

УДК 539.375

© 1990 г.

Е. А. Девяткин, И. В. Симонов

К ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Изучается напряженно-деформированное состояние сверхпроводника в статическом магнитном поле с точки зрения потенциальной возможности его разрушения. Учитывается лишь один силовой фактор — взаимодействие поля с поверхностными токами, порожденными магнитным полем (эффект Мейснера [1]). При наличии концентраторов напряжений (угловых точек, микротрещин, включений, ...) опасными могут оказаться сравнительно слабые магнитные поля, при которых образец не теряет свойства идеальной сверхпроводимости [1—3]. Однако постановка задачи сохраняет силу при переходе сверхпроводника в нормальную фазу (или просто для нормального проводника) в переменном сильном магнитном поле в условиях скин-эффекта и квазистатического механического состояния. При этом $t_1 \gg t_2$ — условие квазистатики, где t_1 и t_2 — характерные времена изменения магнитного поля и пробега волной деформации (объема или формы) характерного размера образца. Кроме того, при наличии многих факторов, что делает задачу многопараметрической и необозримой для анализа, целесообразно предварительно изучить влияние каждого из этих факторов по отдельности.

Подробно анализируются свойства решений плоских задач, в частности на примерах областей канонических форм: угол, цилиндр, образец с вырезом в форме эллипса. Приводится решение одной пространственной задачи для шара.

1. Постановка задачи. Идеальный сверхпроводник (область $\vartheta \in R^n$, $n = 2, 3$) окружает матрица из нормально проводящего металла или вакуум. Каждая среда однородна и изотропна по всем своим свойствам, линейно-упруга при механических воздействиях и обладает хрупкой прочностью. Область Ω (дополнение $\bar{\vartheta}$ до R^n), где содержится матрица, пронизывает магнитное поле напряженности \mathbf{H} от источников в этой же области и от индуцированных на поверхности раздела $\Gamma = \partial\vartheta$ токов при выполнении физических условий идеальной сверхпроводимости

$$|\mathbf{H}_\Gamma| < H_c(T), \quad T < T_c \quad (1.1)$$

где H_c , T_c — критические величины магнитного поля и температуры, T — температура композита. Поверхностные токи выталкивают магнитное поле из сверхпроводника: $\mathbf{H} = 0$ в области ϑ [1, 3]. Для сверхпроводника второго рода $H_c = H_{c1}$, где H_{c1} — нижнее значение критического поля. Смешанное состояние ($H_{c1} < |\mathbf{H}_\Gamma| < H_{c2}$), представляющее несомненный интерес для новых композитных сверхпроводников [2], здесь не рассматривается. Впрочем, полученные результаты можно использовать в качестве приближения и при $|\mathbf{H}_\Gamma| < H_{c1}$, пока поле слабо проникает в область ϑ . В условиях скин-эффекта [3] ограничения (1.1) снимаются.

Распределением поля \mathbf{H} и токов по глубине области ϑ пренебрегается. Такая идеализация тем более справедлива, чем меньше отношение h/L , где $h \lesssim 10^{-7}$ м — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, L — характерный линейный размер области ϑ [1, 3]. Конкретизировать источники магнитного поля не будем — невозмущенное поле (в отсутствие сверхпроводника) считаем известным априори.

Напряженность магнитного поля можно представить в виде суммы невозмущенного поля H_0 и поля H_* от сверхпроводника. Возмущенное поле H_* — безвихревое всюду в области Ω и можно ввести потенциал Φ . Результатом взаимодействия поля с токами является неотрицательное давление p на поверхность Γ со стороны проводника (касательные усилия равны нулю) [3].

