

УДК 539.374

© 1990 г.

Л. М. Флитман¹

БЕЗОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

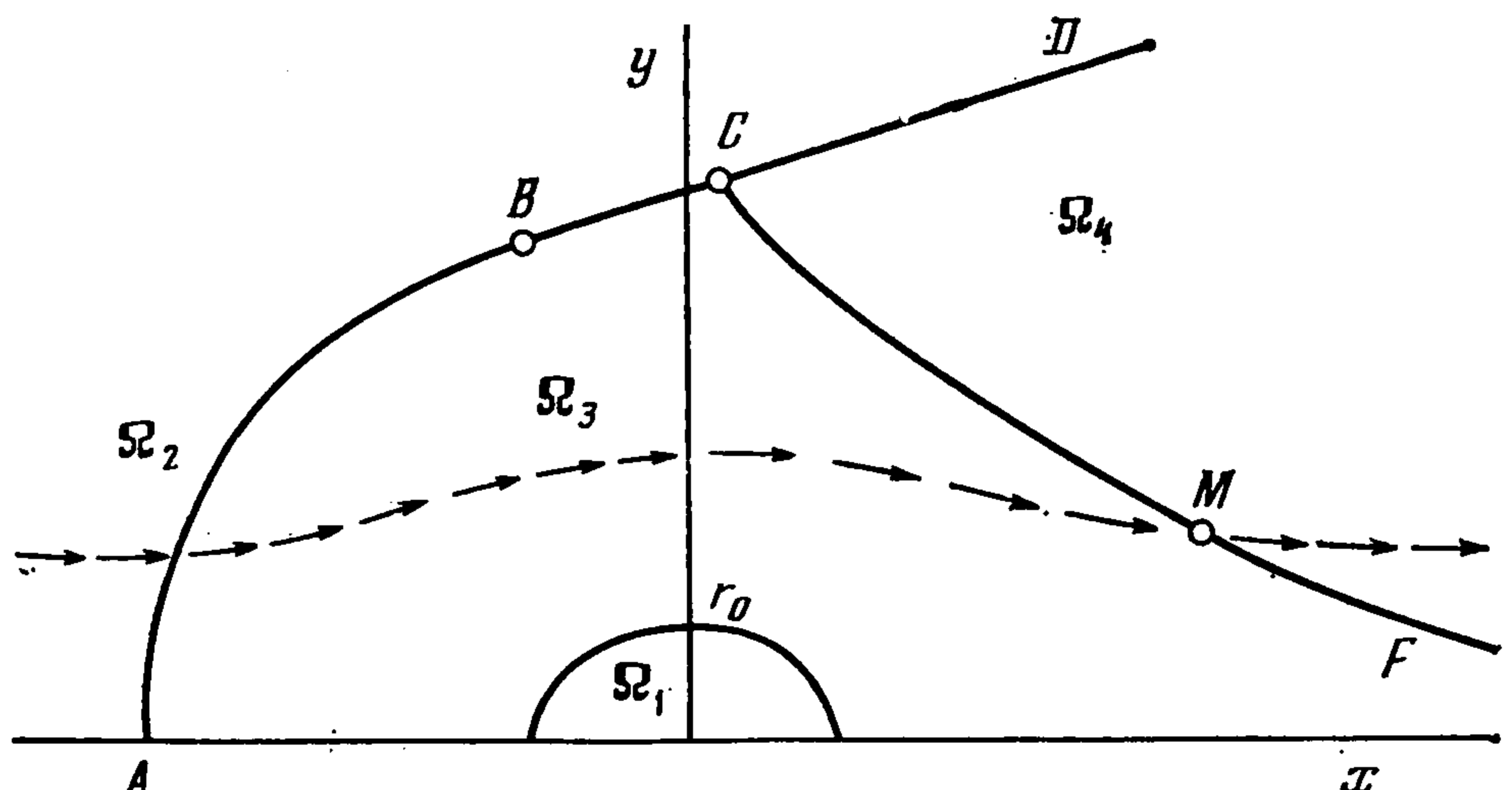
Рассматривается задача обтекания, в которой известное предположение М. А. Лаврентьева о близости полей скоростей и напряжений при высокоскоростном движении жесткого тела в твердой среде к аналогичным полям из решения гидродинамической задачи [1] переведено на язык асимптотических представлений. Малым параметром является отношение предела текучести τ_s к скоростному напору. По нулевому приближению (гидродинамическая задача) находятся неизвестные границы упругой и пластической зоны и фронта волны разгрузки. Размер пластической зоны при обтекании тела оказался равным $(\tau_s/\mu)^\alpha$, где $\alpha = 1/2$ для цилиндра и $\alpha = 1/3$ для сферы, μ — модуль сдвига. Около тела рассматривается решение пограничного типа, ликвидирующее невязку в выполнении условия пластического трения. Во всей области течения построено первое приближение. Приведены формулы для прочностных поправок к максимальному нормальному напряжению и силе, действующим со стороны потока на шар или цилиндр.

