$. Этому уравнению в областях гладкости в силу уравнения неразрывности эквивалентна дивергентная форма

$$\partial \rho V_p/\partial t + \nabla \rho \mathbf{u} V_p = \rho\psi \tag{4}$$

Из нее, в частности, следует, что при переходе через ударную волну объем V_p не меняется. Это условие физически понятно, поскольку при мгновенном сжатии поры вморожены в вещество и их объем уменьшается так же, как объем сплошной среды.

Таким образом, дивергентная форма (4) сохраняет силу и для разрывных решений. Выражая объем V_p через введенный в [1] удельный объем V_p' пор $V_p = \rho V_p'$, имеем уравнение, которое при $Vp' \ll 1$ переходит в уравнение [1] для кинетики роста пор, когда $\psi/\rho = \dot{V_T}$.

Из уравнений (1) и (2) имеем выражение для производства энтропии

$$T\,ds/dt = -p\psi/\rho \quad (p = -{}^1/_3 \operatorname{tr} \sigma)$$

(p — гидростатическое давление). Условие неубывания энтропии накладывает ограничение на вид функции ψ в предлагаемом феноменологическом подходе. Именно, должно выполняться неравенство $-p\psi \geqslant 0$.

Для функции, задающей кинетику роста пор [1], это условие выполнено, поскольку поры растут только при растягивающих напряжениях. В действительности полученный результат гласит лишь, что принятая модель не противоречит второму закону термодинамики. Вполне возможно, что вычисленная посредством нее энергия разрушения не совпадет с результатом эксперимента. Ситуация может быть исправлена введением в уравнение энергии членов [4], связанных с образованием и изменением поверхностей берегов микротрещин и количеством микродефектов.

Уравнения движения пористой среды, за исключением уравнения неразрывности, недивергентны. Тем не менее для них можно выписать соотношения на разрыве стандартным образом [6], поскольку, как это следует из вывода уравнений, члены $V_p\nabla\sigma$ и $V_p\nabla\sigma\mathbf{u}$ являются объемными источниками и выпадают при интегрировании по бесконечно малому объему. Что же касается уравнений совместности деформации, то они приводятся [5, 6] к дивергентному виду, и условия для них на скачке сводятся к требованию непрерывности перемещений. В системе координат, связанной ударной волной, соотношения на скачке записываются так [6]:

$$[\rho A_{1l}] = 0, \ -j\,[A_{ki}] = [u_k]\rho A_{1i}{}^1, \ -j\,[u_i] = [\sigma_{i1}], \ [e] = (\sigma_{i1}{}^1 + \sigma_{i1}{}^2)[A_{i1}]/(2\rho A_{11}); \quad l, i = 1, 2, 3; \ k = 2, 3; \ [f] = f^1 - f^2$$

Здесь направление оси x_1 совпадает с нормалью к ударному фронту; верхними индексами 1 и 2 отмечены параметры за и перед разрывом; j — поток вещества через разрыв.

Приведенные соотношения совпадают с соответствующими выражениями для сплошной среды с той лишь разницей, что сюда входит усредненная плотность ρ. К ним добавляется условие на скачке для объема пор: $[V_p] = 0$.

В пределе достаточно сильных ударных волн в гидродинамическом приближении соотношения на разрыве переходят в соотношения для пористых сред [10], если принять, что за разрывом имеем сплошное вещество: $V_p{}^1 = 0$. В рамках принятой модели этому переходу соответствует стационарная структура, состоящая из головного скачка, где объем пор не меняется, и прилегающей к нему области, в которой происходит «залечивание» пор в соответствии с функцией ψ. Поскольку $-p\psi > 0$, второй закон термодинамики также оказывается выполненным.

Исследуем свойства некоторых течений в рамках приведенной модели. Примем для простоты, что справедливо гидродинамическое приближение. Переход к общему случаю, как это станет ясно из дальнейшего, не представляет труда.

Исследование структуры ударной волны выполним в приближении коротких волн [11]. Стандартная техника приводит к уравнениям относительно u_1, V_p:

$$2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + m_0 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) = -a_0^2 \frac{\partial V_p}{\partial \xi}, \qquad a_0 \frac{\partial V_p}{\partial \xi} = -\psi$$

$$\xi = x_1 - a_0 t, \qquad m_0 = \frac{1}{2a_0^2\rho_0^3}\left(\frac{\partial^2 p_0}{\partial V^2}\right)_s, \qquad a_0^2 = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho}\right)_s, \qquad p = \rho_0 a_0 u$$

Можно принять $\psi = -V_p/\tau$ при $p > 0$. Такой выбор обеспечивает залечивание пор при сжатии. Стационарная волна со скоростью D подчиняется системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2\left[m_0 u_1 - (D - a_0)\right] \frac{du_1}{d\xi} = -a_0^2 \frac{dV_p}{\partial \xi}, \qquad a_0 \frac{\partial V_p}{\partial \xi} = -\psi$$

Если пористость вещества перед волной равна V_0, интегрирование первого уравнения дает

$$D = {}^1/_2 m_0 u_p - {}^1/_2 a_0^2 V_0/u_p + a_0$$

где u_p и $u_s = 2D/m_0$ — скорости на $-\infty$ и на фронте.

