Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 539.3

Е. Л. Нахмейн, Б. М. Нуллер

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучаются свойства эквивалентности некоторых краевых задач для орто- и изотропных упругих областей в стационарной дозвуковой динамике и статике. При помощи этих свойств полученные ранее в явной форме решения динамических контактных задач для изотропной полуплоскости с четырьмя и составной плоскости с шестью типами граничных условий [1] распространяются на случай ортотропного материала, характеристическое уравнение которого имеет чисто мнимые корни. Аналогичная задача для произвольной ортотропной полуплоскости решается путем построения новых комплексных потенциалов. Доказывается существование и единственность действительного корня уравнения Рэлея, определяющего скорость распространения поверхностной волны в ортотропной полуплоскости со свободной границей. Решается в элементарных функциях задача отрывания полностью сцепленного штампа от ортотропной полуплоскости; доказывается существование единственного участка отслаивания, найдена его длина, вычислены контактные напряжения.

Статические смешанные задачи для анизотропной полуплоскости при одновременной постановке двух типов граничных условий впервые были рассмотрены Г. Н. Савиным [2] и Л. А. Галиным [3]. Соответствующие динамические стационарные задачи, исключая задачи с условиями полного сцепления, можно решить при помощи потенциалов Г. И. Баренблатта — Г. П. Черепанова [4].

1. Пусть x_1, y — прямоугольные декартовы координаты, направления осей которых совпадают с главными направлениями упругости ортотропной плоскости, $x = x_1 - ct$, y — система координат, движущаяся относительно этой плоскости с постоянной скоростью c, t — время.

Стационарные деформации плоскости в системе x, y определим уравнениями равновесия, обобщенным законом Гука и условием сплошности

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2v}{\partial x^2},\quad \alpha=\rho c^2 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_x=\beta_{11}\sigma_x+\beta_{12}\sigma_y,\quad \varepsilon_y=\beta_{12}\sigma_x+\beta_{22}\sigma_y,\quad \varepsilon_{xy}=\beta_{66}\tau_{xy} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y},\quad \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\beta_{kk}>0,\quad \beta_0^2-\beta_{12}^2>0,\quad \beta_0=\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}$$

где β_{jk} — коэффициенты ортотропии, ρ — плотность материала.

Объединяя производные по x и используя последние равенства (1.2), (1.3), запишем уравнения (1.1) в форме, не содержащей инерционных членов:

$$\partial\sigma_x^*/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y=0,\quad \partial\tau_{xy}/\partial x+\partial\sigma_y^*/\partial y=0 \tag{1.4}$$

$$\sigma_x^*=\sigma_x-\alpha u',\quad \sigma_y^*=(1-\alpha\beta_{66})^{-1}(\sigma_y+\alpha u'),\quad u'=\partial u/\partial x$$

Подставив (1.4) в (1.2), получим закон Гука для новой «ортотропной» плоскости с «напряжениями» σ_x^*, σ_y^*, τ_{xy}:

$$\varepsilon_x=\gamma_{11}\sigma_x^*+\gamma_{12}\sigma_y^*,\quad \varepsilon_y=\gamma_{21}\sigma_x^*+\gamma_{22}\sigma_x^*,\quad \varepsilon_{xy}=\gamma_{66}\tau_{xy} \tag{1.5}$$

$$\gamma_{11}=\beta\beta_{11},\quad \gamma_{12}=\beta\beta_{12}(1-\alpha\beta_{66}),\quad \gamma_{21}=\beta[\beta_{12}-\alpha(\beta_0^2-\beta_{12}^2)]$$

$$\gamma_{22}=\beta(1-\alpha\beta_{66})[\beta_{22}-\alpha(\beta_0^2-\beta_{12}^2)],\quad \beta=[1-\alpha(\beta_{11}-\beta_{12})]^{-1},$$

$$\gamma_{66}=\beta_{66}$$

Аналогичная связь имеет место в пространственной задаче.

Уравнения (1.3)—(1.5) совпадают по форме с уравнениями статики ортотропной плоскости (1.1)—(1.3) при $c = 0$. Поэтому краевой задаче для ортотропной области в динамической постановке соответствует статическая задача для той же области с прежними условиями для перемещений и касательных напряжений, но с иными коэффициентами ортотропии, зависящими от инерционного параметра α, и иными типами краевых условий вместо условий в напряжениях σ_x, σ_y, определяемыми равенствами (1.4). В этом смысле рассмотренные задачи эквивалентны, к ним применимы одни и те же методы, если они не опираются на симметричность закона Гука, ибо $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$. К числу таких методов принадлежит метод комплексных потенциалов: лежащее в его основе уравнение (1.3) является общим для (1.1)—(1.3) и (1.3)—(1.5).

2. Воспользуемся потенциалами С. Г. Лехницкого, через которые решение «статической» задачи (1.3)—(1.5) выражается в виде [5]

$$\sigma_x^* = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} \mu_k^2 \varphi_k (z_k), \quad \sigma_y^* = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} \varphi_k (z_k), \quad \tau_{yx} = -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} \mu_k \varphi_k (z_k) \tag{2.1}$$

$$u' = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} p_k \varphi_k (z_k), \quad v' \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} s_k \varphi_k (z_k)$$

$$p_k = \gamma_{11}\mu_k^2 + \gamma_{12}, \quad s_k = \gamma_{21}\mu_k + \gamma_{22}\mu_k^{-1}, \quad z_k = x + \mu_k y$$

Здесь $\varphi_k (z_k)$ — функция, аналитическая в плоскости z_k, μ_k — корни уравнения

$$\gamma_{11}\mu^4 + (\gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{66})\, \mu^2 + \gamma_{22} = 0 \tag{2.2}$$

такие, что $\mu_1 \neq \mu_2$, $\operatorname{Im} \mu_k > 0$. Решения для кратных и действительных корней не рассматриваются. Они соответствуют случаям исключительного сочетания параметров ортотропии (в частности, изотропии) и потери эллиптичности системы уравнений теории упругости, что требует изменения формы решения (2.1).

