

УДК 539.375

© 1990 г.

Ю. Н. Гордеев

## АВТОМОДЕЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ С РАСКЛИНИВАЮЩИМ ПОТОКОМ ГАЗА

Получено автомодельное решение задачи о распространении трещины гидроразрыва при учете взаимодействия ее берегов с расклинивающим потоком газа. Исследуется влияние этого взаимодействия на коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и динамические характеристики потока.

В задачах расклинивания упругого полупространства жестким клином одним из факторов, влияющих на КИН, является сила трения между клином и упругой средой [1]. При решении квазистационарных задач гидроразрыва пласта силы трения, возникающие между потоком газа и берегами трещин, учитывают только в уравнениях движения потока. Касательными напряжениями, связанными с силами трения, при решении уравнений теории упругости пренебрегают [2]. Автомодельные динамические задачи о распространении трещин расклиниваемых потоком газа в этом приближении методом функционально-инвариантных решений [3, 4] рассматривались в [5, 6]. При расклинивании трещин высокоскоростным потоком сжимаемого газа, как это имеет место в случае импульсного гидроразрыва [7] и задачах разрушения среды взрывом [8], касательные напряжения, возникающие на берегах трещин, могут стать значительными.

**1. Постановка задачи.** При импульсном гидроразрыве пласта в качестве рабочего тела используется как жидкость, так и сжимаемый газ [7]. В данной работе рассматривается расклинивание трещины только газом.

Для описания движения потока газа в плоской трещине, расположенной в плоскости  $x_2 = 0$ , используем законы сохранения массы и количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (w\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho wu) = 0, \quad P = c^2\rho \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial x} P = -F, \quad F = \lambda_s \rho \frac{u|u|}{w} \quad (1.2)$$

Здесь  $P$ ,  $\rho$ ,  $u$  — давление, плотность и скорость газа,  $w$  — раскрытие трещины,  $F$  — сила трения; между потоком газа и стенками трещины (используется квадратичная зависимость силы сопротивления от скорости, которая справедлива для высокоскоростных потоков при  $Re = \rho wu/\mu \gg 1$ ,  $\mu$  — вязкость газа);  $\lambda_s$  — коэффициент сопротивления,  $c$  — изотермическая скорость звука,  $2l(t)$  — длина трещины в момент времени  $t$ .

Уравнения движения упругой среды и закон Гука запишем в виде

$$w_\alpha = u_\alpha + v_\alpha, \quad \square_1 u_\alpha = 0, \quad \square_2 v_\alpha = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} u_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \quad \left( \square_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \left[ \delta_{\alpha\beta} (\kappa^2 - 2) \operatorname{div} \mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} w_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} w_\beta \right]; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.4)$$

где  $u_\alpha(x_1, x_2, t)$ ,  $v_\alpha(x_1, x_2, t)$  — потенциальные и соленоидальные компоненты вектора смещения  $\mathbf{w}(x_1, x_2, t)$ ;  $\kappa = c_1/c_2$ ;  $c_1, c_2$  — скорости про-

дольных и поперечных волн ( $c_1 > c_2$ );  $\sigma_{\alpha\beta}$  — тензор изменения напряжения  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^1 - \sigma_{\alpha\beta}^0$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^0$  — тензор начальных напряжений [9].

Краевые условия для уравнений (1.3), (1.4) зададим в виде ( $v$  — скорость трещины,  $\sigma$  — однородное сжимающее напряжение)

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \sigma - P(x_1, t), \quad \sigma_{12} = \tau = wF/2; \quad x_2 = 0, \quad |x_1| \leq vt \\ w_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0; \quad x_2 = 0, \quad vt < |x_1| < c_1 t \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предполагаем, что на кончиках трещины компонента тензора напряжений  $\sigma_{22}$  имеет корневую особенность

$$\sigma_{22}(x_1, x_2 = 0, t) \xrightarrow{x_1 \rightarrow \pm vt} \frac{K_T(t)}{\sqrt{2\pi(|x_1| - vt)}} \quad (1.6)$$

Здесь  $K_I(t)$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Граничные условия для уравнений (1.1), (1.2), которые описывают расклинивающий поток газа в трещине, имеют вид

$$P(x_1 = 0, t) = P_*, \quad u(x_1 = 0 \pm 0, t) = \pm u_* \quad (1.7)$$

( $P_*$ ,  $u_*$  — постоянные). Для описания движения в трещине дозвукового потока газа ( $u_* < c$ ) достаточно одного граничного условия, например первого из (1.7), при сверхзвуковом втекании газа ( $u_* > c$ ) необходимы оба условия (1.7) [10].

