Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 539.375

Ле Ханъ Чау

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Формулируется энергетический критерий равновесия нелинейно упругого тела с щелью. Выводятся уравнения статики и условия, которые должны выполняться на внешней границе тела, на поверхности и на краю щели. Постулируется эволюционное вариационное неравенство; из него следует постановка динамической задачи о движении тела с распространяющейся трещиной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое упругое тело, имеющее в своем естественном состоянии дефект, который может быть моделирован поверхностью разрыва перемещений, называемый в дальнейшем щелью. Пусть эта щель расположена на гладкой двумерной поверхности Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Естественную конфигурацию тела, занимающую область $V_\Omega = V \setminus (\Omega \bigcup \partial\Omega)$ трехмерного евклидова пространства, примем за отсчетную конфигурацию. Декартовы координаты частиц тела в этой конфигурации обозначим X_a, $a = 1, 2, 3$. В деформированном состоянии частицы будут иметь декартовы координаты, заданные уравнениями

$$x_i = x_i (X_1, X_2, X_3), \quad i = 1, 2, 3$$

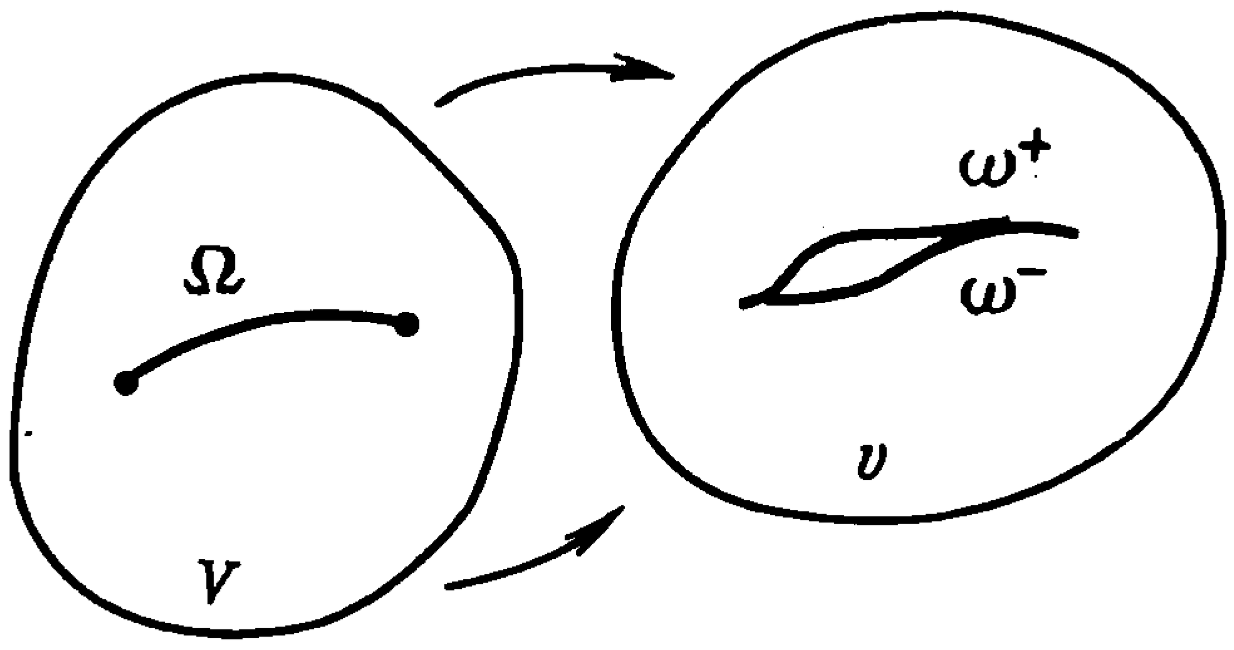
Координаты x_i заполняют область v актуальной конфигурации. Если деформированное тело с щелью находится в равновесии, то функции x_i (X_a) осуществляют взаимно однозначное отображение с положительным якобианом. При прохождении X_a через Ω функции x_i терпят разрыв. Следы x_i (X_a) на двух сторонах Ω описывают поверхности щели в деформированном состоянии (фиг. 1).

Первая проблема состоит в установлении критерия равновесия конфигурации x_i (X_a). С этой целью сформулируем следующий вариационный принцип: для того, чтобы деформированное тело с щелью находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы вариация энергии тела, взятая в данной конфигурации, была больше или равна нулю для всех допустимых конфигураций. Виртуальная конфигурация тела будет называться допустимой, если ее поверхность разрыва перемещений содержит или совпадает с Ω.