1. Постановка задачи. Несжимаемый упругопластический безграничный поток обтекает жесткое тело с гладкой поверхностью S в установившемся режиме. В декартовой эйлеровой системе координат xuz тело покоится, ось x совпадает с направлением потока в бесконечности. Далеко впереди тела ($x \rightarrow -\infty$) поток однороден, не напряжен по сдвигу, давление p_∞ в нем считается достаточным, чтобы обтекание было безотрывным, скорость равна c , причем $c^2 \gg b^2$, где b — скорость упругих поперечных волн.

Для плоской и осесимметричной задачи реализуем следующую априорную схему обтекания, симметричного относительно оси x (фигура). Вдали от тела Ω_1 материал находится в упругом и безвихревом состоянии (зона Ω_2). Переход в пластическое (завихренное) состояние осуществляется на фронте ударной поперечной волны $ABCD$. За участком фронта ABC частица среды продолжает оставаться в этом состоянии вплоть до обратного перехода в упругое состояние на волне разгрузки CF в область Ω_3 . В зоне Ω_4 частицы сразу упруго разгружаются. В точке B происходит касание криволинейной границы зон AB и прямого или конического фронта поперечной волны, наклоненного к оси x на угол $\alpha = b/c$. Граница зоны разгрузки начинается на фронте BD в некоторой точке C . Подчеркнем своеобразие волны CD . В отличие от обычной упругой поперечной волны скачок касательных напряжений на ней ограничен условием пластичности. Частицы, пересекающие фронт CD , приходят в состояние пластичности только на фронте. Возможность существования описанного типа решений в окрестности фронтов волн BC и CD можно показать на простых модельных задачах.

¹ Флитман Леонид Моисеевич (1932—1988), д-р физ.-матем. наук, ведущий научный сотрудник ИПМ АН СССР, крупный специалист в области динамической теории упругости и пластичности, безвременно скончался после тяжелой болезни. Статья по его материалам подготовлена И. В. Симоновым.

Искривленные границы зон не известны. Искомыми, кроме того, являются поля скорости \mathbf{u} , давления p , девиатора напряжений $\mathbf{T} = \{\tau_{ij}\}$, которые нормированы на скорость c , скоростной напор ρc^2 и предел текучести в пластической модели Сен-Венана — Мизеса τ_s . За единицу длины выберем половину характерного размера сечения тела r_0 (фигура).



Математическая задача определения всех неизвестных элементов состоит в решении уравнений несжимаемости и сохранения импульса вне области Ω_1 , закона Гука в упругих зонах Ω_2 и Ω_4 , уравнений пластичности Сен-Венана — Мизеса в области Ω_3 с учетом условий сопряжения решений на ударной поперечной волне ABD и волне разгрузки CF , законов непроникания и трения на поверхности S , поведения в бесконечности и условий симметрии на оси x :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \sigma_{ii} = -p + f^2 \tau_{ii} \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{u})^2 + \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + f^2 \operatorname{div} \mathbf{T} \quad (\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4) \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^*), \quad \mathbf{E} = \int_l \boldsymbol{\varepsilon} \frac{dl}{|\mathbf{u}|}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^x \boldsymbol{\varepsilon}|_{y=\text{const}} dx, \quad J(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} < 1 \quad (\Omega_2) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(M_*) + \frac{1}{m} \int_{x_*}^x \boldsymbol{\varepsilon}|_{y=\text{const}} dx \quad (\Omega_4) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\varepsilon} J^{-1/2}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Rightarrow J(\mathbf{T}) = 1 \quad (\Omega_3) \quad (1.5)$$

$$[u_n] = [\sigma_{nn}] = 0, \quad [u_\tau] u_n = f^2 [\tau_{n\tau}] \quad (ABD) \quad (1.6)$$

$$[J[\mathbf{T}] = 0] \quad (AB) \quad (1.7)$$

$$\partial/\partial x J(\mathbf{E}) = 0, \quad (C), \quad \mathbf{T}|_{CD} = \mathbf{T}|_C \quad (CD) \quad (1.8)$$

$$\partial/\partial x J[\mathbf{E}] = [\mathbf{u}] = [p] = 0 \quad (CF) \quad (1.9)$$

$$u_n = 0, \quad \tau_{n\tau} = -1 \quad (S) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0), \quad p = p_0, \quad \mathbf{T} = 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (1.11)$$

$$u_n = 0, \quad \tau_{n\tau} = 0 \quad (y = 0, x, y \notin \Omega_1)$$

$$f^2 = \tau_s/(\rho c^2), \quad m = \tau_s/(2\mu)$$

Здесь n, τ — нормаль и касательная к указанной кривой, M_* — некоторая точка на фронтах разгрузки CF или CD , x_* — ее координата по оси x , звездочка означает операцию транспонирования матрицы, ρ — плотность среды.