**2. Метод решения упругой задачи.** При автономном нагружении ( $P_0$ ,  $\tau_0$  — постоянные размерности напряжения,  $t_0$  — времени,  $l$  — целое неотрицательное число)

$$P(x_1, t) = P_0 \cdot (t/t_0)^{l-1} P(\xi); \quad \tau(x_1, t) = \tau_0 \cdot (t/t_0)^{l-1} \tau(\xi); \quad \xi = x_1/(vt) \quad (2.1)$$

решение краевой задачи (1.3)—(1.6) будем искать методом функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [3, 4].

Введем функции, однородные относительно переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$ ,

$$U_\alpha = \partial^l u_\alpha / \partial t^l, \quad V_\alpha = \partial^l v_\alpha / \partial t^l; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.2)$$

(величины  $U_\alpha$  удовлетворяют волновому уравнению для продольных волн,  $V_\alpha$  — для поперечных волн).

Представляя  $U_\alpha$ ,  $V_\alpha$  как вещественные части аналитических функций от комплексных переменных  $z_1$ ,  $z_2$  и подставляя их в уравнения (1.3), (1.4), получим ( $k = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l \sigma_{12}}{\partial t^l} &= \mu \operatorname{Re} \left\{ 2 (U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (1 - \omega_2^2) (V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial x_1} \right\} \\ \frac{\partial^l \sigma_{11}}{\partial t^l} &= \mu \operatorname{Re} \left\{ [\chi^2 (1 + \omega_1^{-2}) - 2] (U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial x_2} - 2 (V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \right\} \\ \frac{\partial^l \sigma_{22}}{\partial t^l} &= \mu \operatorname{Re} \left\{ [\chi^2 (1 + \omega_1^{-2}) - 2\omega_1^{-2}] (U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + 2 (V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \right\} \\ \operatorname{Re} U_k^l(z_1) &= U_k \left( \frac{x_1}{c_1 t}, \frac{x_2}{c_1 t} \right), \quad \operatorname{Re} V_k^l(z_2) = V_k \left( \frac{x_1}{c_1 t}, \frac{x_2}{c_1 t} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$z_k^{-1} = \frac{1}{c_k} \operatorname{ch} \left\{ \operatorname{arch} \frac{1}{\xi_k} - i\varphi \right\}, \quad \xi_k = \frac{r}{c_k t}$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} z_k = -z_k \frac{\partial}{\partial x_1} z_k = -\frac{1}{\sqrt{c_k^{-2} - z_k^{-2}}} \frac{\partial z_k}{\partial x_2} = \frac{z_k^2 \sqrt{c_k^{-2} - z_k^{-2}}}{x_2 z_k^{-1} - x_1 \sqrt{c_k^{-2} - z_k^{-2}}}$$

$$(U_1^l)' = \omega_1^{-1} (U_2^l)', \quad (V_1^l)' = -\omega_2 (V_2^l)', \quad \omega_k = z_k \sqrt{c_k^{-2} - z_k^{-2}}$$

Представление (2.3) для аналитических функций  $U_k^l$ ,  $V_k^l$  совпадает с общепринятым [3] при замене  $z_k$  на  $1/z_k$ .