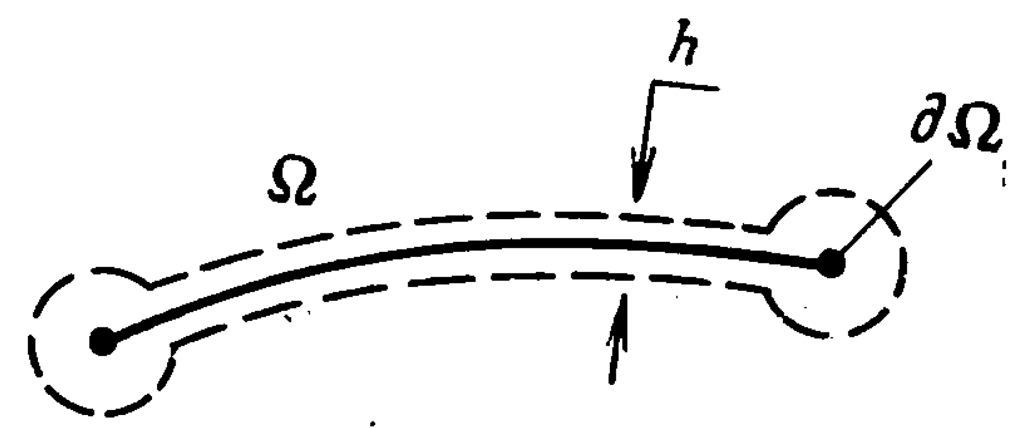
Если тело не содержит щели, то сформулированный критерий равновесия в классе всех непрерывных конфигураций сводится к известному принципу стационарности энергии нелинейно упругого тела [1—3]. Для других механических систем общность энергетического критерия равновесия убедительно продемонстрирована Гиббсом [4]. Истоки обобщения этого критерия на механику разрушения хрупкого тела с щелью находятся в работах Гриффитса [5, 6]. Для нахождения критической длины щели (в плоской задаче) Гриффитс дифференцировал полную энергию тела, включающую поверхностную энергию щели, по длине щели и приравнивал ее нулю. Дальнейшее развитие его идеи нашло отражение в многочисленных публикациях (например, [7—12]).

В предлагаемой работе сформулированный критерий применяется для нахождения уравнений статики и граничных условий в задаче о равновесии геометрически и физически нелинейного упругого тела с щелью. Отметим, что ограничение на допустимые конфигурации в энергетическом критерии запрещает телу вернуться в состояние с «излеченной» щелью. Поэтому теория имеет выраженный характер неголономности и необратимости. Как следствие, условие равновесия (или нераспространения) щели заключается в том, чтобы модуль трансверсального потока энергии, поступающей к краю щели, был меньше или равен удвоенной плотности поверхностной энергии. При линеаризации это условие сводится к известному условию Г. П. Черепанова [7, 8].

Если условие равновесия не выполняется ни для одной конфигурации, то щель превращается в распространяющуюся трещину. Задача о движении тела с трещиной даже в материальном описании представляет собой задачу с изменяющейся внутренней границей. При этом имеем типичную механическую систему с освобождающимися связями. Наиболее подходящий способ описания таких систем — эволюционное вариационное неравенство [13, 14]. В случае тела с трещиной полезно начать рассмотрение вариационного неравенства с анализа уравнения баланса энергии. После такого



Фиг. 1



Фиг. 2

анализа станет понятным, почему в эволюционное вариационное неравенство теории разрушения, кроме работы даламберовой силы инерции, должен входить поток кинетической энергии. Постулируя эволюционное вариационное неравенство, надо еще потребовать, чтобы оно перешло в уравнение баланса энергии, если возможные вариации заменяются действительными скоростями [2, 3]. Только тогда можно найти полную систему соотношений, необходимых для постановки динамической задачи.