Интегралы в (1.2), (1.3) берутся от $-\infty$ вдоль линии тока l до текущей точки и понимаются как интегралы от обобщенных функций.

Закон Гука (1.3), (1.4) записан в форме приближенной связи девиатора T с тензором скоростей деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ для установившегося движения. В точном выражении этого закона интегрирование должно проводиться вдоль линии тока.

Рассматриваемая задача будет изучаться при следующих ограничениях на параметры:

$$f^2 \ll 1, \quad m \ll 1, \quad f^2 m^{-1} \ll 1 \quad (1.12)$$

Ограничения (1.12) физически означают, что прочность второстепенна во всей области течения, главной частью напряжений является давление, а течение близко к гидродинамическому. Условие безотрывности, на первый взгляд спорное, на самом деле естественно. Для идеальной жидкости оно реализуется и при выполнении равенства $p_\infty = 0$. Можно ожидать, что при $f \ll 1$ достаточно небольших значений давления на бесконечности, чтобы каверна за гладким выпуклым телом захлопнулась. Но даже при появлении малой зоны отрыва потока от тела найденная ниже сила сопротивления за счет прочности среды не изменится существенно. Она может быть использована для корректировки гидродинамической силы сопротивления, которая уже будет отлична от нуля.

Условие $m \ll 1$ выполняется для большинства материалов, а последнее неравенство равнозначно условию высокой скорости $b^2/c^2 \ll 1$ — поток сверхзвуковой по поперечным волнам. Линии тока в упругой зоне окажутся удаленными от тела и практически прямыми, поэтому будет оправдано принятое в (1.3), (1.4) приближение.

Условие несжимаемости можно принять, так как при обтекании более важны сдвиги, а не изменения объемов частиц. Кроме того, это позволяет довести решение задачи до конечных формул. В реальных ситуациях следует брать несколько большее значение плотности, чем в ненагруженном состоянии среды, — плотность упакованного материала.

Соотношения (1.5) отражают идеально-пластическое поведение материала без упрочнения и без учета вклада упругих деформаций в касательные напряжения. Хотя это — самая простая модель, она правильно отражает сущность пластичности: практически неограниченный рост деформации при ограниченном уровне девиаторных компонент напряжений.

Из условия непрерывности второго инварианта (1.7) и условия пластичности (1.5) следует, что условие пластичности выполняется на линии AB со стороны упругой зоны.

Предполагается, что частицы среды скользят по поверхности S , причем явные ограничения на тангенциальную компоненту скорости (как, например, для вязкой жидкости) отсутствуют. На границе S зато поставлено условие пластичности. Считается, что давления в силу высокоскоростного характера обтекания и наличия давления p_∞ в бесконечности достаточно велики для того, чтобы закон сухого трения перешел в закон пластического трения на поверхности тела [2].

Условия начала разгрузки сразу за фронтом ударной волны (1.8) (они служат для определения положения точки C) и на линии CF (1.9) требуют знания конечного тензора деформаций $E = \{e_{ij}\}$. Правило вычисления этого тензора указано в (1.2) и следует учесть скачок тензора E при переходе через ударные волны.

Таким образом, проблема стационарного обтекания жесткого тела высокоскоростным упругопластическим потоком заключается в решении сложной нелинейной задачи (1.1)–(1.11). Нелинейность проявляется в наличии неизвестных границ AB и CF , в уравнениях (1.2), (1.5), в усло-

виях (1.6), (1.5), (1.9). Без громоздких расчетов или упрощающих предположений для применения асимптотических подходов получить обзорные результаты не представляется возможным.

Ключом к решению проблемы в последнем направлении является развитие идеи М. А. Лаврентьева [1]. Она состоит в том, что при высокоскоростном деформировании твердых тел прочностные свойства среды дают лишь поправки к гидродинамическим результатам, причем в некоторых случаях, например при определении силы воздействия потока на тело, только эти поправки и существенны. Определение таких поправок и является содержанием работы. Асимптотическое разложение решения проводится по малому параметру f . Найдены два члена разложения: соответствующий $f = 0$ и следующий за ним по порядку величины.