Математическая постановка задачи 1 по определению поля H , плотности поверхностных токов j_Γ и давления p следует из уравнений Максвелла, условий $j = 0$ в области Ω , $H = 0$ в области ϑ , условия непрерывности нормальной компоненты вектора индукции $\mu\mu_0 H$ при переходе через границу Γ , связи скачка касательной компоненты вектора H с токами j_Γ и давлением [3], принципа суперпозиции и условия исчезновения возмущения в бесконечности (если ϑ — конечная область):

$$\Delta\Phi = 0, \quad H_* = \nabla\Phi \quad (\Omega), \quad H = H_0 + H_*$$

$$\partial\Phi/\partial\rho = -H_{0\rho} \quad (\Gamma), \quad \Phi(\infty) = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } H = j_\Gamma \delta(\rho) \Rightarrow j_\Gamma = H_\tau; \quad p = 1/2 \mu\mu_0 H_\tau^2 \quad (1.3)$$

Здесь ρ — координата по нормали к поверхности Γ , $H_{0\rho}$, H_τ — проекции на нормаль и на Γ , δ — дельта-функция и H понимаются в смысле обобщенных функций с носителями Γ и Ω [4], μ — магнитная проницаемость матрицы, μ_0 — магнитная постоянная.

Первое из равенств (1.3) служит для определения направления тока, второе (следствие из него) — дает величину этого тока. Для потенциала Φ отделяется задача Неймана для уравнения Лапласа. Затем поле H , токи j_Γ и давление p можно найти по формулам (1.2), (1.3).

Постановка задачи 1 корректна для гладкой поверхности Γ . При наличии угловых и конических точек у Γ следует поставить дополнительные условия в этих точках [5]. Они вытекают из соображения об интегрируемости плотности энергии $w = 1/2 \mu\mu_0 H^2$ и заключаются в следующих неравенствах для показателя особенности решения при $r \rightarrow 0$ (здесь r — расстояние до особой точки): $\Phi \sim r^\alpha$, $\alpha > 0$ — угловая точка, $\alpha > -1/2$ — коническая точка.

При $n = 2$ случай однокомпонентного поля $H = (0, 0, H_z)$, $H_z = H_z(x, y)$ следует рассмотреть отдельно. Тогда в силу следствия

$$\text{rot } H = 0 \Rightarrow \partial H_z / \partial x = \partial H_z / \partial y = 0 \quad (\Omega)$$

решение задачи 1 выписывается сразу

$$H_z = H = j_\Gamma = \text{const}, \quad p = 1/2 \mu\mu_0 H^2 \quad (1.4)$$

Следовательно, по поверхности Γ в плоскости x, y циркулирует постоянный ток, давление p также постоянно.

После решения задачи (1.2), (1.3) ставим задачу 2. По заданной системе объемных и поверхностных силовых факторов (куда включаем и нагрузку p) и упругих параметров материалов: E_ϑ, E_Ω — модули Юнга, $\nu_\vartheta, \nu_\Omega$ — коэффициенты Пуассона, определить напряженное состояние сверхпроводника и проводника.

Математически задача 2 заключается в решении уравнений статической теории упругости [6] в областях ϑ и Ω при следующих условиях сопряжения решений на границе полного контакта и условия в бесконечности:

$$[\sigma_\rho] = p, \quad [\sigma_\tau] = [u] = 0, \quad \sigma(\infty) = \sigma_\infty$$

Здесь $[\sigma_\rho, \sigma_\tau, u]$ — скачок векторов напряжений и перемещений при переходе из области ϑ в область Ω , σ — тензор напряжений. Предполагается, что одна из областей конечна, тогда на бесконечности задается однородное напряженное состояние σ_∞ .

Эта задача относится к числу сложных контактных задач теории упругости. Для тел канонической формы (цилиндр, шар, . . .) решение можно построить в виде конечных или бесконечных рядов по разделяющимся частным решениям. Ниже такие решения будут приведены при пренебрежении упругим сопротивлением матрицы.