2. Критерий равновесия. Итак, если исходить из сформулированного выше критерия равновесия, то постановка краевой задачи о равновесии упругого тела, с щелью сводится к заданию его энергии на всех допустимых конфигурациях, у которых поверхности несплошности могут отличаться от Ω. Пусть некоторая произвольная конфигурация x_i (X_a) имеет поверхность несплошности Σ. По аналогии с гриффитсовской теорией постулируем следующее выражение для функционала энергии тела

$$E = \int\limits_{V_\Sigma} U(x_{i,a}, K_B)\,dX + \int\limits_{\Sigma} 2\gamma\,dA + \int\limits_{V_\Sigma} \rho_0 \Phi(x_i)\,dX - \int\limits_{\partial V_T} T_i x_i\,dA \tag{2.1}$$
$$V_\Sigma = V \setminus (\Sigma \cup \partial\Sigma) \quad \partial V = \partial V_x \cup \partial V_T$$

Здесь dX и dA — элементы объема и площади соответственно, ρ_0 — плотность массы материала в естественном состоянии, U $(x_{i,a}, K_B)$ — объемная плотность внутренней энергии, γ — плотность поверхностной энергии. Тензор $x_{i,a} = \partial x_i / \partial X_a$ соответствует градиенту места (дисторсии), тогда как K_B (X_a) $(B = 1, \ldots, N)$ — характеристикам материала (типа модулей упругости). Потенциал массовой силы обозначается Φ (x_i), а T_i — «мертвая» нагрузка, действующая на участке ∂V_T внешней границы тела. На остальной части внешней границы ∂V_x положение частиц считается заданным: $x_i = r_i$ (X_a). Здесь и в дальнейшем малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, запятой перед индексом обозначается частная производная по X_a, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Согласно энергетическому критерию конфигурация тела x_i (X_a) с поверхностью несплошности Ω будет равновесной, если для всех допустимых конфигураций $y_i = y_i\,(X_a,\,\varepsilon)$ с поверхностями несплошности $\Omega^\varepsilon \supset \Omega$, удовлетворяющих ограничениям $y_i\,(X_a,\,0) = x_i\,(X_a)$ и $y_i\,(X_a,\,\varepsilon) = r_i\,(X_a)$ при $X_a \in \partial V_x$ будет выполнено следующее неравенство

$$\delta E = dE\,[y_i\,(X_a,\,\varepsilon)]\,/\,d\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Для вывода следствия из (2.2) нужно вычислить δE. Поскольку поверхности несплошности у допустимых конфигураций могут отличаться от Ω, когда $\varepsilon \neq 0$, то для вычисления δE удобно ввести взаимно однозначное отображение V на V по правилу $Y_a = Y_a\,(X_a,\,\varepsilon)$, такому, что поверхность Ω при этом перейдет в Ω^ε, а кроме этого $Y\,(X_a,\,\varepsilon) = X_a$ при $\varepsilon = 0$ и при $X_a \in \partial V$ (внешняя граница фиксирована по частицам).

Сначала отдельно вычислим вариацию внутренней энергии

$$\delta U = \delta \int\limits_{V_\Omega} U\,(y_{i,a'},\,K_B) \det|\,Y_{a,b}\,|\,dX = \int\limits_{V_\Omega} [T_{ai}\delta\,(y_{i,a'}) + (\partial U/\partial K_B)\,K_{B,a}\delta Y_a + U\delta Y_{a,a}]$$

Здесь и далее символ δ использован для обозначения частной производной по ε при $\varepsilon = 0$, $X_a = \mathrm{const}$; например $\delta Y_a = \partial Y_a\,(X_a,\,\varepsilon)/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0}$, $T_{ai} = \partial U\,/\,\partial x_{i,a}$ — тензор Пиолы — Кирхгоффа, $y_{i,a'} = \partial y_i/\partial Y_a$. Можно показать, что $\delta\,(y_{i,a'}) = \delta y_{i,a} - x_{i,b}\;\delta Y_{b,a}$, $\delta y_i = \partial y_i\,(Y_a\,(X_a,\,\varepsilon)\,\varepsilon)/\partial\varepsilon$.

Поэтому

$$\delta U = \int\limits_{V_\Omega} [T_{ai}\delta y_{i,a} + \mu_{ab}\delta Y_{a,b} + (\partial U/\partial K_B)\,K_{B,a}\delta Y_a]\,dX \tag{2.3}$$

где $\mu_{ab} = -T_{bi}x_{ia} + U\delta_{ab}$ — аналог тензора химического потенциала в теории фазового перехода [2, 4]. Поскольку $x_i\,(X_a)$ и другие функции терпят разрыв на Ω и могут иметь особенность в окрестности $\partial\Omega$, то с целью преобразования интеграла (2.3) сначала заменим область интегрирования V_Ω на V_h с внутренней границей Ω_h, отстоящей от $\partial\Omega$ на расстояние порядка h (фиг. 2).