Переходя к напряжениям в исходной динамической задаче (1.1)—(1.3), согласно (1.4) получим

$$\begin{gathered}\sigma_x = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} [\mu_k^2 + \alpha (\gamma_{12} + \mu_k^2\gamma_{11})]\, \varphi_k (z_k) \\ \sigma_y = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} r_k \varphi_k (z_k), \quad r_k = 1 - \alpha (\gamma_{12} + \gamma_{66} + \mu_k^2\gamma_{11})\end{gathered} \tag{2.3}$$

Остальные компоненты сохраняют свой вид (2.1).

3. Решение (2.1)—(2.3) теряет смысл на действительном корне μ_k формально из-за вырождения плоскости z_k в прямую $y = 0$. По существу это происходит потому, что, будучи аналитическим, оно описывает лишь достаточно гладкие поля деформаций, характерные для дозвуковых режимов. В изотропной плоскости граница таких режимов определяется скоростью волн сдвига $c_2 = (\rho\beta_{66})^{-1/2}$. В анизотропном материале величина скорости волны зависит от ее направления; поэтому граница эллиптичности системы уравнений упругости для данного материала не может быть выражена через какую-либо скорость волны универсальной формулой. Из физических соображений понятно, что верхней границей эллиптичности является наименьшая c^* из скоростей плоских продольных волн расширения c_1 и сдвига c_2.

Поскольку плоская волна расширения симметрична, а сдвига — кососимметрична относительно оси x, их можно рассматривать как «поверхностные» волны в ортотропной полуплоскости $y < 0$ соответственно при скользящей и антискользящей заделке границы $y = 0$. Применив к уравнениям (1.1)—(1.3) двустороннее преобразование Лапласа по x, из условий 1) $\tau_{xy} = v' = 0$ и 2) $\sigma_y = u' = 0$ при $y = 0$ получим характеристические функции $R_k = R_k(c) = \sqrt{1 - c^2 c_k^{-2}}$, $k = 1, 2$, нули которых имеют вид $c_1 = \sqrt{\beta_{22}}\,[\rho(\beta_0^2 - \beta_{12}^2)]^{-1/2}$, $c_2 = (\rho\beta_{66})^{-1/2}$. Анализ уравнения (2.2) подтверждает, что за счет изменения знака величины $\gamma_{11}\gamma_{22}$ с плюса на минус ($\gamma_{22} = \beta\beta_{22}R_1^2(c)\,R_2^2 c)$) при переходе c через $c^* = \min(c_1, c_2)$ по меньшей мере один из корней μ_k при $c > c^*$ становится действительным, эллиптичность теряется. Можно указать примеры ортотропии, когда это происходит и при $c < c^*$. В дальнейшем рассматривается только «дозвуковой» режим, $c \in [0, c^*)$.

Аналогично из условий 3) $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$ и 4) $u = v = 0$ получим характеристические функции (и уравнения Рэлея)

$$R_3(c) = R_2(c)(1 - \alpha\beta_{11}) - \alpha\beta_0 R_1(c) = 0$$

$$R_4(c) = \sqrt{\beta_{11}}\,c_2^{-2}R_1(c) + \sqrt{\beta_{22}}\,c_1^{-2}R_2(c) = 0$$

Действительные нули этих функций, если они существуют и не порождают действительные корни уравнения (2.2), определяют скорости поверхностных волн в свободной и защемленной полуплоскостях; сами функции $R_k(c)$ входят в решения смешанных задач для ортотропной полуплоскости (см. разд. 4 и 6).

4. Исследуем нули функции $R_3(c)$ при $c \in (0, c^*)$. Если $c_2 < c_1$, то $c^* = c_2$, $R_3(c^*) = -\rho c_2^2\beta_0 R_1(c_2) < 0$; если $c_2 > c_1$, то $c^* = c_1$, $R_3(c^*) = \beta_{12}^2(\beta_{12}^2 - \beta_0^2)\,R_2(c_1) < 0$; если $c_2 = c_1$, то функция $R_3(c) = [1 - \alpha(\beta_{11} + \beta_0)]\,R_1(c)$ при $c \to c^* - 0$ эквивалентна бесконечно малой $AR_1(c)$, где $A = (\beta_{12}^2 + \beta_{22}\beta_0)(\beta_{12}^2 - \beta_0^2)^{-1} < 0$, и, следовательно, отрицательна. Во всех случаях $R_3(0) = 1$, поэтому нуль $c = c_R$ функции $R_3(c)$ в промежутке $(0, c^*)$ существует.

Для доказательства его единственности достаточно доказать, что $R'(\alpha_*) < 0$, где $R(\alpha) \equiv R_3(c)$, $\alpha_* = \rho c_R^2$.