Вместо аналитических функций  $U_2^l$  и  $V_2^l$  введем функции  $W$  и  $G$ , связанные с ними при  $x_2 = 0$  ( $z_1 = z_2 = z$ ) соотношениями

$$\begin{aligned} dU_2^l/dz &= G'(z) + [1 - 2(c_2/z)^2]W' \\ dV_2^l/dz &= 2(c_2/z)^2W' \end{aligned} \quad (2.4)$$

После подстановки  $(V_2^l)'$ ,  $(U_2^l)'$  в выражения (2.3) получим

$$\frac{\partial^l \sigma_{12}}{\partial t^l} = \frac{2\mu}{t} \operatorname{Re} G', \quad \frac{\partial^l \sigma_{22}}{\partial t^l} = - \frac{\mu z R(z)}{t c_2^{-2} \sqrt{z^{-2} - c_1^{-2}}} \operatorname{Im} \left\{ W' + \frac{c_2^{-2} (c_2^{-2} - 2z^{-2})}{R(z)} G' \right\}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^l w_2}{\partial t^l} = \operatorname{Re} \{W + G\} \quad R(z) = (c_2^{-2} - 2z^{-2})^2 - 4z^{-2} \sqrt{z^{-2} - c_1^{-2}} \sqrt{z^{-2} - c_2^{-2}}$$

Сформулируем краевую задачу для аналитических функций  $W'$  и  $G'$  на плоскости  $z = 0$  при учете (2.5) ( $\operatorname{Im} z = 0 \pm 0$ )

$$v < |z| < c_1, \quad \operatorname{Re}'_{\pm} = 0, \quad \operatorname{Re} W'^{\pm} = 0 \quad (2.6)$$

$$|z| < v, \quad \operatorname{Re} G'^{\pm} = 1/2 \mu^{-1} t \partial^l \tau / \partial t^l$$

$$\operatorname{Im} \{W' + c_2^{-2} (c_2^{-2} - 2z^{-2}) R^{-1}(z) G'\}^{\pm} = \pm t \mu^{-1} c_2^{-2} \sqrt{z^{-2} - c_1^{-2}} - c_1^{-2} R^{-1}(z) z^{-1} \partial^l P / \partial t^l$$

Обычно при решении автомодельных плоских динамических задач о распространении трещин ставится граничное условие равенства нулю касательных напряжений на берегах трещин [3, 4]. В этом случае общее решение краевой задачи о трещине нормального отрыва удастся выразить через одну аналитическую функцию. В задаче о расклинивании трещины потоком газа при учете взаимодействия стенок трещины с потоком на ее берегах приходится одновременно задавать как нормальные, так и касательные напряжения. При этом общее решение краевой задачи (2.6) не выражается через одну аналитическую функцию. Если касательные напряжения на берегах трещины малы (например, при небольших скоростях расклинивающего потока газа)  $\tau(x_1, x_2 = 0, t) \approx 0$ ,  $|x_1| < vt$ , то  $G \approx 0$  и краевая задача (2.6) сводится к обычной краевой задаче, содержащей только одну аналитическую функцию  $W$ .

Для решения смешанной краевой задачи (2.6) используем формулы Келдыша — Седова

$$\begin{aligned} G' &= \frac{t}{2\pi\mu i} \int_{-v}^v ds \frac{\partial^l \tau / \partial t^l}{s - z} + \frac{1}{(z^2 - v^2)^{l+1/2}} \sum_{j=0}^{2l-1} B_j z^j \\ W' &= - \frac{c_2^{-2} (c_2^{-2} - 2z^{-2})}{R(z)} G' + \frac{1}{(z^2 - v^2)^{l+1/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{t c_2^{-2}}{\pi\mu} \int_{-v}^v ds \frac{(s^2 - v^2)^{l+1/2} \sqrt{s^{-2} - c_1^{-2}}}{s R(s) (s - z)} \frac{\partial^l}{\partial t^l} P + i \sum_{j=0}^{2l-1} A_j z^j \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение (2.7) содержит  $4l$  постоянных  $A_j$ ,  $B_j$  ( $j = 0, \dots, 2l - 1$ ), значения которых могут быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \sigma_{22} (\pm vt \mp 0, 0, t) = - \frac{\partial^j}{\partial t^j} P (\pm vt, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \sigma_{12} (\pm vt \mp 0, 0, t) = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \tau (\pm vt, t)$$

Для задач, обладающих симметрией относительно оси  $x_1 = 0$ , количество подлежащих определению постоянных уменьшается.

**3. Автомодельная задача.** При постоянной скорости распространения трещины задача (1.1)–(1.7) допускает автомодельное решение ( $l = 1$ ).