Проинтегрировав соотношение (2.3) по частям, затем устремив h к нулю, получим

$$\delta U = \int\limits_{V_\Omega} [-T_{ai,a}\delta y_i + (-\mu_{ab,b} + (\partial U/\partial K_B)\,K_{B,a})\,\delta Y_a]\,dX + \int\limits_{\Omega} [\{T_{ai}\delta y_i\}\,N_a + \{\mu_{ab}\}\,N_b\delta Y_a]\,dA - \int\limits_{\partial\Omega} J_a\delta Y_a\,dS + \int\limits_{\partial V_T} T_{ai}\delta y_i N_a\,dA \quad (\{f\} = f^- - f^+) \tag{2.4}$$

Здесь dS — элемент длины, индексами плюс и минус обозначаются предельные значения соответствующих величин на двух сторонах Ω, N_a — вектор внешней нормали (на Ω он направлен в сторону, отмечаемую индексом плюс); наконец, J — вектор потока энергии, поступающей к краю щели, который вычисляется по формуле

$$J_a = \lim_{|\Gamma|\to 0} \int\limits_{\Gamma} \mu_{ab}\varkappa_b\,dS = \lim_{|\Gamma|\to 0} \int\limits_{\Gamma} (-T_{bi}x_{i,a}\varkappa_b + U\varkappa_a)\,dS \tag{2.5}$$

где замкнутый контур Γ, находясь на трансверсальной к $\partial\Omega$ плоскости, охватывает точку X_a на $\partial\Omega$ и стягивается к ней в пределе, когда длина контура $|\,\Gamma\,|$ стремится к нулю.

Интегралы (2.5) являются аналогами J — интеграла в геометрически линейной теории разрушения [7, 12]. Отметим, что при выводе соотношения (2.4) предполагается выполненным следующее асимптотическое поведение поля напряжения вблизи края щели:

$$\lim_{|\Gamma|\to 0}\int_\Gamma T_{ai}\varkappa_a\, dS = 0$$

Такое свойство имеет место, если порядок особенности у T_{ai} в окрестности $\partial\Omega$ меньше единицы.

Вариации остальных членов выражения (2.1) имеют вид

$$\begin{gathered}\delta\int_{\Omega^\varepsilon} 2\gamma\, dA = -\int_\Omega 4\gamma H N_a \delta Y_a\, dA + \int_{\partial\Omega} 2\gamma\nu_a\delta Y_a\, dS \\ \delta\int_{\partial V_T} T_i y_i\, dA = \int_{\partial V_T} T_i\delta y_i\, dA, \quad \delta\int_{V\Omega^\varepsilon}\rho_0\Phi(y_i)\, dX = \\ = \int_{V_\Omega}\rho_0 F_i(\delta y_i + x_{i,a}\delta Y_a)\, dX + \int_\Omega \rho_0\{\Phi\} N_a\delta Y_a\, dA\end{gathered}\tag{2.6}$$

где H — средняя кривизна поверхности Ω, $F_i = -\partial\Phi/\partial x_i$ — объемные силы, ν_a — вектор нормали к краю щели $\partial\Omega$. В силу указанного выше ограничения виртуальные поверхности несплошности Ω^ε всегда содержат Ω и стремятся к ней при $\varepsilon\to 0$. Если поверхности Ω^ε гладко продолжают Ω, то ν_a является одновременно касательным к Ω вектором. В общем случае это необязательно, и ν_a только указывает нормальное направление из $\partial\Omega$ в $\partial\Omega^\varepsilon$. Объединив соотношение (2.4), (2.6), приходим к формуле

$$\begin{gathered}\delta E = \int_{V_\Omega}[-(T_{ai,a}+\rho_0 F_i)\,\delta y_i + (-\mu_{ab,b} + (\partial U/\partial K_B)\, K_{B,a} + \rho_0 F_i x_{i,a})\,\delta Y_a]\, dX + \\ + \int_\Omega[\{T_{ai}\delta y_i\} N_a + (\{\mu_{ab}\} N_b - 4\gamma H N_a + \rho_0\{\Phi\} N_a)\,\delta Y_a]\, dA + \\ + \int_{\partial\Omega}(2\gamma\nu_a - J_a)\,\delta Y_a\, dS + \int_{\partial V_T}(T_{ai}N_a - T_i)\,\delta y_i\, dA\end{gathered}\tag{2.7}$$

Очевидно, что δy_i и δY_a могут принимать любые заданные значения в Ω так же, как и δy_i на ∂V_T. Поэтому из (2.2) и (2.7) вытекает, что

$$T_{ai,a} + \rho_0 F_i = 0, \quad T_{ai} = \partial U/\partial x_{i,a}\tag{2.8}$$

$$-\mu_{ab,b} + (\partial U/\partial K_B) K_{B,a} + \rho_0 F_i x_{i,a}\tag{2.9}$$

$$x_i = r_i(X_a)\ \text{на}\ \partial V_x, \quad T_{ai}N_a = T_i\ \text{на}\ \partial V_T\tag{2.10}$$

Отметим, однако, что уравнения (2.9) выполняются автоматически в силу уравнений (2.8).