Дифференцируя по α и учитывая, что $R(\alpha_*) = 0$, получим

$$R'(\alpha_*) = -\{\beta_{11}R_2^* + \beta_0[R_1^* + {}^1/_2\rho(c_1^2 - c_2^2)\,c_R^2(R_1^*R_2^*)^{-1}]\},\quad R_k^* = R_k(c_R)$$

следовательно, $R'(\alpha_*) < 0$ при $c_1 \geqslant c_2$.

Пусть $c_1 < c_2$. Так как $R(\alpha_*) = 0$, то $1 - \beta_{11}\alpha_* > 0$,

$$\alpha_* \in (0, \beta_{11}^{-1}),\quad R^+(\alpha) \equiv R_2(c)(1 - \alpha\beta_{11}) + \alpha R_1(c)\;\beta_0 > 0$$

при $\alpha \in (0, \beta_{11}^{-1})$, нули функций $P(\alpha) \equiv R^+(\alpha)\,R(\alpha) = (1 - \alpha\beta_{11})^2R_2^2(c) - \alpha^2\beta_{11}R_1^2(c)$ и $R(\alpha)$ в $(0, \beta_{11}^{-1})$ совпадают; если $P'(\alpha_*) < 0$, то и $R'(\alpha_*) < 0$.

Допустим противное: $P'(\alpha_*) \geqslant 0$. Введем величины $\varepsilon = \beta_{66}\alpha_*$ и $\varkappa = c_2^2c_1^{-2}$, изменяющиеся в области $0 < \varepsilon < 1$, $\varkappa > 1$, $\varepsilon\varkappa < 1$. Из условия $P(\alpha_*) = 0$ следует, что $\beta_0^2 = (1 - \varepsilon)(\beta_{66} - \beta_{11})^2(1 - \varepsilon\varkappa)^{-1}\varepsilon^{-2}$. Отсюда и из условия $P'(\alpha_*) \geqslant 0$ получим

$$(1 - \beta_{11}\alpha_*)\left\{\left(1 - \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon\varkappa}\right)\beta_{11} - \left[\frac{(1 - \varepsilon)\varkappa}{1 - \varepsilon\varkappa} - \frac{2}{\varepsilon} + 1\right]\beta_{66}\right\} \geqslant 0$$

или, используя оценки $1 - \beta_{11}\alpha_* > 0$, $1 - \varkappa < 0$, получим неравенство

$$\beta_{11} \leqslant B\beta_{66},\quad B = (2 - \varepsilon - 3\varepsilon\varkappa + 2\varepsilon^2\varkappa)(1 - \varkappa)^{-1}\varepsilon^{-2} \tag{4.1}$$

выполняющееся только при $B > 0$. Пусть $B > 0$, $\beta_0^2 = C\beta_{66}^2$, тогда $C > 0$, $B\beta_{22} > C\beta_{66}$. Учитывая, что $c_2^2 = \varkappa c_1^2$, отсюда имеем $C(B - \varkappa)\,\beta_{66}^2 \geqslant B\beta_{12}^2$ или $B \geqslant \varkappa$, или $B = \varkappa N$ где $N \geqslant 1$. В силу (4.1) функция

$$f(\varepsilon, \varkappa, N) = 2 - \varepsilon - 3\varepsilon\varkappa + 2\varepsilon^2\varkappa - \varepsilon^2\varkappa(1-\varkappa)N$$

должна иметь нуль в области $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varkappa > 1$, $N \geqslant 1$.

Введем функцию $f_1(\varepsilon, \varkappa) \equiv f(\varepsilon, \varkappa, 1)$. В новых переменных $\lambda = 1 - \varepsilon$, $\mu = \varkappa - 1$ получим

$$f_1(\varepsilon, \varkappa) = (\lambda - \mu)(2\lambda - \mu) + \lambda\mu(3\lambda - 2\mu + \lambda\mu), \quad \lambda \in (0, 1), \quad \mu > 0$$

Из условия $\varepsilon\varkappa < 1$ следует, что $\lambda\mu > \lambda - \mu$. Полагая $\lambda\mu = \lambda - \mu + t$, $t > 0$, получим $f_1(\varepsilon, \varkappa) = t(\lambda + t)$. Так как $f_1(\varepsilon, \varkappa) > 0$ при всех $\varepsilon, \varkappa, N$, функция $f(\varepsilon, \varkappa, N)$ положительна там, где она должна иметь нуль. Это противоречие показывает, что $R'(\alpha_*) < 0$.

Таким образом, действительный корень уравнения $R_3(c) = 0$ в промежутке $(0, c^*)$ существует и единствен. Полученный результат является решением проблемы, поставленной в [4]. Однако на вопрос, существует ли волна, распространяющаяся в ортотропной полуплоскости с рэлеевской скоростью $c_R \in (0, c^*)$ при любых упругих характеристиках β_{jk}, можно положительно ответить, лишь доказав, что уравнение (2.2) не имеет действительного корня при $c = c_R$. Такое доказательство получено и будет опубликовано отдельно.

У функции $R_4(c)$, согласно (3.1), в промежутке $(0, c^*)$ нулей нет, следовательно, в защемленной ортотропной полуплоскости, включая случай изотропии [1], стационарные волны не существуют.