Давление, скорость газа и раскрытие трещины при этом представляются через безразмерные функции автомодельной переменной

$$P(x_1, t) = P_0 P_a(\xi), \quad u(x_1, t) = v u_a(\xi), \quad w(x_1, t) = w_0 t w(\xi) \quad (3.1)$$

$$w_0 = \lambda_s v \varepsilon / 4, \quad \varepsilon = (v/c)^2, \quad N = \sigma / P_0, \quad \xi = x_1 / (vt)$$

Уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.7), записанные в автомодельных переменных, имеют вид (далее индекс  $a$  у автомодельных переменных опущен)

$$d \ln P / d\xi = -\varepsilon (u - \xi) du / d\xi - u^2 / w \quad (3.2)$$

$$du / d\xi = \{(u - \xi) w^{-1} [u^2 - dw / d\xi] - 1\} [1 - \varepsilon (u - \xi)^2]^{-1}$$

$$P(\xi = 0) = P_* / P_0, \quad u(\xi = 0 \pm 0) = \pm u_* / v \quad (3.3)$$

Условия Гюгонио для изотермического газа в автомодельных переменных могут быть представлены в виде

$$[P(u - \xi)] = 0, \quad [P + \varepsilon P(u - \xi)^2] = 0 \\ ([f] = f(\xi + 0) - f(\xi - 0))$$

Для давления газа в трещине  $P$ , касательного напряжения на ее берегах  $\tau = \lambda_s \rho u |u| / 8$  и раскрытия трещины выполняются следующие условия симметрии относительно оси  $\xi = 0$ :

$$P(-\xi) = P(\xi), \quad \tau(-\xi) = -\tau(\xi), \quad w(-\xi) = w(\xi) \quad (3.4)$$

Из условий симметрии следует, что при  $l = 1$  в выражения (2.7) входит только постоянная  $A_1$  ( $A_0 = B_0 = B_1 = 0$ ).

При учете (3.4) аппроксимируем давление  $P$  и касательное напряжение  $\tau$  конечными суммами ( $\delta_0$  — функция Хевисайда)

$$P(x_1, t) \approx P_0 \sum_{j=1}^M P_j [\delta_0(\xi_j - \xi) - \delta_0(-\xi_j - \xi)] \quad (3.5)$$

$$\tau(x_1, t) \approx \lambda_s \varepsilon P_0 / 8 \sum_{j=1}^M \tau_j [\delta_0(\xi_j - \xi) - 2\delta_0(-\xi) + \delta_0(-\xi_j - \xi)]$$

Уравнения теории упругости линейны, поэтому раскрытие трещины и КИН также аппроксимируются конечными суммами

$$w(\xi) \approx \sum_{j=1}^M [P_j w^{1j}(\xi) + \tau_j w^{2j}(\xi)] \quad (3.6)$$

$$K_I(t) \approx \sum_{j=1}^M [P_j K_I^{1j}(t) + \tau_j K_I^{2j}(t)]$$

Найдем  $w^{\alpha l}(\xi)$ ,  $K_I^{\alpha l}(t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) для частного случая нагружения (3.5):  $P_j = P_l \delta_{jl}$ ;  $\tau_j = \tau_l \delta_{jl}$ ;  $j = 0, \dots, M$  (по  $l$  суммирование нет).

Подставив нагрузку (3.5) при  $P_j = P_l \delta_{jl}$ ,  $\tau_j = \tau_l \delta_{jl}$  в выражения (2.7)  $l = 1$ ,  $A_0 = B_0 = B_1 = 0$  и проинтегрировав их по  $z$  и  $t$  при учете условий (1.4), получим

$$w(\xi) = P_l w^{1l}(\xi) + \tau_l w^{2l}(\xi), \quad K_I(t) = P_l K_I^{1l}(t) \quad (K_I^{2l} \equiv 0) \quad (3.7)$$

$$w^{1l}(\xi) = \sigma_1 \sqrt{1 - \xi^2} - \sigma_2 \kappa(\xi) [\xi_l^2 \sqrt{1 - \xi_l^2}]^{-1}$$

$$\kappa(\xi) = |\xi| \ln \frac{|1 - \zeta \xi_l / |\xi||}{1 + \zeta \xi_l / |\xi|} - \xi_l \ln \frac{|1 - \zeta|}{1 + \zeta}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - \xi_l^2}}$$