Для вывода остальных соотношений обратимся к анализу ограничений, налагаемых на вариации δy_i, δY_a на Ω и $\partial\Omega$.

Если в деформированном состоянии берега щели не соприкасаются, то $\delta y_i^\pm$ могут принимать любые наперед заданные значения.

Предположим, что это не так. В таком случае обозначим Ω^+ и Ω^- подобласти Ω, точки которых после деформации находятся в контакте. Если ввести на поверхности Ω двумерную криволинейную систему координат, то условие контакта имеет вид

$$x_i^+(\eta_\alpha) = x_i^-(\theta_\alpha), \quad \eta_\alpha\in\Omega^+, \quad \theta^-_\alpha\in\Omega^-, \quad \alpha\in\{1, 2\}$$

Для точек η_α и θ_α можно показать, что имеет место неравенство

$$[\delta y_i^+(\eta_\alpha) - \delta y_i^-(\theta_\alpha)]\, n_i \geqslant 0$$

где n_i — общий вектор нормали к контактирующим поверхностям, направленный в сторону, помеченную индексом плюс. Кроме того, можно показать, что величины $\delta y_i^\pm x_{i,\alpha}$ могут принимать любые значения на Ω, где $x_{i,\alpha} = dx_i/\partial\eta_\alpha$. При скольжении берегов щели силы трения не учитываются.

Из предположения $\Omega^\varepsilon \supset \Omega$ вытекают следующие ограничения для функций δY_a: $\delta Y_a N_a = 0$ на Ω, $\delta Y_a \nu_a \geqslant 0$, $\delta Y_a \pi_a = \delta Y_a \tau_a$ на $\partial\Omega$, где τ_a и π_a — касательный вектор и бинормаль к $\partial\Omega$ соответственно.

Учитывая все перечисленные ограничения, из (2.2) и (2.7) получим следующие граничные условия:

$$T_{ai}^{\pm} N_a = 0 \text{ на } \Omega \setminus \Omega^{\pm}, \quad T_{ai} N_a x_{i,a} = 0 \text{ на } \Omega^{\pm} \tag{2.11}$$

$$T_{ai}^{+} N_a n_i \sqrt{a}\,\big|_{\eta_\alpha} = T_{ai}^{-} N_a n_i \sqrt{a}\,\big|_{\theta_\alpha} = -p \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega^{\pm} \tag{2.12}$$

$$\{\mu_{ab}\} N_b X_{a,\alpha} = 0 \text{ на } \Omega \tag{2.13}$$

$$|J_\alpha| = \sqrt{J_a J_a - J_3^2} \leqslant 2\gamma \tag{2.14}$$

$$(a = \det|a_{\alpha\beta}|, \quad a_{\alpha\beta} = X_{a,\alpha} X_{\alpha,\beta}, \quad X_{a,\alpha} = \partial X_a / \partial \eta_\alpha, \quad J_3 = J_a \tau_a)$$

Условие (2.13) выполняется тождественно в силу других ограничений.

Таким образом, соотношения (2.8), (2.10), (2.11), (2.12), (2.14) в совокупности составляют полную систему уравнений и граничных условий, которые должны быть удовлетворены для всякой равновесной конфигурации. Отметим, что условие нераспространения щели (2.14) отделяется от остальных соотношений. Поэтому при практическом решении задач можно сначала решить систему (2.8), (2.10), (2.11), (2.12), чтобы найти конфигурацию $x_i\,(X_a)$ и напряженное поле T_{ai}, а затем по формуле (2.5) вычислить J_a и проверить условие (2.14).