5. Если корни уравнения (2.2) чисто мнимы $\mu_k = i\nu_k$, $\nu_1 \neq \nu_2$, то существует еще одна аналогия — между задачами стационарной динамики (1.1)—(1.3) для ортотропных и изотропных областей. Чтобы ее выявить, перейдем к уравнениям (1.3)—(1.5), которые будем решать в новой форме:

$$A_1\sigma_y = \operatorname{Re}[q\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)], \quad A_2\tau_{xy} = \operatorname{Im}[q_1\varphi_1(z_1) + q\varphi_2(z_2)]$$
$$A_3u' = -\operatorname{Re}[\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)], \quad A_4v' = \operatorname{Im}[q_1\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]; \quad (5.1)$$
$$z_k = x + i\nu_k y$$

где $q, q_1, q_2, A_1, \ldots, A_4$ — действительные числа. Приравнивая множители при функциях $\varphi_k(z_k)$ в четырех соответственных выражениях (5.1) и (2.1), (2.3), последовательно получим

$$A_3 = -p_1^{-1}, \quad A_4 = -is_2^{-1}, \quad q_1 = s_1s_2^{-1}, \quad A_2 = s_1(s_2\nu_1)^{-1}$$
$$q = s_1\nu_2(s_2\nu_1)^{-1}, \quad A_1 = qr_1^{-1}, \quad q_2 = A_1r_2 \qquad (5.2)$$

Поскольку эти семь коэффициентов (действительные только при мнимых корнях (2.2)) должны удовлетворять восьми условиям, возникает дополнительное ограничение

$$p_1s_1\nu_2r_2 = p_2s_2\nu_1r_1 \qquad (5.3)$$

Можно показать, что оно всегда выполняется.

Действительно, обозначив

$$P = p_1s_1\nu_2r_2 - p_2s_2\nu_1r_1, \quad \chi_k = p_k + \gamma_{66} \qquad (5.4)$$

из (2.3), (2.1) в силу (2.2) получим $r_k = 1 - \alpha\chi_k$, $s_k = \nu_k\chi_k$. Отсюда и из (5.4) следует

$$P = \nu_1\nu_2(p_1 - p_2)(\gamma_{66} + p_1 + p_2 - \alpha\chi_1\chi_2)$$

Учитывая, что $p_k = \gamma_{12} - \nu_k^2\gamma_{11}$ и, согласно, (2.2) по формулам Виета $\nu_1^2\nu_2^2 = \gamma_{22}\gamma_{11}^{-1}$, $\nu_1^2 + \nu_2^2 = \gamma_{11}^{-1}(\gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{66})$, получим

$$P = \nu_1\nu_2(p_1 - p_2)[\gamma_{12} - \gamma_{21} - \alpha(\nu_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{66}\gamma_{21})] \equiv 0 \qquad (5.5)$$

так как при подстановке вместо γ_{jk} выражений (1.5) содержимое квадратных скобок обращается в тождественный нуль.

Решение (5.1), (5.2) с точностью до несущественных множителей A_k совпадает по форме с решениями стационарных динамических задач для изотропных полуплоскостей и составной плоскости [1]. В [1] поставлены и решены краевые задачи Гильберта — Римана, соответствующие смешанным условиям четырех и шести типов, которые определяют контакт границы полуплоскости и берегов составной плоскости с различными штампами и накладками. Для того чтобы выписать, например, решение такой же задачи для ортотропной полуплоскости, нужно в [1] заменить заданные при $y = 0$ функции $u' = u_0(x)$, $v' = v_0(x)$ и т. д. на функции $A_3 u_0(x)$, $A_4 v_0(x)$, . . ., вычислить коэффициенты A_1, A_2, . . ., q_2 по формулам (5.2) и положить $\mu = 1$. Компонентами полученного решения, согласно (5.1), будут величины $A_3 u'$, $A_4 v'$ и т. д.; в отличие от [1] они не вырождаются при $c = 0$ (исключая, разумеется, случай изотропии) и охватывают, таким образом, статическую задачу.

6. Пусть корни уравнения (2.2) комплексны. Вернемся к форме (2.1), 2.3) и построим решение задачи для ортотропной полуплоскости $y < 0$, на участках L_1, . . ., L_4 границы которой $y = 0$ поставлены контактные условия ($L_j \cap L_k = 0$ при $j \neq k$)

$$u_1' \equiv u' = u_0(x), \quad x \in L_2 \cup L_3; \quad u_2' = v' = v_0(x), \quad x \in L_1 \cup L_3 \tag{6.1}$$

$$\sigma_{12} \equiv \tau_{xy} = \tau_0(x), \quad x \in L_1 \cup L_4; \quad \sigma_{22} \equiv \sigma_y = \sigma_0(x), \quad x \in L_2 \cup L_4$$

Заметим, что путем разбиения граничных условий на симметричные и кососимметричные к двум таким задачам сводится задача для однородной ортотропной плоскости, ослабленной системой прямолинейных разрезов, на противоположных берегах которых и вне разрезов одновременно поставлены одинаковые условия девяти типов в виде заданных функций:

$$1)\ \sigma_y, \tau_{xy}, \quad 2)\ u, v, \quad 3)\ v, \tau_{xy}, \quad 4)\ u, \sigma_y, \quad 5)\ v, [u], [\tau_{xy}],$$

$$6)\ \sigma_y,\ [u],\ [\tau_{xy}],\ 7)\ \tau_{xy},\ [v],\ [\sigma_y],\ 8)\ u, [v], [\sigma_y], 9)\ [u],\ [v],\ [\sigma_y],\ [\tau_{xy}]$$

Они определяют контакт берегов с нерастяжимыми гибкими стрингерами и полностью сцепленными или скользящими жесткими штампами, а также их взаимные гребенчатые сцепления и контакт через вложенные в разрез скользящие или впаянные стрингеры; $[f]$ — скачок функции $f(x)$.