2. Нулевое приближение. При $f = 0$, как видно из соотношений (1.1)—(1.11), число уравнений и число неизвестных не сокращаются. Уменьшается только порядок уравнений сохранения импульса и следует условие непрерывности гидродинамического поля скоростей V и давления q вне обтекаемого тела. На поверхности S можно удовлетворить только условию непроникания. Выполнение условия трения из (1.10) — задача следующего приближения. Вопрос определения функций V и q есть задача безотрывного обтекания твердого тела установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. В дальнейшем будем пользоваться известными из гидродинамики выражениями для величин V и q и сосредоточим усилия на получении прочностных поправок к гидродинамическим полям.

Знание скорости нулевого приближения V позволяет определить девиатор напряжений T по формулам (1.2)—(1.5) и границы зон. Для отыскания фронта AB служит следствие условий (1.5), (1.7) $J(T_e) = 1$ (T_e — девиатор напряжений в упругой области). В точке B , от которой отходит плоский конический фронт, наклон кривой AB делается равным α . Для определения фронта волны разгрузки CF служит первое условие (1.9). Девиатор T имеет разрыв на границе ABD . При $f \neq 0$ разрыв в нормальных напряжениях не допустим в силу несжимаемости. Ликвидация этого разрыва осуществляется при построении первого приближения.

3. Плоская задача в нулевом приближении. Обтекание цилиндра.

Следуя [3, 4], введем комплексную скорость $v(z) = v_x - iv_y$ — аналитическую функцию комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta}$. Для задачи обтекания круга единичного радиуса и эллипса с полуосями $a, 1$

$$v(z) = 1 - z^{-2}, \quad v(z) = \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2 + 1}} \right) \quad (3.1)$$

Введем комплексную скорость деформации $\varepsilon(z)$ и комплексную функцию $\tau(z)$, вообще говоря, не аналитическую, по формулам

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy} = v'(z), \quad \tau(z) = \tau_{xx} - i\tau_{xy}, \quad J(T) = |\tau(z)|^2 \quad (3.2)$$

Для функции $\tau(z)$ (и давления q) приведем сначала общие выражения, исходя из соотношений (1.3), (1.5), (3.2) и интеграла Бернулли

$$\tau(z) = m^{-1} (v(z) - 1) \quad (\Omega_2)$$

$$\tau(z) = \sqrt{v'(z)/v'(\bar{z})}, \quad J(\varepsilon) = \varepsilon(z) \varepsilon(\bar{z}) \quad (\Omega_3) \quad (3.3)$$

$$q = p_0 + 1/2 (1 - |v(z)|^2) \quad (\text{вне } \Omega_1)$$

а затем — формулы для напряжений в случае цилиндра в упругой и пластической зонах

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -1 / (mr^2), & \tau_{r\theta} &= 0 & (\Omega_2) \\ \tau_{rr} &= \cos \theta, & \tau_{r\theta} &= \sin \theta & (\Omega_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что напряжения τ_{rr} , $\tau_{r\theta}$ не зависят от r в пластической зоне и для нулевого приближения имеет место парадокс Даламбера: сила сопротивления равна нулю. Для определения границы зон упругости и пластичности из (1.5), (1.7), (3.2) имеем уравнение $|v(z) - 1| = m$.

При обтекании круга и эллипса (если пренебречь величинами порядка $\sqrt{m|a^2 - 1|}$ по сравнению с единицей) это будет окружность с центром, совпадающим с центром обтекаемой фигуры и радиусами

$$R = m^{-1/2} = \sqrt{2\mu/\tau_s}, \quad R = \sqrt{(a+1)/(2m)}$$

В силу условий (1.12) $R \gg 1$. Сразу находится положение фронта BD (фигура). Точка B имеет координаты $z_B = R \exp[i(\alpha + \pi/2)]$. Итак, характерные размеры (и форма) пластической зоны найдены и показано, что они велики по сравнению с размерами тела.