$$w^{2l}(\xi) = \frac{P_0 v}{\pi \mu w_0} \frac{\alpha_s}{R_1(\xi_l)} [2(2 - m^2 \xi_l^2) - 4 \sqrt{1 - n^2 \xi_l^2} \sqrt{1 - m^2 \xi_l^2}] \times \\ \times (\xi_l - |\xi|) \delta_0(\xi_l^2 - \xi^2)$$

$$K_I^{1l}(t) = -\sigma_1 R_1(1) \frac{\mu w_0}{c_1 n m^2} \sqrt{\frac{\pi w t}{1-n^2}}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{K(1-\xi_l^2) + 2\xi_l}{\xi_l^2}, \quad \sigma_2 = \frac{P_0 v}{\pi \mu w_0} \frac{m^2 \xi_l^4}{R_1(\xi_l)} \sqrt{1-n^2 \xi_l^2} \sqrt{1-m^2 \xi_l^2}$$

$$n = v/c_1, \quad m = v/c_2, \quad \alpha_s = \pi \lambda_s \varepsilon / 16, \quad R_1(\xi) = \xi_l^4 v^4 R(\xi)$$

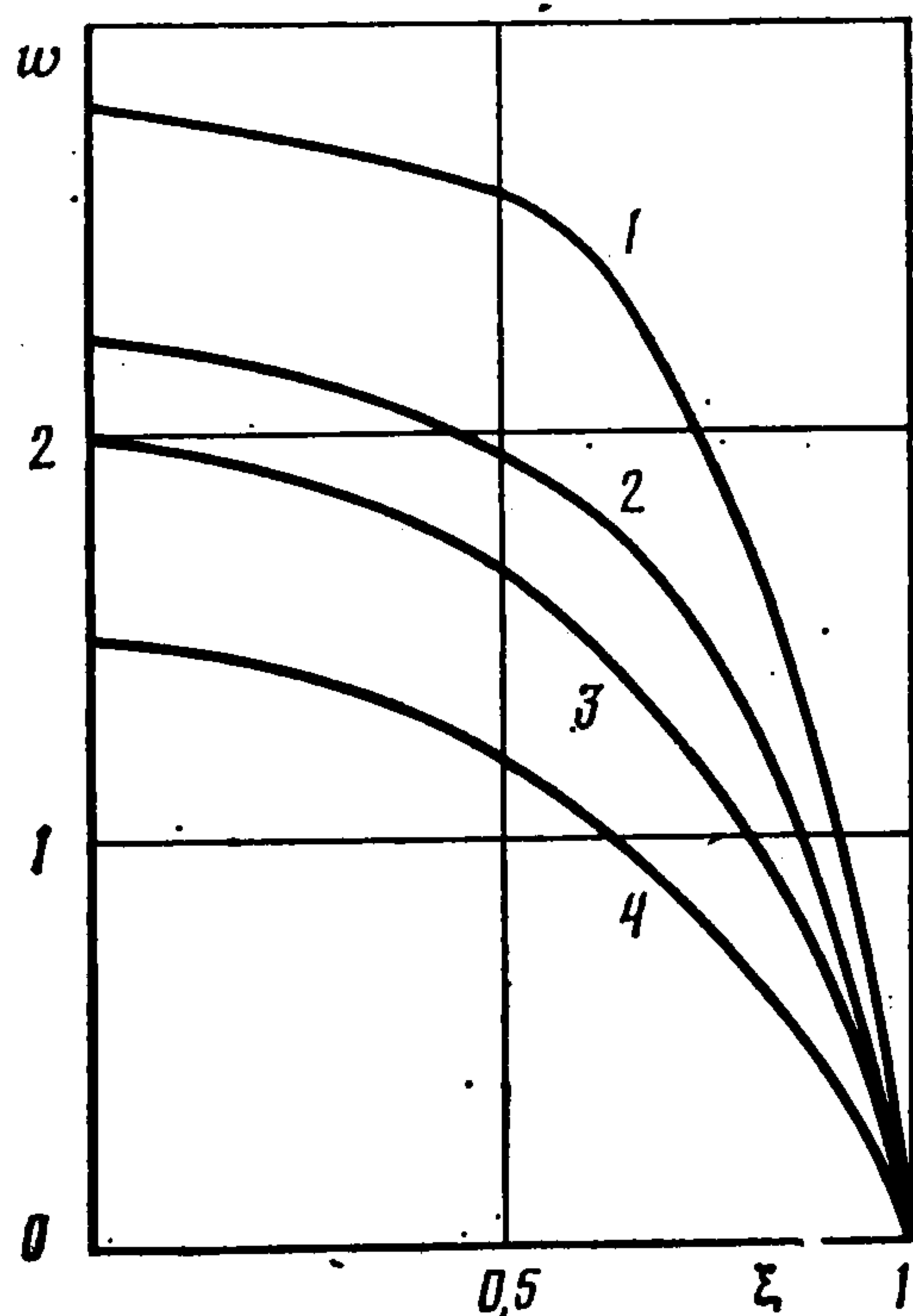
Постоянная  $K$  выражается через полные эллиптические интегралы [5].