Следуя [1], положим

$$\tfrac{1}{2}\varphi_k(z) = A_{k1}\Phi(z) + \bar{A}_{k2}\overline{\Phi}(z), \quad \overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad z = x + iy \tag{6.2}$$

где A_{kl} — произвольные комплексные постоянные, $\Phi(z)$ — кусочно аналитическая функция, для которой на L_4 возникают условия задачи о скачке, на L_3 — условия задачи Римана.

Если граничные значения функций (6.1) искать в виде

$$(-1)^k \sigma_{k2} = 2\operatorname{Re}[\alpha_k(\Phi^+(x) - \Phi^-(x))], \quad x \in L_4, \quad k = 1, 2 \tag{6.3}$$

$$-u_k' = 2\operatorname{Re}[\alpha_{k1}\Phi^+(x) - \alpha_{k2}\Phi^-(x)], \quad \alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}\alpha_{21}, \quad x \in L_3 \tag{6.4}$$

где α_k и α_{kl} — комплексные числа, то эти условия при $\operatorname{Im} S \neq 0$ и $\operatorname{Im} \bar{N} \neq 0$ выполняются, ибо в силу (6.3), (6.4) имеем

$$\sigma_{22} - \bar{S}\sigma_{12} = -\alpha_1(S - \bar{S})(\Phi^+(x) - \Phi^-(x)), \quad S = -\alpha_2\alpha_1^{-1}, \quad x \in L_4 \tag{6.5}$$

$$u_1' + \bar{N}u_2' = (\alpha_{11} + \bar{N}\alpha_{21})\Phi^+(x) - (\alpha_{12} + \bar{N}\alpha_{22})\Phi^-(x), \quad x \in L_3 \tag{6.6}$$

$$N = -\alpha_{11}\alpha_{21}^{-1} = -\alpha_{12}\alpha_{22}^{-1}$$

Вычислим коэффициенты, входящие в (6.2)—(6.6). Подставим (6.2) в (2.3). Приравнивая множители при функциях $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ в (2.3) и (6.3), получим

$$\bar{\mu}_1 A_{12} + \bar{\mu}_2 A_{22} = -\mu_1 A_{11} - \mu_2 A_{21} = \alpha_1$$
$$\bar{r}_1 A_{12} + \bar{r}_2 A_{22} = -r_1 A_{11} - r_2 A_{21} = \alpha_2$$

Положим $\alpha_1 = -1$, тогда $\alpha_2 = S$.

Решая эту систему, получим

$$A_{11} = \Delta_2(S)\Delta,\ A_{12} = -\overline{\Delta}_2(S)\overline{\Delta},\ A_{21} = -\Delta_1(S)\Delta,\ A_{22} = \overline{\Delta}_1(S)\overline{\Delta} \quad (6.7)$$
$$\Delta^{-1} = \mu_1 r_2 - \mu_2 r_1 = (\mu_1 - \mu_2) R_2 R_1 \beta,\quad \Delta_k(S) = r_k + \mu_k S,\ \overline{\Delta}_k(S) = \overline{\Delta_k(\bar{S})}$$

Подставим (6.7) в (6.2), (6.2) в (2.1). Из условия равенства множителей при $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$ в соответственных компонентах (2.1) и (6.4) следует

$$\begin{gathered}\alpha_{11} = \bar{P}_1 + S\bar{P}_2,\ \alpha_{12} = P_1 + SP_2,\ \alpha_{21} = \bar{Q}_1 + S\bar{Q}_2\\ \alpha_{22} = Q_1 + SQ_2,\ P_1 = (p_1 r_2 - p_2 r_1)\Delta,\ P_2 = (p_1\mu_2 - p_2\mu_1)\Delta\\ Q_1 = (q_1 r_2 - q_2 r_1)\Delta,\quad Q_2 = (q_1\mu_2 - q_2\mu_1)\Delta\end{gathered} \quad (6.8)$$

Связь (6.6) между α_{kj} и N и формулы (6.8) порождают квадратные уравнения

$$\begin{gathered}S^2 \operatorname{Im}(P_2\bar{Q}_2) + S\operatorname{Im}(P_1\bar{Q}_2 + \bar{P}_2 Q_1) + \operatorname{Im}(P_1\bar{Q}_1) = 0\\ N^2 \operatorname{Im}(Q_1\bar{Q}_2) + N\operatorname{Im}(P_1\bar{Q}_2 + \bar{P}_2 Q_1) + \operatorname{Im}(P_1\bar{P}_2) = 0\end{gathered} \quad (6.9)$$

Корни этих уравнений чисто мнимые.