В окрестности точки торможения $z = -1$ имеем приближенное выражение для скорости: $v(z) \approx -r(z+1)$. Это значит, что частица, находящаяся в некоторый момент времени на линии тока $y = 0$, $x < 1$ ($\psi = 0$) на конечном расстоянии от точки торможения, добирается до последней за бесконечное время. Бесконечное время требуется частице и на то, чтобы отойти от точки торможения. То же самое происходит около точки $z = +1$. Ясно, что частица, движущаяся по очень близкой линии тока $0 < \psi \ll 1$, за конечное время обогнет цилиндр и уйдет далеко. Возьмем теперь частицу далеко вверху по потоку в виде маленького квадрата со сторонами, параллельными осям, и средней линией на оси x . За большое время его средняя линия значительно приблизится к точке торможения, а верхняя и нижняя стороны, двигаясь вдоль своих линий тока, обогнут круг — частица превратится в причудливую, сильно вытянутую фигуру. Частицы, не имеющие общих точек с осью x , будут деформироваться меньше, но чем ближе они будут расположены к оси x , тем сильнее они будут вытягиваться. Это иллюстрирует тот факт, что деформации в потоке большие. Подсчитаем их для цилиндра:

$$E(z) = e_{xx} - ie_{xy} = \int_l (\varepsilon(z) |v(z)|^{-1}) |_{\psi=\text{const}} dl = \int_{-\infty}^{\varphi} (\varepsilon |v|^{-2})_{\psi=\text{const}} d\varphi \quad (3.5)$$

Здесь φ , ψ — потенциал скорости и функция тока.

При $x = \pm \infty$ будет $\psi = y$ и можно найти «остаточные» деформации частиц в потоке, вычислив интеграл. Он выражается через полные эллиптические интегралы

$$E^\infty(y) = -2i \left\{ \text{sign } y \cdot \frac{\pi}{2} + y \left[\frac{2}{k} E(k) + \left(\frac{k}{2} - \frac{2}{k} \right) K(k) \right] \right\} \\ k^2 = 4(4 + y^2)^{-1} \quad (3.6)$$

$$E^\infty = -\pi i \quad (0 < y \ll 1), \quad E^\infty = -\frac{3\pi}{4} \frac{i}{y^4} \quad (y \gg 1)$$

Для предельных значений деформаций из верхней полуплоскости и при $|z| \gg 1$ из формул (3.3), (3.5), (3.6) следует

$$\begin{aligned} e_{xx}^\infty(+0) &= 0, & e_{xy}^\infty(+0) &= \pi \\ E(z) &= E^\infty(y) + v(z) - 1, & |z| &\gg 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнение для границы зоны разгрузки получим из первого условия (1.9), полагая, что оно имеет место при $|z| \gg 1$

$$\operatorname{Re} [\overline{\varepsilon(z)} \cdot E(z)] = 0 \quad (3.8)$$

При больших и малых значениях y , при использовании результатов (3.1), (3.2), (3.5), (3.7) оно приводится к виду

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{3}{4}\pi (1 + 2 \cos 2\theta) y^{-2} \Rightarrow \theta \approx \frac{1}{2}\pi, \quad y \gg 1 \\ \pi r^2 \sin 3\theta &= 2 \cos \theta \Rightarrow \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad y \ll 1 \end{aligned}$$

Теперь можно качественно описать кривую $y(x)$ — границу зоны разгрузки. Она начинается от точки $z_c \approx im^{-1/2}$ при $x = 0$, убывает монотонно с ростом координаты x (это можно показать) и $y = 0$ при $x = \infty$. Из сказанного заключаем, что граница зоны разгрузки удалена от тела на большое расстояние порядка $m^{-1/2}$. Фронт CD также является границей зоны разгрузки.

Из формул (1.4) и (3.2) получим решение для комплексного напряжения $\tau(z)$ в зоне разгрузки

$$\tau(z) = \tau(z_*) + \frac{1}{m^{-1}} (v(z) - v(z_*)), \quad z_* = r_* \exp(i\theta_*)$$

Здесь z_* — точка на границе зоны разгрузки. При $y \leq m^{-1/2}$ и $y \geq m^{-1/2}$ согласно результатам (3.4), (3.8) и условию на девиатор (1.8) будет

$$\tau_*(z_*) = \exp 3i\theta_* \quad (y \leq m^{-1/2}), \quad \tau(z_*) = -i \quad (y > m^{-1/2})$$

Построение нулевого приближения в задаче обтекания круга завершено. Для других тел решение можно получить по аналогии с изложенным.

4. Нулевое приближение в задаче обтекания шара. Нулевое приближение в осесимметричном или вообще в пространственном случае строится аналогично тому, как это сделано при плоской деформации. Однако в техническом отношении это сделать сложнее. Поэтому ограничимся приведением результатов исследования полей в упругой и пластической зонах.