При пренебрежении силами трения между потоком и стенками трещин  $\tau(x_1, t) = 0$  ( $\tau_l = 0$ ) решение динамической автомодельной задачи о распространении трещины гидроразрыва в упругом пространстве было получено [5].

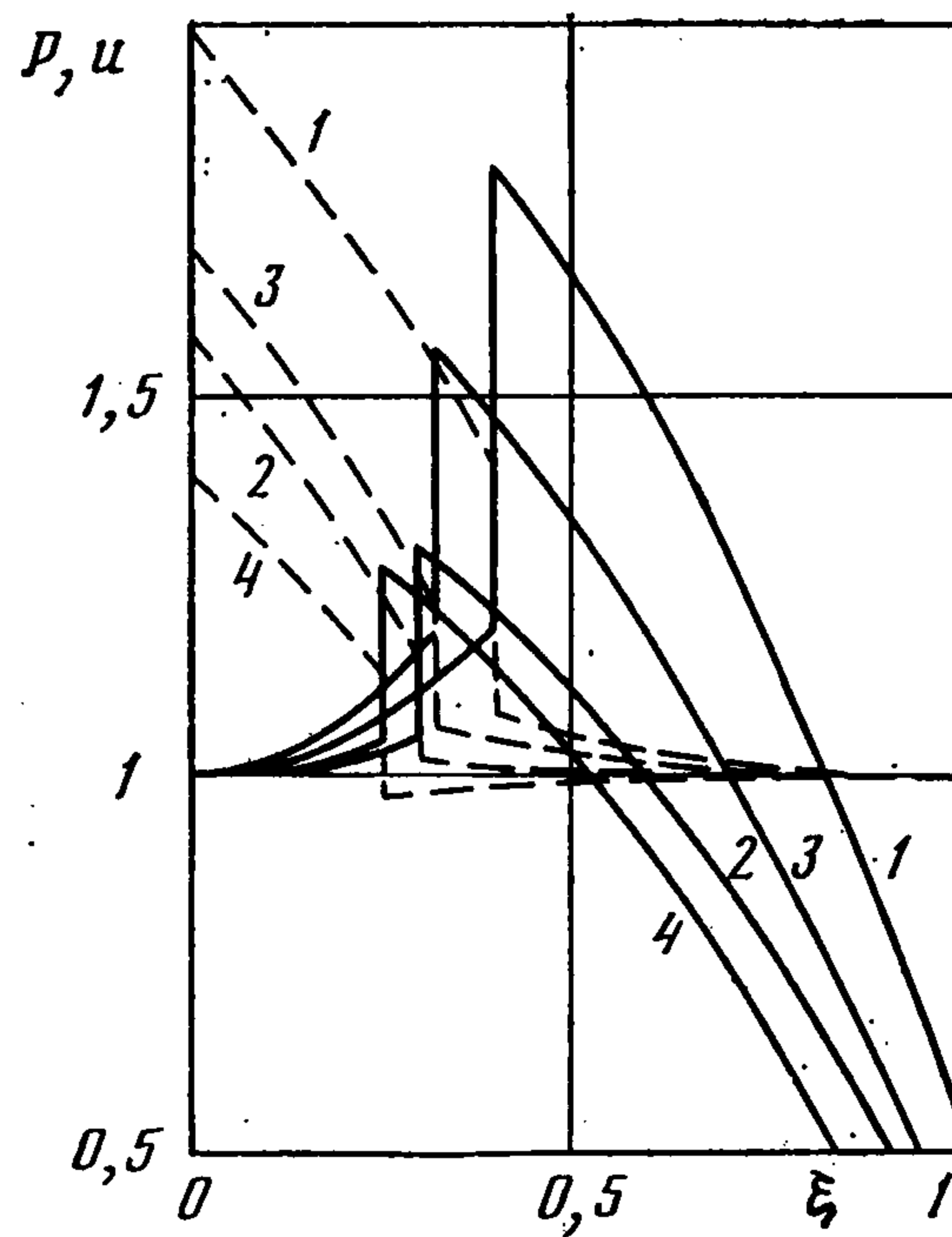
Из (3.7) следует, что, как и в статическом решении, при нагрузке, удовлетворяющей условиям симметрии (3.4), касательное напряжение  $\tau$  непосредственного вклада в КИН не дает. Однако, поскольку раскрытие трещины зависит от касательных напряжений на ее берегах  $\tau$ , через уравнения движения (3.2) они будут влиять на распределение давления газа в трещине, а следовательно, и на КИН.