Последний шаг заключается в анализе поля напряжений с точки зрения хрупкой прочности материалов. На основе известных представлений теории разрушения [7—10] сформулируем один из возможных вариантов критерия разрушения, включающий три новых параметра для каждого из материалов: структурный параметр или радиус ядра разрушения r_c , прочность при одноосном растяжении и при чистом сдвиге σ_0 и τ_0 . Условия разрушения на границе раздела, вообще говоря, должны оговариваться особо, но часто прочность адгезии близка к прочности слабого материала, что и принимается здесь.

Анализ состояния системы по этому критерию проводится следующим образом. Множество точек M назовем подозрительными на разрушение, если в этих точках достигаются локальные максимумы растягивающих напряжений σ или касательных напряжений τ (по пространству и по ориентации площадки), такие, что $\max \sigma \geq \sigma_0$ или $\max \tau \geq \tau_0$. В множество M включаются и точки сингулярности напряжений.

Около любой точки $m \in M$ как около центра опишем сферическую (R^3) или цилиндрическую (R^2) поверхность Γ_c радиуса r_c . Элемент объема ω_c , заключенный внутри этой поверхности, по определению находится в упругом состоянии, если $\sigma_* = \max \sigma |_{\Gamma_c} < \sigma_0$ и $\tau_* = \max \tau |_{\Gamma_c} < \tau_0$, в разрушенном — если $\sigma_* > \sigma_0$ или $\tau_* > \tau_0$, и в предельном — если $\sigma_* = \sigma_0$, $\tau_* \leq \tau_0$ или $\sigma_* \leq \sigma_0$, $\tau_* = \tau_0$. Суждение о состоянии системы в целом высказывается в результате суммирования информации о состоянии локальных областей ω_c . Так, состояние системы называется предельным, если хотя бы один элемент ω_c находится в таком состоянии и отсутствуют разрушенные элементы, разрушенным, если хотя бы один элемент ω_c находится в таком состоянии и, наконец, состоянием упругого равновесия, если все элементы ω_c упруги или множество M пусто. (Не исключаются иные возможные формулировки критерия разрушения ввиду сложности явления, многообразия материалов и отсутствия единого мнения по этому вопросу.)

В случае $r_c \ll \lambda$, где λ — характерный размер рисунка поля напряжений около точки m , анализ упрощается и проводится по значениям σ и τ в этой точке.

Изучение напряженного состояния важно также с точки зрения изучения перехода сверхпроводника в нормальную фазу или в промежуточное состояние. Как известно [1—3], для некоторых сверхпроводников может оказаться необходимым учет зависимости критического магнитного поля H_c от напряжений.

Перейдем к изучению конкретных примеров. Для простоты будем пренебрегать упругим сопротивлением среды в области Ω по сравнению с упругим сопротивлением сверхпроводника ($E_\Omega/E_\vartheta \ll 1$ или $E_\Omega = 0$). Давление p считаем единственной нагрузкой на образец.

2. Плоская задача, поле $H = (0, 0, H_z)$. Решение дано формулами (1.4). Пусть область \mathcal{D} конечна. Тогда справедливо утверждение, что цилиндрический образец находится в гидростатическом состоянии и даже при наличии угловых точек, начальных трещин не будет разрушаться ни при каких значениях напряженности H_z (наиболее благоприятный случай).

Рассмотрим некоторые случаи, когда область \mathcal{D} внешняя. Пусть в сверхпроводнике имеется круглое отверстие, удаленное от границ, и в нем сосредоточено поле $(0, 0, H_z)$. Тогда на обводе отверстия действуют тангенциальные растягивающие усилия напряжения $\sigma = p$, а значит, разрушающее поле равно $H = \sqrt{2\sigma_0/(\mu\mu_0)}$.

Для эллипсоидального выреза с полуосями a, b ($a > b$) в безграничном сверхпроводнике, ненагруженном на бесконечности, подозрительными точками могут оказаться вершины с наименьшим радиусом кривизны контура $r_* = b^2/a$.

Следует различать случаи $r_* \ll r_c$, $r_* \sim r_c$ и $r_* \gg r_c$.