Выражения для потенциала скорости, скорости частиц, давления, напряжений, $J(\varepsilon)$ и радиуса пластической зоны будут такими:

$$\begin{aligned} \Phi &= [r + (2r^2)^{-1}] \cos \theta, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi, \quad q = p_0 + \frac{1}{2} (1 - v^2) \\ -\tau_{rr} &= 2\tau_{\theta\theta} = 2\tau_{\beta\beta} = (mr^3)^{-1}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (\Omega_2) \\ -\frac{1}{2}\tau_{rr} &= \tau_{\theta\theta} = \tau_{\beta\beta} = -d \cos \theta, \quad \tau_{r\theta} = d \sin \theta, \quad d = (1 + 2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \quad (4.1) \\ J(\varepsilon) &= \frac{9}{4} r^{-8} d^{-2}, \quad R = (\frac{3}{4} m^{-2})^{1/2} \end{aligned}$$

Для линий тока $\xi = \text{const}$ [3, 4] имеем

$$(r^2 - r^{-1}) \sin^2 \theta = \xi = \text{const}, \quad \beta = \text{const}$$

Здесь r, β, θ — сферическая система координат с началом в центре шара, угол θ отсчитывается от оси x .

Радиус пластической зоны меньше, чем в плоской задаче, однако и в случае шара $R \gg 1$. Девиатор напряжений \mathbf{T} в пластической зоне также не зависит от r . Положение конического фронта BD определяется как и в разд. 3.

5. О внутреннем разложении (пограничном слое). Цель построения решений погранслоного типа — нахождение девиатора напряжений \mathbf{T} по уравнению (1.5) при $f \ll 1$ и по условиям (1.10). Условие трения в нулевом приближении удовлетворено не было, поэтому следует ожидать поправки

$O(1)$ к тензору \mathbf{T} . В то же время показано [5, 6]², что поправки к скорости будут малыми порядка f . Тем самым свойства решений рассматриваемых задач обтекания сильно отличаются от свойств решений в динамике вязкой жидкости, где поправка к скорости есть $O(1)$ вблизи тела. Это различие обусловлено тем, что при обтекании пластическим потоком допускается проскальзывание частиц около тела, но имеется ограничение на величину касательного напряжения в виде условия пластичности Мизеса. В классической постановке для вязкой жидкости требуется прилипание и нет ограничений на тензор \mathbf{T} .

Общие уравнения нестационарного пластического течения вблизи шероховатой поверхности S (погранслоного типа) получены и исследованы в [5, 6]. Их точные решения даже в случаях простейшей геометрии тел найти не удастся и необходимо прибегать к вычислениям на ЭВМ. Однако для целей данного исследования достаточно следующих фактов [5, 6]: в принципе существуют поправки указанного выше порядка к напряжениям и скоростям погранслоного типа (т. е. они быстро изменяются около поверхности S и убывают до нуля при удалении от тела); толщина пограничного слоя имеет порядок f , используемый асимптотический подход не содержит внутренних противоречий; нормальное напряжение на площадках, параллельных поверхности обтекаемого тела, меняется мало, следовательно, для определения этих напряжений на теле можно пользоваться их значениями из внешнего разложения (для касательного напряжения на теле имеются готовые формулы в виде второго условия (1.10)).

6. Внешнее асимптотическое разложение. Первое приближение.

Из предыдущих результатов следует, что при сохранении в выражениях для искомых величин \mathbf{u} , p , \mathbf{T} членов, не меньших $O(f^2)$, значения компонент тензора \mathbf{T} и положения границ зон можно считать найденными. Кроме того, стало известным, что напряжение σ_{nn} с точностью до $o(f^2)$ не меняется при пересечении пограничного слоя.

Определим поправки к скорости и давлению во внешнем асимптотическом разложении. Тогда получим равномерное асимптотическое разложение всех искомых функций с точностью до $o(f^2)$. Обсуждаемые поправки имеют порядок f^2 . Положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + f^2\mathbf{W}, \quad P = q + f^2s \quad (6.1)$$

Обычный процесс подстановки представлений (6.1) в основные уравнения и условия (1.1)–(1.11) и линеаризация приводят к следующим уравнениям и условиям для поправок во всей области течения:

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0, \quad \nabla P + [\operatorname{rot} \mathbf{W} \times \mathbf{V}] = \operatorname{div} \mathbf{T}; \quad P = s + \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} [W_n] = 0, \quad [W_\tau] = [\tau_{n\tau}]/v_n, \quad [s] = [\tau_{nn}] \Rightarrow \\ \Rightarrow [P] = v_n^{-1} \{ \mathbf{V}_\tau \cdot [\tau_{n\tau}] + v_n [\tau_{nn}] \} \quad (ABD) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$[\mathbf{W}] = 0, \quad [s] = 0 \Rightarrow [P] = 0 \quad (CF); \quad w_n = 0 \quad (S) \quad (6.4)$$

$$\mathbf{W} = s = P = 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (6.5)$$

Соотношения (6.2) представляют собой линеаризованную систему уравнений динамики идеальной жидкости, причем $\operatorname{div} \mathbf{T}$ играет роль заданных массовых сил.