Задача о расклинивании трещины потоком газа (3.2), (3.3) решалась численно. Численный метод решения основан на использовании разложений (3.5), (3.6) [5].

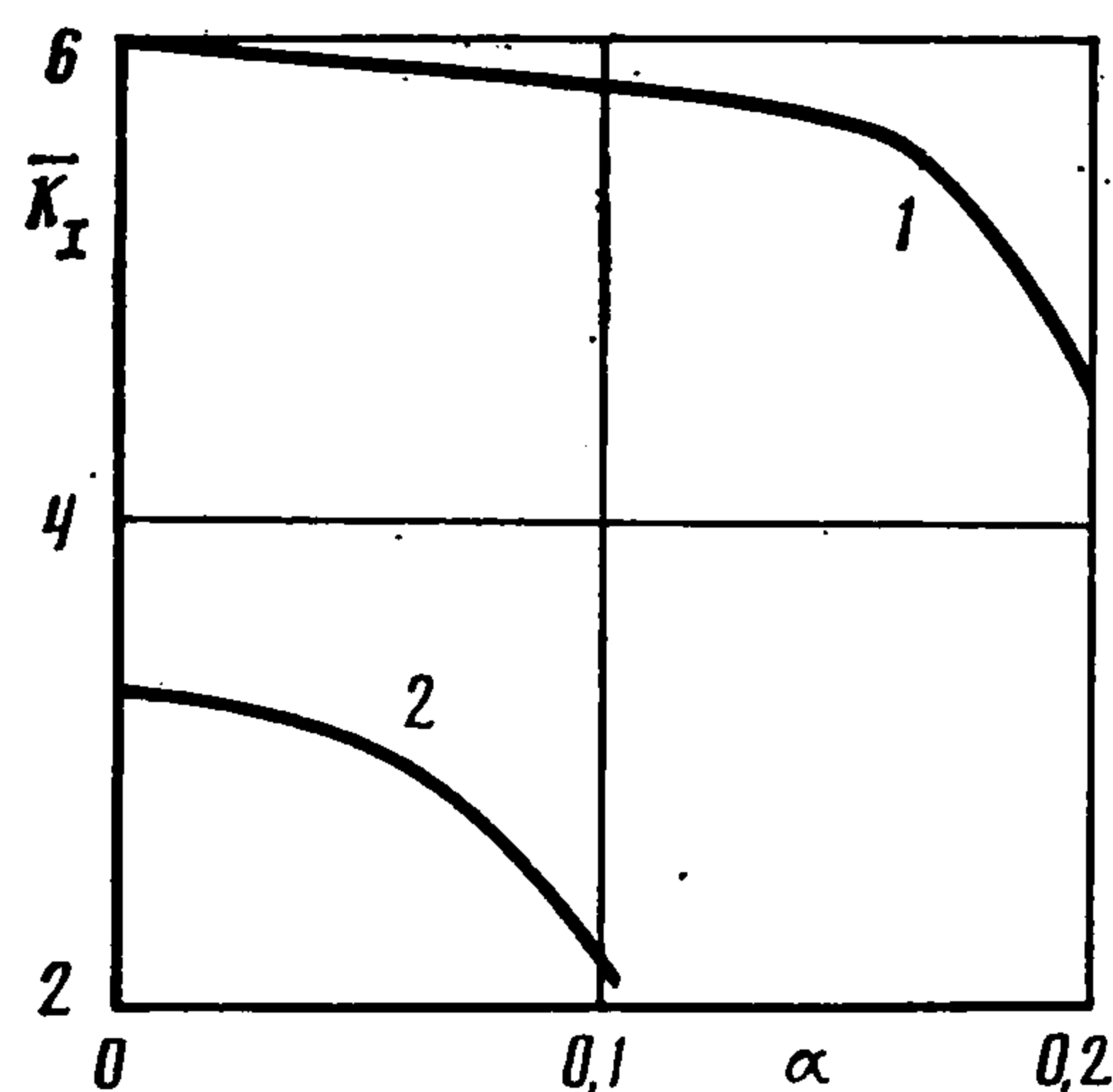
На фиг. 1–3 приведены некоторые результаты расчетов в зависимости от безразмерных параметров  $\varepsilon = 2,25$ ;  $n = 0,2$ ;  $m = 0,3$  при  $P_0 / (\pi \mu \varepsilon \lambda_s) = 1$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Раскрытие трещины  $w$ , давление  $P$  и скорость движения газа в трещине  $u$  представлены на фиг. 1, 2. Кривые 1, 2 отвечают значениям  $N = 0$ ;  $\alpha_s = 0$  (1),  $\alpha_s = 0, 2$  (2); кривые 3, 4 —  $N = 0,3$ ,  $\alpha_s = 0$  (3),  $\alpha_s = 0,1$  (4).