Покажем это. Подставив p_k, r_k, s_k из (2.1), (2.3) и (6.8), получим

$$\begin{gathered}P_1 = i\mu_0\gamma_{11}R_2{}^2\Delta^*,\ Q_1 = -P_2 = (\gamma_0 + \gamma_{12})\Delta^*,\ Q_2 = i\mu_0\gamma_0\Delta^*\\ \Delta^* = [1 - \alpha(\gamma_0 + \gamma_{12} + \gamma_{66})]^{-1},\ i\mu_0 = \mu_1 + \mu_2,\ \gamma_0 = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}\end{gathered} \quad (6.10)$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2) = 0$, $c < c^*$, $\beta_{11} > 0$, то числа $\mu_0 > 0$, γ_0, Δ^*, P_2, Q_1 действительны, числа P_1, Q_2 — мнимы, $\operatorname{Im}(P_1\bar{Q}_2) = \operatorname{Im}(\bar{P}_2 Q_1) = 0$. Отсюда и из (6.9), (6.10), учитывая соотношения (5.5), (6.4), (6.8) имеем

$$S = -N = i\gamma_{11}^{1/4}\gamma_{22}^{-1/4}R_2(c)$$

Следовательно, согласно (1.5), при $c \in [0, c^*]$ S и N — мнимые числа.

Граничные значения функций (6.3), (6.4) принимают вид

$$\begin{gathered}E_0 u' = -2s_0 \operatorname{Im}(Q^+\Phi^+ - Q^-\Phi^-),\ \sigma_y = -2s_0\operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-)\\ E_0 v' = -2\operatorname{Re}(Q^+\Phi^+ - Q^-\Phi^-),\ \tau_{xy} = 2\operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-),\\ E_0 \equiv E_0(c) = R_2(c) R_3(c)\\ s_0 = -iS = \beta_{11}{}^{1/4}\beta_{22}{}^{-1/4}R_1{}^{-1/2}(c) R_2{}^{1/2}(c),\quad Q^\pm \equiv Q^\pm(c) = [\gamma_0(1 \pm\\ \pm s_0\mu_0) + \gamma_{12}]\beta^{-1}\end{gathered} \quad (6.11)$$

Подставив (6.11) в (6.1), при учете (6.5), (6.6) получим решенную в [1] комбинированную задачу Гильберта — Римана для плоскости с разрезами $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\Phi^\pm(x) = -{}^1/_2(Q^+ - Q^-)^{-1}[E_0 v_0(x) + Q^\mp\tau_0(x)],\quad x \in L_1\\ \operatorname{Im}\Phi^\pm(x) = -{}^1/_2\, s_0{}^{-1}(Q^+ - Q^-)^{-1}[E_0 u_0(x) - Q^\mp\sigma_0(x)],\ x \in L_2\\ \Phi^+(x) - Q\Phi^-(x) = -{}^1/_2 E_0(s_0 Q^+)^{-1}[s_0 v_0(x) + iu_0(x)],\quad Q = Q^-/Q^+,\ x \in L_3\\ \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = {}^1/_2[\tau_0(x) - is_0{}^{-1}\sigma_0(x)],\quad x \in L_4\end{gathered} \quad (6.12)$$

Формулы (6.11) показывают, что за счет величины $E_0(c)$ при сохранении знаков граничных напряжений знаки граничных перемещений, как и в изотропной полуплоскости, противоположны в до- и сверхрэлеевском диапазонах $(0, c_R)$ и (c_R, c^*); так как $E_0(c_R) = 0$, при $c = c_R$ на границе $y = 0$ $iu' + s_0 v' \neq 0$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, что и означает существование рэлеевской волны.

Исследуем поведение особенностей в точках раздела граничных условий при переходе на сверхрэлеевскую скорость. С этой целью рассмотрим основную задачу для ортотропной полуплоскости $y < 0$ с граничными условиями $u' = \delta(x)$, $v' = 0$ при $y = 0$, где $\delta(x)$ — функция Дирака. Из выражений (2.1), (2.3) решая задачу Дирихле, непосредственно получим

$$\tau_{xy}(x, 0) = \rho\mu_0\gamma_0 [\pi\beta \sqrt{\beta_{22}} R_2(c) R_4(c) x]^{-1} \tag{6.13}$$

Та же задача в форме (2.1), (2.3), (6.2)—(6.11) имеет решение

$$\tau_{xy}(x, 0) = -E_0\mu_0\gamma_0 [\pi\beta Q^+Q^- x]^{-1} \tag{6.14}$$

Сравнивая (6.13) и (6.14), получим $Q^+Q^- = -\rho^{-1}\sqrt{\beta_{22}} R_2^2 R_3 R_4$. Так как $R_2^2(c) R_4(c) \neq 0$ при $c \in (0, c^*)$, вместе с $R_3(c)$ функция $Q^+(c) Q^-(c)$, согласно разд. 4, имеет в $(0, c^*)$ ровно один простой нуль $c = c_R$. Поскольку функции $Q^{\pm}(c)$ ограничены в $(0, c^*)$, отсюда следует, что функция $Q(c)$ — коэффициент в условии Римана (6.12) — изменяет знак только при переходе c через c_R. Функция $Q(c)$ в $[0, c_R)$ непрерывна по β_{jk} и c и при $c = 0$ для изотропного материала $Q(c) < 0$. Поэтому и в общем случае ортотропии $Q(c) < 0$ при $c \in [0, c_R)$.

В связи с изменением знака $Q(c)$ с минуса на плюс, согласно (6.12), под краями полностью сцепленных изолированных штампов обычное, корневое, поведение напряжений при $c \in [0, c_R)$ исчезает на сверхрэлеевской скорости, сохраняя осцилляцию; в классе решений, имеющих ограниченную энергию упругих деформаций, включая и случай изотропии, напряжения под штампами также ограничены. Под краями скользящих штампов и стрингеров корневые особенности у напряжений остаются независимо от того, имеют они общие точки с полностью сцепленными штампами или нет [6].