² См. также Флитман Л. М. О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды: Препринт № 150. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1980. 64 с.

В упругой зоне $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$, поскольку поток перед фронтом поперечной волны безвихревой, а вихревое поле возникает только на этом фронте. Тогда из второго уравнения (6.2) и условия для функции P из (6.5) вытекает, что $P = 0$ в упругой зоне. Скачок этой функции на фронте волны ABD задан четвертым условием (6.3), значит, из интеграла Бернулли вдоль дуги l линии тока поля V

$$\partial P / \partial l = |\mathbf{V}|^{-1} (\mathbf{V} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T}) \quad (6.6)$$

функция P полностью определяется квадратурой.

Второе уравнение (6.2) затем используем для определения вихря $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$. Спроектируем это уравнение на два различных направления, не совпадающие с направлением линии тока в каждой точке области. Получим два конечных линейных соотношения, связывающие компоненты $\mathbf{\Omega}$. Добавим к ним условие $\operatorname{div} \mathbf{\Omega} = 0$. В плоском и осесимметричном случае хватает проекции на одно направление, так как вектор $\mathbf{\Omega}$ имеет лишь одну ненулевую компоненту. Тем самым вихрь искомого поля \mathbf{W} окажется выраженным через P и \mathbf{T} . Учитывая еще первое уравнение в (6.2) и условия (6.3) — (6.5), приходим к задаче определения поля по его вихрю и расхождению и по только что упомянутым условиям.

7. О напряжениях и силах, действующих на обтекаемые тела.

Из рассмотрения интеграла Бернулли (6.6) на линии тока $\psi = 0$ ($\theta = 0, \pi, r > 1; 0 < \theta < \pi, r = 1$) вместе с условием $P = 0$ при $r > R, \theta = \pi$, условием на скачок функции P на фронте волны из (6.3) и из предыдущих результатов имеем следующие выражения для P на оси симметрии и на поверхности тела:

$$P(r, \pi) = 3 \ln(R/r), \quad P(1, \theta) = 3(\ln R - 1 - \cos \theta) \quad (\text{цилиндр}) \quad (7.1)$$

$$P(r, \pi) = 8\sqrt{3} \ln\left(\frac{R}{r}\right), \quad P(1, 0) = 8\sqrt{3} \ln R - 2 \int_{-1}^{\cos \theta} \frac{2 + 5y^2}{(1 + 2y^2)^{3/2}} dy \quad (\text{шар})$$

Теперь можно получить формулу для размерного нормального напряжения в лобовой точке торможения, максимального по модулю

$$-\sigma_{rr} = p_0 + \frac{\rho c^2}{2} + \tau_s \times \begin{cases} 3 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2\mu}{\tau_s} + 1 \right) & (\text{цилиндр}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(8 \ln \frac{\sqrt{3}\mu}{\tau_s} + 1 \right) & (\text{шар}) \end{cases} \quad (7.2)$$

Искомая прочностная поправка к гидродинамическому давлению дается последним слагаемым в этих выражениях. Исходя из результатов (7.1), последнего равенства (6.2) и выражения для напряжения σ_{rr} (7.4), можно получить аналогичные формулы для σ_{rr} в тыльной точке торможения.

Для вычисления силы воздействия потока на цилиндр и шар по формуле

$$F = 2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - f^2 \tau_{r\theta} \sin \theta)_{r=1} B(\theta) d\theta \quad (7.3)$$

$$B(\theta) = 1 \quad (\text{цилиндр}), \quad B(\theta) = \pi \sin \theta \quad (\text{шар})$$

имеем выражения для напряжений при $r = 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -q + f^2 (\tau_{rr} - s), \quad \tau_{r\theta} = -1 \\ s &= P - \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = 3(\ln R - 1 - \cos \theta) + 2 \sin \theta w_\theta \\ \tau_{rr} &= \cos \theta \quad (\text{цилиндр}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$s = 8\sqrt{3} \ln R - 2 \int_{-1}^{\cos \theta} \frac{2 + 5y^2}{(1 + 2y^2)^{3/2}} dy + \frac{3}{2} \sin \theta w_\theta$$

$$\tau_{rr} = \frac{2 \cos \theta}{1 + 2 \cos^2 \theta} \quad (\text{шар})$$

Вклад величины q равен нулю (парадокс Даламбера). В формулах (7.3), (7.4) остается пока неизвестной функция $w_\theta(1, \theta)$. Воспользуемся методом разложения в ряды по тригонометрическим функциям угла θ в задаче определения полей Ω и w и заметим, что для нахождения силы нужна только вторая фурье-компонента $w_\theta^{(2)}$. Опуская длинные рассуждения и выкладки при анализе полей P , Ω и W , приведем окончательные результаты, полученные с точностью до $O(R^{-1})$

$$w_\theta^{(2)} = A \sin 2\theta; \quad A = -4,907 \quad (\text{шар}) \quad A = 3 \quad (\text{цилиндр})$$