Безразмерный параметр  $\alpha$ , пропорциональный квадрату отношения скорости распространения трещины к скорости звука в газе и обратно пропорциональный коэффициенту сопротивления, характеризует силы трения, возникающие между расклинивающим потоком газа и берегами трещины. При импульсном гидроразрыве, когда трещина расклинивается сверхзвуковым потоком газа, как видно из фиг. 1, 2, силы трения начинают оказывать существенное влияние на профиль трещины  $w$  и на распределение давления  $P$  газа в потоке. Кроме того, при сверхзвуковых скоростях втекания газа в трещину в потоке газа образуется ударная волна торможения [5]. С увеличением параметра  $\alpha$  увеличиваются касательные напряжения на берегах трещины, а раскрытие трещины уменьшается. При этом увеличивается гидравлическое сопротивление трещины, что приводит к вытеснению ударной волны торможения из трещины и более быстрому падению давления газа вдоль трещины, а следовательно, и к уменьшению КИН. На фиг. 3 показана зависимость  $\bar{K}_I = [K_I / (P_0 \sqrt{\pi vt})] \times 10^2$  при  $N = 0$  (кривая 1) и  $N = 0,3$  (кривая 2).

Таким образом, при импульсном гидроразрыве пласта и разрушении среды взрывом силы трения, возникающие между потоком газа и берегами трещины, могут оказать существенное влияние на динамику распространения трещин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 667—682.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475—486.
3. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 618—639.
4. Шер Е. Н. О напряженном состоянии растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза, нагружаемого изнутри сосредоточенными силами // ПМТФ. 1980. № 1. С. 154—163.
5. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А. Динамика роста трещины нормального отрыва при расклинивании ее потоком газа // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 311—317.
6. Гордеев Ю. Н. Автомодельные задачи о развитии звездообразной трещины под действием расклинивающего потока газа // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 333—338.
7. Беляев Б. М., Васильев С. А., Николаев С. И. Разрыв пласта давлением пороховых газов // М.: ВНИИОЭНГ, 1967. 63 с.
8. Михалюк А. В. Торпедирование и импульсный гидроразрыв пластов. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
9. Костров Б. В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

Москва

Поступила в редакцию  
30.V.1989