3. Эволюционное вариационное неравенство. Если ни одна конфигурация не удовлетворяет уравнениям (2.8) и граничным условиям (2.10), (2.11), (2.12), (2.14), то щель не может находиться в равновесии и становится распространяющейся трещиной. Поверхность несплошности тела в момент времени t обозначим Ω_t. В силу необратимости процесса распространения трещин необходимо налагать на Ω следующее ограничение: $\Omega_{t'} \supset \Omega_t$ для $t' > t$. Таким образом, даже в материальном описании имеем задачу с изменяющейся внутренней границей, не заданной заранее. Закон движения для тела с трещиной имеет вид

$$x_i = x_i\,(X_a, t), \quad X_a \in V_t = V \setminus (\Omega_t \cup \partial\Omega_t) \tag{3.1}$$

Чтобы найти уравнения движения для $x_i\,(X_a, t)$, полезно начать с анализа уравнения баланса энергии,

$$d\,(E + K)/dt = 0 \tag{3.2}$$

$$E = \int\limits_{V_t} U\,(x_{i,a}, K_B)\,dX + \int\limits_{\Omega_t} 2\gamma\,dA + \int\limits_{V_t} \rho_0 \Phi\,(x_i)\,dX -$$

$$- \int\limits_{\partial V_T} T_i x_i\,dA, \quad K = \frac{1}{2} \int\limits_{V_t} \rho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i\,dX \tag{3.3}$$

Функционал E описывает потенциальную энергию тела и поверхностную энергию трещины, а K — кинетическую энергию тела. Здесь $\dot{x}_i = \partial x_i\,(X_a, t)/\partial t$ — скорость частиц, остальные символы сохраняют описанный выше смысл. Поскольку E и K зависят от t через переменные области интегрирования, то для фиксации этих областей удобно ввести взаимно однозначные отображения V в V по правилу $X_a' = X_a'\,(X_a, t')$, такому, что поверхность Ω_t при этом перейдет в $\Omega_{t'}$; кроме того, $X_a'\,(X_a, t') = X_a$ при $t' = t$ и $X_a \in \partial V$. Функционал E зависит от t точно так же, как и от ε, поэтому для вычисления $\dot{E}$ нужно только заменить в формуле (2.7) δE на $\dot{E}$, δy_i на $\delta_t x_i$ и δY_a на $\dot{X}_a'$, где символ

δ_t означает производную сложной функции по t при фиксированном X_a:

$$\delta_t x_i = \partial x_i (X_a' (X_a, t'), t')/\partial t' |_{t'=t}$$

Этот символ введен здесь для того, чтобы подчеркнуть различие, например, между $\delta_t x_i$ и $x_i^{\cdot}$. Теперь вычислим $K^{\cdot}$:

$$K^{\cdot} = \frac{d}{dt'} \int\limits_{V_t} \frac{1}{2} \rho_0 x_i^{\cdot} x_i^{\cdot} \det \left| \frac{\partial X_a'}{\partial X_b'} \right| dX |_{t'=t} =$$

$$= \int\limits_{V_t} \delta_t \left(\frac{1}{2} \rho_0 x_i^{\cdot} x_i^{\cdot} \det \left| \frac{\partial X_a'}{\partial X_b'} \right| \right) dX = \int\limits_{V_t} \left(\rho_0 x_i^{\cdot} \delta_t x_i^{\cdot} + \frac{1}{2} \rho_0 x_i^{\cdot} x_i^{\cdot} X_{a,a}^{\prime\cdot} \right) dX \quad (3.4)$$

При замене координат скорость частиц имеет вид

$$x_i^{\cdot} = \partial x_i (X_a', t')/\partial t' |_{t'=t}$$

Видно, что

$$x_i^{\cdot} = \delta_t x_i - x_{i,a} X_a^{\prime\cdot}, \quad \delta_t x_i^{\cdot} = x_i^{\cdot\cdot} + x_{i,a}^{\cdot} X_a^{\prime\cdot} \quad (3.5)$$

где $x_i^{\cdot\cdot} = \partial^2 x_i (X_a, t)/\partial t^2$ — ускорение частиц. Подставив выражение (3.5) для $\delta_t x_i^{\cdot}$ в формулу (3.4) и проинтегрировав последний член по частям, получим

$$K^{\cdot} = \int\limits_{V_t} \rho_0 x_i^{\cdot\cdot} (\delta_t x_i - x_{i,a} X_a^{\prime\cdot})\, dX + \int\limits_{\partial\Omega_t} Q_a X_a^{\prime\cdot}\, dS \quad (3.6)$$

$$Q_a = \lim_{|\Gamma_t| \to 0} \int\limits_{\Gamma_t} \frac{1}{2} \rho_0 x_i^{\cdot} x_i^{\cdot} \varkappa_a\, dS$$