Вычислим равнодействующую напряжений по формуле (7.3) и представим ее в размерном виде

$$F = Br_0^2 \tau_s + O(1/R)$$

$B = 4 + 7\pi$ (цилиндр радиуса r_0 и длины r_0), $B = 55,2$ (шар радиуса r_0)

Сравнивая отношения силы к площади миделева сечения обтекаемого тела в плоском и пространственном случаях, заключаем, что относительное различие составляет 27%. В то же время отношение прочностной поправки к максимальному нормальному напряжению в плоском и пространственном случаях зависит от m и меняется от 3,3 при $m^{-1} = 10$ до 4,5 при $m^{-1} = 200$. Результаты по плоским задачам достигаются с меньшим трудом, чем по пространственным, поэтому указанное сравнение полученных решений может быть использовано для корректировки решений плоских задач.

Для приложений важно указать размеры и форму пластической зоны, поскольку переход в пластическое состояние можно отождествить с разрушением среды. В задачах обтекания цилиндра (шара) приближенно пластическую зону можно представить как полубесконечное тело, состоящее из полуокружности (полусферы) радиуса $R = m^{-1/2}$ ($R = m^{-1/3}$) и полуполосы (цилиндра) за ней такого же размера. Правдоподобна гипотеза, что для других гладких тел с не сильно отличающимися характерными размерами пластическая зона будет аналогичной. Для эллипса было показано, что размер зоны пропорционален корню из полусуммы его осей, что подтверждает гипотезу. Отношение размеров пластической зоны в плоском и пространственном случае равно $m^{-1/6}$. Это означает, что при умеренных значениях m для оценки размеров зоны пластичности можно использовать решения плоских задач с корректировкой согласно последней формуле.

Замечания. 1°. Если предположение $c^2/b^2 \gg 1$ заменить на условие $c/b < 1$, то упругое поле скоростей будет содержать вихревую часть. Ударная поперечная волна и область интенсивного вихревого движения исчезнут. Размер пластической области увеличится, однако поля в окрестности обтекаемого тела, в частности в пограничном слое, изменятся мало. Такие утверждения позволяют сделать рассмотрение автотельной задачи о расширяющемся и движущемся вдоль оси цилиндра, окруженном упруго-пластической средой [5].

Подчеркнем, что погранслоное представление зависит только от нулевого приближения и поэтому оно полностью сохраняется при изменении отношения c/b . Следовательно, можно ожидать малой чувствительности силы сопротивления к таким переменам. Максимальное нормальное напряжение на поверхности тела (7.2) изменится из-за роста пластической области, но слабо, так как от размера этой области R оно зависит логарифмически.

2°. При переходе к более сложной пластической модели, например к модели Прандтля — Рейсса [7], при $c/b \gg 1$ положение всех границ зон сохранится, ибо оно определяется только нулевым приближением. Девиатор T в упругой зоне сохранит свое значение. В пластической зоне он изменится и будет определяться из следующих уравнений Прандтля — Рейсса, записанных для установившегося течения несжимаемой среды вдоль дуги l на линии тока нулевого приближения:

$$m \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial l} + \lambda \tau_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad \lambda = 1/2 \tau_{nm} \varepsilon_{mn}$$

Отсюда следует, что с точностью до малого параметра m будут выполняться уравнения Сен-Венана — Мизеса, использованные в работе. Этот параметр будет существенным только при значительном удалении от границы тела. Там исчезнет поперечная ударная волна, напряжения на границах зон сделаются непрерывными. Однако вблизи тела течение будет близко к рассмотренному, а полученные результаты для напряжений и сил, действующих на тело, могут быть использованы для приближенной оценки реальных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 4. С. 41—56.
2. *Григорян С. С.* Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846—849.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1. 583 с.; Т. 2. 727 с.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.; Т. 2. 560 с.
5. *Флитман Л. М.* О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 131—137.
6. *Флитман Л. М.* Пограничный слой в потоке пластической среды вблизи шероховатой поверхности // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 663—669.
7. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.IX.1989