Приведенное решение теряет силу при $u_p < \sqrt{V_0/m_0}$, поскольку $D < a_0$, $u_s < 0$ и волна перестает быть эволюционной. В этом случае структура течения такова: в распространяющемся перед волной предвестнике с затухающей во времени амплитудой вещество уплотняется при нулевом давлении до пористости $V_0' = m_0 u_p^2/a_0^2 < V_0$, а затем сжимается в непрерывной стационарной структуре, подчиняющейся приведенным выше формулам с $D = a_0$, и пористостью перед фронтом V_0'. Этот вывод подтверждается численными расчетами нестационарных волновых уравнений методом характеристик.

Исследуем структуру течения в зоне разрушения при отколе. На поздней фазе разрушения, очевидно, следует принять, что истинная плотность слабо меняется со временем в каждой частице. Сохраняя в уравнении неразрывности главные члены, имеем

$$\rho^\circ \partial u_1/dx_1 = \rho^\circ (1 - V_p)^{-1}\psi = \Phi_1 \tag{5}$$

Будем считать течение изэнтропическим, что справедливо для достаточно слабых ударных волн. Выражая давление через плотность, перепишем уравнение импульса

$$\partial u_1/\partial t + u_1 \partial u_1/\partial x_1 = -(a_0^2/\rho^\circ)\, \partial\rho^\circ/\partial x_1 \tag{6}$$

Величина Φ_1 в сделанных предположениях очевидным образом записывается в виде

$$\Phi_1 = (\rho_0 - \rho^\circ)/\tau \tag{7}$$

Последняя формула отражает стремление истинной плотности к своему значению при нулевом давлении. Качественные закономерности течения в зоне разрушения можно исчерпывающим образом изучить в предположении постоянства времени разрушения τ. В этом случае, исключая ρ° из (5)—(7), приходим к уравнению

$$\partial u_1/\partial t + u_1 \partial u_1/\partial x_1 = a_0^2 \tau \partial^2 u_1/\partial x_1^2$$

Оно совпадает с уравнением Бюргерса, описывающим волновые движения вязкого теплопроводного газа [11]. Примем, что размер зоны разрушения много меньше длины импульса. Тогда граничные условия гласят: $u_1 = \overset{\circ}{u}_{1,2}$ при $x_1 \to \pm\infty$, где $\overset{\circ}{u}_{1,2}$ — скорости свободных поверхностей после отделения откольной пластины.

В качестве решения поставленной задачи выберем решение задачи Коши с начальными условиями:

$$u_1|_{t=0} = \begin{cases} u_1^\circ, & x_1 > 0 \\ u_2^\circ, & x_1 < 0 \end{cases}$$

Оно содержится в [11] и на больших временах имеет асимптотическую форму, совпадающую с решением задачи о центрированной волне разрежения в идеальном газе. Приведенное решение имеет ясный физический смысл: частицы разрушенного вещества движутся по прямолинейным траекториям с постоянными скоростями. Подробный анализ показывает, что выход течения на автомодельный режим осуществляется по закону $t^{-1/2}$. В окрестности свободных поверхностей $u_1 = \overset{\circ}{u}_{1,2} + O(e^{-\beta t})$, т. е. они являются достаточно четко локализованными.

Вопрос о локализации откола можно рассмотреть с другой точки зрения. Вычислим массу разрушенного вещества при $t \to \infty$:

$$M = \int\limits_{u_2^\circ t}^{u_1^\circ t} \rho^\circ (1 - V_p)\, dx_1$$

Интегрирование здесь ведется при постоянном значении времени. Зная u_1, для объема пор имеем уравнение $dV_p/dt = (1 - V_p) / t$, $t \to \infty$, где дифференцирование проводится при постоянном значении x_1/t. Отсюда

$$V_p = 1 - C(\xi) / t, \ \xi = x_1/t$$

Отметим, что приведенный анализ не описывает начальную фазу разрушения, где принятые предположения несправедливы. Значение $C(\xi)$ должно находиться из сращивания с решением на начальной фазе процесса с длительностью τ. Окончательно имеем

$$M = \rho_0 \int\limits_{u_2^\circ}^{u_1^\circ} C(\xi)\, d\xi$$

Отсюда заключаем, что M стремится к постоянной величине с течением времени; это, в свою очередь, указывает на локальный характер разрушения. Отметим существенно нелинейный характер течения. В линейном приближении локализации разрушения нет.