При $r_* \ll r_c$ (тонкий эллипс) на расстояниях от вершины $\sim r_c$ реализуется асимптотика решения Снеддона [11] для разреза. Согласно критерию разрушения на отрыв и исходя из формул Снеддона [11], можно получить выражение для разрушающего поля $H^2 = 2 [\sigma_0/(\mu\mu_0)] \sqrt{2r_c/a}$.

При $r_* \gg r_c$ оценку предельного состояния получим из выражения для растягивающего напряжения в вершине эллипса [11] $H^2 = 2\sigma_0 b/(\mu\mu_0 a)$.

При асимптотическом переходе $b/a \rightarrow 0$, $b^2/a \gg r_c \rightarrow 0$ имеем $H \rightarrow 0$, т. е. для очень малых значений параметра r_c разрушающее поле может быть достаточно малым. Аналитическая оценка радиуса r_c дана в [8] и получена путем сравнения полей напряжений перед началом разрушения при простом растяжении образца и около вершины трещины, находящейся в предельном состоянии. Из нее следует, что, например, для металлов $r_c \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ м, а различные источники, где приводятся данные по экспериментальным измерениям этого параметра, подтверждают эту оценку.

Для других форм вырезов ответ можно получить, анализируя известные решения (например, луночка и тонкий вырез произвольной формы рассмотрены в [11]).

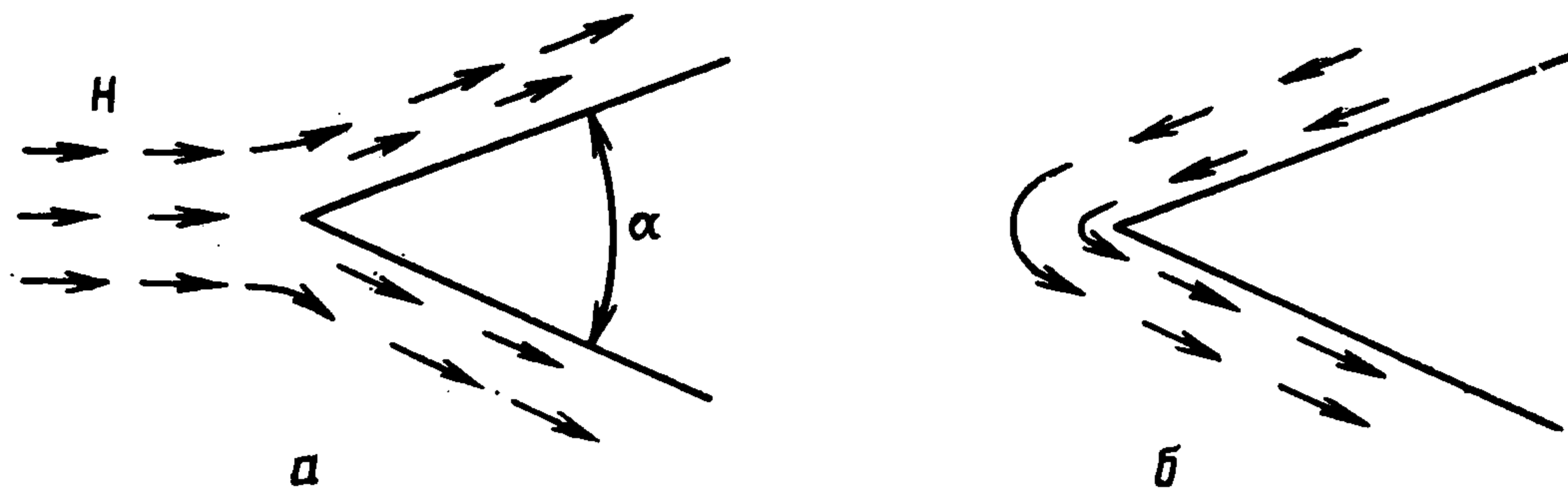
3. Плоская задача, поле $H = (H_x, H_y, 0)$. Если поле векторов \mathbf{H} расположено в плоскости x, y , то задача 1 аналогична некоторой задаче бескавитационного обтекания недеформируемого контура Γ ламинарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Вектор плотности тока \mathbf{j}_Γ перпендикулярен плоскости x, y . На контур Γ действуют почти всюду отличные от нуля сжимающие усилия. Ввиду неравномерности распределения давления могут появиться растягивающие напряжения в образце, но заранее можно сказать, что для выпуклых поверхностей Γ наиболее опасными будут касательные напряжения. Разберем некоторые примеры образцов канонических форм.