7. Рассмотрим задачу отрывания бесконечного штампа от полностью сцепленной с ним ортотропной полуплоскости движущейся с дорэлеевской скоростью сосредоточенной силой $(P_1, -P_2)$, приложенной к свободной границе полуплоскости на расстоянии a от движущегося с той же скоростью конца трещины $x = y = 0$. Будем считать, что на участке $x \in [-b, 0)$, $y = 0$ трещина закрыта и коэффициент контактного трения равен нулю, $v(x) \leqslant 0$ при $x \in [-a, -b]$, пересечение штампа и полуплоскости за силой при $x \in (-\infty, -a)$ оказывает слабое влияние на решение при $x > -a$ и может не учитываться.

Согласно (6.1), (6.12), граничные условия этой задачи

$$\begin{gathered} \tau_{xy} = P_1\delta(x + a), \quad \sigma_y = -P_2\delta(x + a), \quad x \in (-\infty, -b) \\ v' = \tau_{xy} = 0, \quad x \in [-b, 0); \quad u' = v' = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad a > b \end{gathered} \tag{7.1}$$

и решение (2.1), (2.3), (6.2) порождают комбинированную задачу Дирихле — Римана ($\theta = 0$ при $P_1 = 0$, $P_2 > 0$)

$$\begin{gathered} \Phi^+ - \Phi^- = g(x), \quad x \in (-\infty, -b) \\ \Phi^+ = Q\Phi^-, \quad x \in [0, \infty); \quad \operatorname{Re}\Phi^{\pm} = 0, \quad x \in [-b, 0) \\ g(x) = {}^1/_2 iTe^{-i\theta}\delta(x + a), \quad iTe^{i\theta} = P_1 + is_0^{-1}P_2, \quad |\theta| \leqslant \pi \end{gathered} \tag{7.2}$$

Используя методику разд. 1 [6], каноническое решение задачи (7.2) получим в виде

$$X(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{z}}, \quad \varphi(z) = -2\gamma \ln\frac{1}{i}\left(\sqrt{\frac{z}{b}} + \sqrt{1 + \frac{z}{b}}\right), \quad \gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln(-Q)$$

$$0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \arg(z + b) \leqslant 2\pi$$

$$\begin{gathered} \varphi^{\pm}(x) = \psi_1(x), \quad \psi_1(x) = -2\gamma \ln\left(\sqrt{-b^{-1}x - 1} + \sqrt{-b^{-1}x}\right), \\ x \in (-\infty, -b) \\ \varphi^{\pm}(x) = \pm i[\pi\gamma - \psi_2(x)], \quad \psi_2(x) = 2\gamma \operatorname{arctg}\sqrt{-x(b - x)^{-1}}, \\ x \in (-b, 0) \\ \varphi^{\pm}(x) = \pm i\pi\gamma + \psi_3(x), \quad \psi_3(x) = -2\gamma \ln\left(\sqrt{b^{-1}x + 1} + \sqrt{b^{-1}x}\right), \\ x \in [0, \infty) \end{gathered} \tag{7.3}$$

$$X(z) \sim e^{-\pi\gamma}({}^1/_4 b)^{i\gamma} z^{-1/2 - i\gamma}, \quad z \to \infty$$

Функция $X(z)$ при $z = b$ ограничена, при $z = 0$ имеет корневую особенность, $\gamma > 0$, так как $0 < -Q < 1$. Положив

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \quad F(z) = F_0(z) + F_1(z)$$

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-b} \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} = -\frac{Te^{-i\theta}}{4\pi(z+a)X^+(-a)} = \tag{7.4}$$

$$= -iT\sqrt{a}\exp[-i(\psi_a + \theta)][4\pi(z+a)]^{-1}, \quad \psi_a = \psi_1(-a)$$

из (7.2) получим краевую задачу Дирихле для плоскости с разрезом $\operatorname{Im} F_1^{\pm}(x) = -\operatorname{Im} F_0(x)$, $x \in [-b, 0)$, причем искомая функция $F_1(z)$ должна быть постоянной при $z \to \infty$, ограниченной при $z = 0$ и интегрируемой при $z = -b$. Эта функция имеет вид [7]

$$F_1(z) = C_0 + iD_0Y_0(z) - \frac{Y_0(z)}{\pi}\int_{-b}^{0} \frac{\operatorname{Im} F_0(t)\,dt}{Y_0^+(t)(t-z)} \tag{7.5}$$

$$Y_0(z) = z^{1/2}(z+b)^{-1/2}, \quad Y_0^{\pm}(x) = \pm i(-x)^{1/2}(x+b)^{-1/2}$$

где C_0, D_0 — произвольные действительные постоянные.

Вычислив интеграл [8]

$$\int_{-b}^{0} \frac{dt}{(t+a)Y_0^+(t)(t-z)} = \frac{\pi i}{z+a}\left[\frac{1}{Y_0(z)} - \frac{1}{Y_0(-a)}\right], \quad Y_0(-a) = \sqrt{\frac{a}{a-b}}$$

получим окончательно

$$\begin{gathered}\Phi(z) = X(z)[C_0 + iD_0Y_0(z) + T_1(z+a)^{-1} + \\ + iT_2Y_0^{-1}(-a)(z+a)^{-1}Y_0(z)] \\ iT_1 + T_2 = -(4\pi)^{-1}T\sqrt{a}e^{i(\psi_a+\theta)} \\ \Phi(z) \sim e^{-\pi\gamma}(1/4b)^{i\gamma}z^{-1/2-i\gamma}[C_0 + iD_0 + O(z^{-1})], \quad z \to \infty\end{gathered} \tag{7.6}$$