Рассмотрим в гидродинамическом приближении ситуацию, в известной степени предельную для описанной модели разрушения. Примем, что по достижении в частиц среды растягивающих напряжений, превышающих откольное, материал разрушается и перестает сопротивляться разлету. Будем описывать среду как порошок с нулевым давлением в частицах. Если плотность сплошного вещества в момент времени, предшествующий разрушению, равна ρ_1, то после разрушения это значение приписывается усредненной плотности. Для определения истинной плотности разрушенного вещества следует привлечь какую-либо физическую модель. Можно принять, например, процесс изэнтропическим либо учесть энергию разрушения.

Движение порошка описывается системой уравнений для среды, лишенной давления, которая в одномерном случае [12] обладает трехкратно вырожденной характеристикой: $dx_1/dt = u_1$, но не является гиперболической, поскольку не приводится к характеристической форме. Разрывы в такой среде на модели твердых невзаимодействующих частиц исследованы в [12]. В частности, если однородные полупотоки частиц, занимающие полупространства $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, направлены в разные стороны, то в течении образуется область, свободная от частиц; если они направлены навстречу друг другу, траектории частиц пересекаются и среда становится двухскоростной. В [12] для устранения такой неоднозначности предложено вводить непроницаемую поверхность разрыва, обладающую конечной массой, импульсом и энергией.

Для разрушенного конденсированного вещества в последнем случае представляется разумным принять схему течения, когда по обоим состояниям движутся ударные волны, на которых выполняются соотношения для пористой ударной адиабаты [10]. За ударной волной вещество сплошное, и состояния за ударными волнами обычным образом сопрягаются из условия непрерывности на контактном разрыве давления и скорости. При таком подходе пренебрегается структурой ударных волн.

Можно построить схему распада произвольного разрыва, когда разрушенное вещество граничит со сплошным. Если скорость разгрузки сплошного вещества в вакуум больше скорости порошка, взаимодействия нет. Порошок движется по инерции с постоянной скоростью. В противном случае в разрушенное вещество идет ударная волна, а в сплошное — ударная волна либо волна разрежения.

С небольшими модификациями выполненное рассмотрение переносится на гиперупругую среду с разрушением.

Перейдем к вопросу о модели разрушающейся вязкоупругой среды. В рамках релаксационной модели [6] тензор полной дисторсии $\mathbf{A}$ можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_e\mathbf{A}_p$, где $\mathbf{A}_e$ и $\mathbf{A}_p$ — тензоры упругой и пластической дисторсии [5, 6], причем верно кинетическое уравнение для пластической деформации $\mathbf{A}_p^{\cdot} = \Phi(\mathbf{A}_e, \mathbf{A}_p, s)$, а внутренняя энергия $e = e(\mathbf{A}_e, s)$.

Представим тензор дисторсии в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e^{\circ}\mathbf{A}_p^{\circ},\ \mathbf{A}_e^{\circ} = (\rho/\rho^{\circ})^{1/3}\mathbf{A}_e,\ \mathbf{A}_p^{\circ} = (\rho^{\circ}/\rho)^{1/3}\mathbf{A}_p$$

и примем $e = e(\mathbf{A}_e^{\circ}, s)$. Для $\mathbf{A}_p^{\circ}$ имеем теперь кинетическое уравнение

$$\mathbf{A}_p^{\circ\cdot} = (1 - V_p)^{-1/3}\Phi + {}^1/_3(1 - V_p)^{-1}\mathbf{A}_p^{\circ}V_p^{\cdot} \tag{8}$$

Отсюда и из уравнений движения приходим к выражению для производства энтропии

$$T ds = (1/\rho^{\circ})\,\sigma : \mathbf{A}_e^{\circ}\Phi\mathbf{A}_p^{\circ-1}\mathbf{A}_e^{\circ-1}(1 - V_p)^{-1/3} - (1/\rho^{\circ})\,pV_p^{\cdot}$$

Первое слагаемое в правой части положительно в силу требований, наложенных на Φ, второе — по уже отмеченным ранее причинам. Таким образом, для принятой модели вязкоупругой разрушающейся среды второй закон термодинамики сохраняет силу. Соотношения (1), (2), (4), (8) образуют полную систему уравнений, описывающих движение вязкоупругой среды при наличии разрушения.

Авторы благодарят Г. И. Канеля за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канель Г. И., Разоренов С. В., Фортов В. Е.* Кинетика разрушения алюминиевого сплава АМг6М в условиях откола // ПМТФ. 1984. № 5. С. 60—64.
2. *Barbee T. W., Seaman L., Crewdson R., Curran D.* Dynamic Fracture Criteria for Ductile and Brittle Metals // J. Mater. 1972. V. 7. No. 3. P. 393—401.
3. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
4. *Кондауров В. И.* Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302—310.
5. *Кондауров В. И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133—139.
6. *Ни А. Л., Фортов В. Е.* Дивергентная система нестационарных уравнений движения вязкоупругих сред в эйлеровых координатах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 984—988.
7. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 122—144.
8. *Рахматуллин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых] сред // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 184—195.
9. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 418—429.
10. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
11. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1023—1037.
12. *Крайко А. Н.* О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 500—510.

Черноголовка

Поступила в редакцию
16.XI.1988