где Γ_t — замкнутый контур, находящийся на трансверсальной к $\partial\Omega_t$ плоскости и охватывающий точку X_a на $\partial\Omega_t$, $\varkappa_a$ — вектор внешней нормали к Γ_t. Вектор Q_a имеет смысл потока кинетической энергии, поступающей к краю трещины. Таким образом, закон сохранения энергии для тела с трещиной имеет вид

$$d(E+K)/dt = \int\limits_{V_t} [(\rho_0 x_i^{\cdot\cdot} - T_{ai,a} - \rho_0 F_i)\, \delta_t x_i + (-\mu_{ab,b} + (\partial U/\partial K_B)\, K_{B,a} +$$

$$+ \rho_0 F_i x_{i,a} - \rho_0 x_i^{\cdot\cdot} x_{i,a})\, X_a^{\prime\cdot}]\, dX + \int\limits_{\Omega_t} [\{T_{ai} \delta_t x_i\}\, N_a + \{\mu_{ab}\}\, N_b X_a^{\prime\cdot}]\, dA +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega_t} (2\gamma\nu_a - I_a)\, X_a^{\prime\cdot}\, dS + \int\limits_{\partial V_t} (T_{ai} N_a - T_i)\, \delta_t x_i\, dA \quad (3.7)$$

$$I_a = \lim_{|\Gamma_t| \to 0} \int\limits_{\Gamma_t} \left[-T_{bi} x_{i,a} \varkappa_b + \left(U + \frac{1}{2} \rho_0 x_i^{\cdot} x_i^{\cdot} \right) \varkappa_a \right] dS \quad (3.8)$$

В формуле (3.7) было учтено, что $N_a X_a^{\prime\cdot} = 0$ на Ω_t (это свойство — следствие того, что $\Omega_{t'} \supset \Omega_t$ для $t' > t$).

Приступим к рассмотрению эволюционного вариационного неравенства. Для этого введем в рассмотрение класс допустимых движений тела с трещиной $y_i (X_a, t, \varepsilon)$ с поверхностями несплошности Ω_t^{ε}, удовлетворяющими ограничениям $\Omega_t^{\varepsilon} \supset \Omega_t$ для всех t. Поскольку Ω_t^{ε} может отличаться от Ω_t, будем строить, как и раньше, отображение из V в V по правилу $Y_a = Y_a (X_a, t, \varepsilon)$ такому, что поверхность Ω_t при этом перейдет в Ω_t^{ε}, а также $Y_a (X_a, t, \varepsilon) = X_a$ при $\varepsilon = 0$ или при $X_a \in \partial V$.

Теперь сформулируем принцип виртуальной работы для тела с трещиной следующим образом: в действительном движении тела с трещиной эволюционное вариационное неравенство

$$\delta E + \int\limits_{V_t} \rho_0 x_i^{\cdot\cdot} (\delta y_i - x_{i,a} \delta Y_a)\, dX - \int\limits_{\partial\Omega_t} Q_a \delta Y_a\, dS \geqslant 0 \quad (3.9)$$

выполняется для всех моментов времени t и всех вариаций допустимых движений δy_i, δY_a. Более того, этот принцип требует, чтобы вариационное неравенство (3.9) превращалось в равенство, выражающее закон сохранения энергии, если в (3.9) δy_i и δY_a заменяются на $\delta_t x_i$ и $X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}$. Здесь символ δ означает частную производную по ε при фиксированных X_a, t, взятую при $\varepsilon = 0$:

$$\delta y_i = \partial y_i \left(Y_a \left(X_a, t, \varepsilon\right), t, \varepsilon\right)/\partial\varepsilon \,|_{\varepsilon=0}$$
$$\delta Y_a = \partial Y_a \left(X_a, t, \varepsilon\right)/\partial\varepsilon \,|_{\varepsilon=0}$$

В (3.9) функционал E зависит от допустимых функций $y_i\,(X_a, t, \varepsilon)$ с поверхностями разрыва Ω_t^ε следующим образом:

$$E = \int\limits_{V_t^\varepsilon} U\left(y_{i,a}, K_B\right) dX + \int\limits_{\Omega_t^\varepsilon} 2\gamma\, dA + \int\limits_{V_t^\varepsilon} \rho_0 \Phi\, dX - \int\limits_{\partial V_T} T_i y_i\, dA$$
$$V_t^\varepsilon = V \diagdown \left(\Omega_t^\varepsilon \cup \partial\Omega_t^\varepsilon\right)$$

Вектор потока кинетической энергии Q_a задан формулой (3.6). Сравнивая (3.6), (3.7) и (3.9), легко понять, почему в вариационном неравенстве (3.9) кроме обычной работы силы инерции присутствует поток кинетической энергии. Однако уравнение баланса энергии является лишь эвристическим соображением и в динамической теории разрушения уравнение (3.9) принимается за постулат.