Угол раствора α . Комплексные потенциалы

$$W_k = A_k z^{\beta_k + 1}, \quad k = 1, 2 \quad (dW/dz = H_x - iH_y)$$

$$z = re^{i\theta}, \quad \beta_1 = \alpha/(2\pi - \alpha), \quad \beta_2 = (\alpha - \pi)/(2\pi - \alpha) \quad (3.1)$$

реализуют симметричное и антисимметричное относительно биссектрисы угла решения задач «обтекания клина потоком \mathbf{H} » из бесконечности (фигура).



Запишем выражения для поля и давления на гранях клина

$$H_{\tau} = (\beta_k + 1) A_k r^{\beta_k}, \quad p = 1/2 \mu \mu_0 (\beta_k + 1)^2 A_k^2 r^{2\beta_k} \quad (3.2)$$

Общие выражения для асимптотик функций H_{τ} и p в угловой точке произвольного контура Γ , как следует из общей теории поведения решений эллиптических уравнений в угловых точках области [5], отличаются от правых частей равенств (3.2) членами $O(1)$, $O(r^{\beta_k+1})$, $r \rightarrow 0$.

Проведем анализ знаков β_k : $\beta_1 \geq 0$ для всех $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\beta_2 \geq 0$ при $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ (угол выходящий) и $\beta_2 \leq 0$ при $0 \leq \alpha \leq \pi$ (угол входящий). Отсюда следует, что в вершине входящего угла в общем случае (вектор \mathbf{H}_{∞} направлен под произвольным углом к биссектрисе клина) поле и давление сингулярны, напряжения также сингулярны, но сжимающие. Исключение составляет симметричный случай. Поведение функции H_{Γ} свидетельствует о разрушении сверхпроводимости около вершины угла: значения $H_{\Gamma} = H_c$ являются достижимыми. Появляются зоны с обычным поведением проводника в области \mathcal{V} и проникновением магнитного поля в глубь сверхпроводника. Это влечет за собой изменения в постановке задачи и, возможно, — в асимптотике решения в угле (вопрос, требующий отдельного рассмотрения).

В вершине выходящего угла поле и давление исчезают при $r \rightarrow 0$, однако внутри угла появляются сингулярные растягивающие напряжения: $\sigma \sim Kr^{-\kappa}$, $\kappa > 0$. Оценку коэффициента интенсивности напряжений K следует проводить, исходя из решения задачи в целом.

Решение одного класса таких задач — «обтекание» многоугольников дается на основании теоремы Кристоффеля — Шварца [12]. Механическую задачу 2 затем можно решить также с применением конформного преобразования области [13]. Зависимость показателя κ от угла α универсальна [14] (в то время как коэффициент K зависит от интенсивности источников и геометрии области). Предельные (по полю) нагрузки определяются из уравнения $K = \sigma_0 r c^{\kappa}$.