Пусть корневое поле на бесконечности отсутствует. Тогда $C_0 = D_0 = 0$.

$$\Phi(z) = -\frac{Te^{i\varphi(z)}}{4\pi(z+a)}\left[\sin(\psi_a + \theta)\sqrt{\frac{a}{z}} + i\cos(\psi_a+\theta)\sqrt{\frac{a-b}{z+b}}\right] \tag{7.7}$$

Плавное прилегание штампа в точке $z = -b$ обеспечивается при выполнении условия $\sigma_y(-b) = 0$ или, согласно (6.11) и (7.7), условия $\cos(\psi_a + \theta) = 0$. Таким образом:

$$\Phi(z) = -(4\pi)^{-1}T\sqrt{a}\sin(\psi_a + \theta)\,e^{i\varphi(z)}(z+a)^{-1/2}z^{-1/2} \tag{7.8}$$

На участке проскальзывания $[-b, 0)$ напряжения

$$\sigma_y = -2s_0\operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = \frac{T}{\pi}s_0\sqrt{a}\sin(\psi_a+\theta)\frac{\operatorname{sh}[\pi\gamma - \psi_2(x)]}{(x+a)\sqrt{-x}} \tag{7.9}$$

будут сжимающими при $\psi_a + \theta = -1/2\pi + 2k\pi$, ибо $0 < \psi_2(x) \leqslant \pi\gamma$, $\cos(\psi_a + \theta) = 0$. Отсюда следует, что величина b может иметь лишь счетное множество значений

$$\theta - 2\gamma\ln(\sqrt{ab^{-1}-1} + \sqrt{ab^{-1}}) = -1/2\pi + 2k\pi, \quad k = 0, \ \pm 1, 2, \ldots \tag{7.10}$$

Согласно теореме существования и единственности решения контактной задачи с односторонними связями [9], любой форме контакта может соответствовать не более одного значения k, определяемого условием непересечения $v(x) \leqslant 0$ при $x \in (-a, -b)$. Так как $v(-b) = 0$, это условие выполняется, если, в частности, $v'(x) \geqslant 0$ на $(-a_1, -b]$.

Покажем, что действительно $v'(x) \geqslant 0$. Используя (7.8), (7.3), на $[-a, -b]$ имеем

$$v'(x) = -T[2\pi E_0(x+a)]^{-1}\sqrt{-ax^{-1}}(Q^+ - Q^-)\sin\psi_1(x) \tag{7.11}$$

$$\psi_1'(x) = \gamma(x^2 + bx)^{-1/2} > 0, \quad x \in [-a, -b]$$

На $[-a, -b]$ функция $\psi_1(x)$ в силу (7.3), (7.11) непрерывна и монотонно возрастает, $\psi_1(-b) = 0$, следовательно, $\psi_a \leqslant \psi_1(x) \leqslant 0$, или, учитывая (7.10), получим $-\theta - {}^1/_2\pi + 2k\pi \leqslant \psi_1(x) \leqslant 0$. Так как $Q^+ > Q^-$, отсюда и из (7.11) при условии $v'(x) \geqslant 0$ получим $-\pi \leqslant \psi_1(x) \leqslant 0$. Из этих неравенств, записанных в виде $-\pi \leqslant 2k\pi - \theta_1 - {}^1/_2\pi \leqslant 0$, и из ограничения $|\theta| \leqslant \pi$ следует, что $k = 0$, $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$. Последнее неравенство означает, что решение, естественно, не существует при $P_2 < 0$.

Длина участка проскальзывания определяется из формулы (7.10) при $k = 0$:

$$b = a\,\mathrm{ch}^{-2}\,[{}^1/_2\,({}^1/_2\pi + \theta)\,\gamma^{-1}]$$

Ее наибольшее и наименьшее значения достигаются при $\theta = \mp{}^1/_2\pi$. В первом случае $b = a$, проскальзывание идет до точки $x = -a$, во втором случае сразу за этой точкой начинается пересечение штампа и полуплоскости, что согласуется с решением задачи Черрути.

Вычислим напряжения и их асимптотики на продолжении движущейся трещины. Учитывая, что при $k = 0$ в (7.8) (как и в (7.9)) $\sin(\psi_a + \theta) = -1$, при $x \geqslant 0$ получим

$$\Phi^\pm(x) = \pm T\sqrt{a}\,[4\pi\,(x + a)\sqrt{x}]^{-1} \exp\,[\mp\pi\gamma + i\psi_3(x)]$$

Отсюда и из (6.11) следует

$$\tau_{xy} - is_0^{-1}\sigma_y = 2\,(\Phi^+ - \Phi^-) = -T\sqrt{a}\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma\,[\pi\,(x + a)\sqrt{x}]^{-1} \exp\,[i\psi_3(x)]$$

$$\tau_{xy}(x) \sim T\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma\,(\pi\sqrt{ax})^{-1}, \quad \sigma_y(x) = O(\sqrt{x}), \quad x \to +0$$

Таким образом, трещина распространяется только за счет сдвигового разрушения, причем знак самой сдвигающей силы P_1, согласно (7.2), на коэффициент интенсивности напряжений не влияет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134—144.
2. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 46—55.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 663—673.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с

Ленинград

Поступила в редакцию
31.VIII.1989