Раскрывая вариацию энергии E в неравенстве (3.9), аналогично предыдущему получим, что сумма интегралов в (3.7) при замене $\delta_t x_i$ на δy_i и $X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}$ на δY_a неотрицательна. Это неравенство вместе с перечисленными ранее ограничениями на функции δy_i и δY_a приводит к соотношениям

$$T_{ai,\,a} + \rho_0 F_i = \rho_0 x_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}, \quad T_{ai} = \partial U/\partial x_{i,\,a} \text{ в } V_t$$
$$x_i = r_i\left(X_a\right) \text{ на } \partial V_x, \quad T_{ai} N_a = T_i \text{ на } \partial V_T$$
$$T_{ai}^{\pm} N_a = 0 \text{ на } \Omega_t \diagdown \Omega_t^{\pm}, \quad T_{ai}^{\pm} N_a x_{i,\alpha} = 0 \text{ на } \Omega_t^{\pm}$$
$$T_{ai}^{+} N_a n_i \sqrt{a}\,|_{\eta_\alpha} = T_{ai}^{-} N_a n_i \sqrt{a}\,|_{\theta_\alpha} = -p \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega_t^{\pm}$$
$$|\,I_\alpha\,| = \sqrt{I_a I_a - I_3^2} \leqslant 2\gamma \text{ на } \partial\Omega_t, \; I_3 = I_a \tau_a \tag{3.10}$$

где $\Omega_t^{\pm}$ — прообразы контактирующих берегов трещины в момент t, I_a — вектор потока энергии, заданный формулой (3.8).

Теперь используем вторую часть сформулированного принципа. Заменив δy_i, δY_a в вариационном неравенстве (3.9) на $\delta_t x_i$, $X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}$ и принимая во внимание соотношения (3.10), получим закон сохранения энергии в виде

$$\int\limits_{\Omega} \{T_{ai} \delta_t x_i\}\, N_a\, dA + \int\limits_{\partial\Omega_t} \left(2\gamma\nu_a - I_a\right) X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}\, dS = 0 \tag{3.11}$$

Здесь $X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}\nu_a$ определяет нормальную скорость распространения края трещины.

Из (3.11) следуют дополнительные соотношения

$$\begin{aligned} p > 0 &\Rightarrow \left[x_i^{\boldsymbol{\cdot}+}\left(\eta_\alpha\right) - x_i^{\boldsymbol{\cdot}-}\left(\theta_\alpha\right)\right] n_i = 0 \\ p = 0 &\Rightarrow \left[x_i^{\boldsymbol{\cdot}+}\left(\eta_\alpha\right) - x_i^{\boldsymbol{\cdot}-}\left(\theta_\alpha\right)\right] n_i \geqslant 0 \text{ на } \Omega_t^{\pm} \end{aligned} \tag{3.12}$$
$$|\,I_\alpha\,| < 2\gamma \Rightarrow X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}\nu_a = 0 \quad \text{(нет распространения)}$$
$$|\,I_\alpha\,| = 2\gamma \Rightarrow X_a'^{\boldsymbol{\cdot}}\nu_a \geqslant 0, \quad 2\gamma\nu_a = I_a - I_3\tau_a$$

Соотношения (3.10), (3.12) в совокупности составляют полную систему уравнений и граничных условий для определения движения тела с трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. *Бердичевский В. Л., Седов Л. И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 981—1000.
4. *Гиббс Дж. В.* Термодинамика: Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
5. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163—198.
6. *Griffith A. A.* The theory of rupture // Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech. Delft, 1924. Delft: Waltman, 1925. P. 55—63.
7. *Черепанов Г. П.* Распространение трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476—488.
8. *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. N. Y.: McGrow Hill, 1979. 952 p.
9. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
10. *Nilsson F.* A path-independent integral for transient crack problems // Intern. J. Solids and Struct. 1973. V. 9. № 9. P. 1107—1115.
11. *Atluri S. N.* Nishioka T. Nakagaki M. Recent studies of energy integrals and their applications // Proc. 6th Intern. Conf. on Fracture, New Delhi, India, 1984: Oxford, 1984. V. 1. P. 181—209.
12. *Rice J. R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E. Jour. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 379—386.
13. *Duvaut G., Lions I. L.* Les inequations en mecanique et en physique Paris: Dunod, 1972. 387 p.
14. Variational inequalities and complementary problems / Ed. Cottle R. W. N. Y.: Willey, 1980.

Поступила в редакцию
11.IV.1989

Вьетнам