Цилиндр в поперечном магнитном поле. Используя решение задачи о бесциркуляционном обтекании цилиндра идеальной жидкостью [15], определим напряженность магнитного поля и давление на поверхности цилиндра $r = 1$:

$$H_{\tau} = -2H_0 \sin \theta, \quad p = p_0 \sin^2 \theta, \quad p_0 = 2\mu\mu_0 H_0^2$$

где θ — угол между вектором \mathbf{H}_0 и радиусом-вектором \mathbf{r} , p_0 — максимальное давление. Из общего решения первой краевой задачи теории упругости для цилиндра [6] находим напряжения внутри тела, нормированные на величину p_0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\sin^2 \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 1/2 [(2r^2 - 1) \cos 2\theta - 1] \\ \sigma_{zz} &= \nu (r^2 \cos 2\theta - 1), \quad \sigma_{r\theta} = 1/2 (r^2 - 1) \sin 2\theta \end{aligned}$$

Нормальные напряжения — только сжимающие, поэтому возможно разрушение под действием касательных напряжений. Максимум модуля на-

пряжения $\sigma_{r\theta}$ достигается при $r = 0$, $\theta = \pm\pi/4$ и равен $1/2$. Другие максимальные касательные напряжения ($1/2 |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|$, $1/2 |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|$) реализуются при $\theta = \pm\pi/4$ на поверхности цилиндра, они одинаковы и равны $1/2 - \nu$. Это меньше, чем максимум напряжения $\sigma_{r\theta}$.

Вычислим предельное значение поля при разрушении сколом: $H_p = \sqrt{\tau_0/(\mu\mu_0)}$. Можно высказать предположение, что при $H_0 > H_p$ из центра образца под углами $\theta = \pm\pi/4$ начнет развиваться трещина сдвига.

4. Пространственная задача о шаре в однородном магнитном поле. По аналогии с решением соответствующей гидродинамической задачи об обтекании сферы идеальной жидкостью [15] получим сначала значения поля и давления на поверхности:

$$H_\tau = -3/2 H_0 \sin \theta, \quad p = p_0 \sin^2 \theta, \quad p_0 = 9/8 \mu\mu_0 H_0^2$$

Напряженное состояние упругого шара найдем из общего решения [6] (нормировка на p_0)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 1/3 \eta \{ [7 + \nu (2 + 3r^2)] (3 \cos^2 \theta - 1) - 2\eta^{-1} \} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\eta \{ 2\nu + (7 + \nu) r^2 + [7 + 2\nu - 7(2 + \nu) r^2] \cos^2 \theta \} \\ \sigma_{r\theta} &= -1/2 \eta (7 + 2\nu) (1 - r^2) \sin 2\theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\eta \{ 7 + 4\nu + [5\nu - (7 + 11\nu) \cos^2 \theta] r^2 \}, \quad \eta = (7 + 5\nu)^{-1} \end{aligned}$$

Максимальные касательные напряжения, как и у цилиндра, развиваются в центре шара на площадках $\theta = \pm\pi/4$ и равны

$$\max |\sigma_{r\theta}| = 1/2 \eta (7 + 2\nu) \approx 1/2$$

На поверхности шара имеем ($r = 1$)

$$\sigma_{rr} = -\sin^2 \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\nu\eta - \sin^2 \theta, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \eta [2\nu - (7 + 11\nu) \sin^2 \theta]$$

Максимальные растягивающие напряжения (они порядка $0,2\nu$) гораздо меньше максимальных касательных напряжений. Поэтому качественные и количественные выводы относительно возможного характера разрушения и величины разрушающего поля аналогичны случаю цилиндра.

Авторы благодарят Р. В. Гольдштейна за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линтон Э.-А. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1964. 196 с.
2. Гуревич А. Вл., Минц Р. Г., Рахманов А. Л. Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
5. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Sih G. C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // Intern. J. Fract. Mech. 1974. V. 10. No. 3. P. 305—321.
8. Sih G. C. Prediction of crack growth under mixed mode conditions // Proc. Ist. USA-Greece Symp. on Mixed Mode Crack Propagation. Alphen aan den Rijn: Sijthoff; Nordhoff, 1981. P. 3—19.
9. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
11. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
13. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
14. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. N 4. P. 526—528.
15. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Физматгиз, 1959. 784 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1989