Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 539.3 : 534.1

Р. А. Дудник, Е. А. Макеева, Э. А. Фияксель

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ НА КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Проводится анализ динамических характеристик цилиндрической оболочки (ЦО) неограниченной длины с распределенной по азимуту неоднородностью, жестко закрепленной вдоль образующей оболочки. Полученное решение дает возможность представить в аналитическом виде выражение для собственных форм и частот низкочастотной азимутальной ветви колебаний неоднородной ЦО в приближении технической теории. Выяснено влияние неоднородности на распределение вибрационной скорости, что позволяет проводить диагностику виброакустических характеристик неоднородных систем такого типа.

Анализу вибрационных характеристик тонких ЦО с неоднородностями типа присоединенная масса посвящен ряд работ [1—3]. Вместе с тем недостаточно изучены вопросы вибрационных характеристик, связанные с изменениями распределения вибрационной скорости под действием неоднородности.

1. Рассматриваются колебания неограниченной цилиндрической оболочки (ЦО), вдоль образующей которой жестко закреплена неоднородность, характеризуемая погонными массой m_0 и моментом инерции I_0 относительно поворота на угол ϑ вокруг нормали к поверхности оболочки (при $\varphi = \pi$). При этом размеры неоднородности по азимуту характеризуются параметром $\eta = \varphi_0/\pi$ $(0 \leqslant 2\varphi_0 \leqslant \pi/2)$, центр инерции неоднородности находится при $\varphi = \pi$.

Ограничимся анализом простейшего случая, соответствующего преимущественно низкочастотным азимутальным формам колебаний ЦО, и будем пренебрегать тангенциальными силами инерции оболочки. Исследование вибрационных характеристик проведем без учета реакции собственного поля излучения (реализуется при колебаниях ЦО в воздухе). Тогда, используя приближение технической теории оболочек, при помощи принципа Остроградского — Гамильтона получим следующую систему уравнений самосогласованной задачи о вынужденных колебаниях неоднородной ЦО в упругой среде:

$$
\begin{gathered}
W''' - \xi^2 W = F/\beta^2 \\
(W''|_{\varphi=\pi-\varphi_0} - W''|_{\varphi=-\pi+\varphi_0}) + {}^1\!/_2 \sin 2\pi\eta\,(W'''|_{\varphi=\pi-\varphi_0} + \\
+ W'''|_{\varphi=\pi+\varphi_0}) + 2\pi\alpha H^2\xi^2 W' = M^{(N)}/(A\beta_0^2) \qquad (1.1) \\
(W'''|_{\varphi=\pi-\varphi_0} - W'''|_{\varphi=-\pi+\varphi_0}) + \pi\alpha\xi^2(\cos\pi\eta)^{-1}(W|_{\varphi=\pi-\varphi_0} + W|_{\varphi=-\pi+\varphi_0}) = \\
= F^{(N)}a/(A\beta^2)
\end{gathered}
$$

где W — радиальное перемещение ЦО, штрих означает производную по φ.

Система (1.1) решается совместно с уравнениями, соответствующими жесткому закреплению неоднородности на поверхности оболочки:

$$
\begin{gathered}
r = a, \; W|_{\varphi=\pi-\varphi_0} - W|_{\varphi=-\pi+\varphi_0} = -\vartheta a \sin 2\pi\eta, \qquad (1.2) \\
W'|_{\varphi=\pi-\varphi_0} = W'|_{\varphi=-\pi+\varphi_0} = a\vartheta
\end{gathered}
$$

где $F = F(\varphi)$ — интенсивность внешней гармонической силы; в случае локальной силы, приложенной в точке $\varphi = \varphi_1$, имеем $F = F^{(l)}a^{-1}\delta$ (φ —

— φ_1); $F^{(N)}$, $M^{(N)}$ — внешние сила и момент силы, приложенные к неоднородности. В системах (1.1), (1.2) использованы следующие безразмерные параметры:

$$\zeta = \omega/\omega,\ \alpha = m_0/(2\pi m_s a),\ \varkappa = I_0/(2\pi m_s a^3) = \alpha H^2$$
$$I_0 = m_0 h_s^2,\quad H = h_s/a,\ A = Eh/(1-\nu^2) \qquad (1.3)$$
$$(\omega_1 = \omega_0\beta,\ \beta = h/(\sqrt{12}a),\ \omega_0 = a^{-1}\sqrt{E/(\rho_s(1-\nu^2))},\quad m_s = \rho_s h)$$

Здесь ξ — безразмерная частота внешней гармонической силы, ω_0 — частота пульсирующих колебаний оболочки, α — параметр неоднородности, равный отношению погонных масс неоднородности и оболочки радиуса a, m_s — масса единицы поверхности оболочки толщины h, $\varkappa$ — параметр, характеризующий момент инерции неоднородности, h_s — эффективный размер неоднородности, E, ν, ρ_s — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

Решение системы уравнений можно провести известными методами, представив решение в виде рядов по собственным формам колебаний, соответствующим однородной ЦО. Это приводит в системе алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний, характеризующих систему связанных гармонических осцилляторов, связь между которыми осуществляется как через окружающую упругую среду, так и через неоднородность. Причем величина связи возрастает с ростом параметров неоднородности α и $\varkappa$, поэтому анализ вынужденных колебаний и излучения неоднородной ЦО возможен только численными методами.

С целью выяснения влияния неоднородности на характер вынужденных колебаний целесообразно представить решение в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний неоднородной системы. В этом случае можно построить полную ортонормируемую систему собственных функций, основные характеристики которой удается получить в аналитическом виде, что позволяет дать наглядную физическую интерпретацию влияния неоднородности на виброакустические характеристики ЦО.

Учитывая, что неоднородная система имеет плоскость симметрии при $\varphi = 0$, решение задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде

$$W(\varphi) = W^{(1)}(\varphi) + W^{(2)}(\varphi) \qquad (1.4)$$

где $W'(\varphi)$ — симметричные, $W^2(\varphi)$ — антисимметричные функции, что позволяет разделить систему уравнений (1.1), (1.2) на симметричную и антисимметричную части.

Решение этих уравнений имеет вид

$$W_q^{(1)} = \cos\Phi - \frac{\sin\zeta}{\operatorname{sh}\zeta}\operatorname{ch}\Phi,\qquad W_q^{(2)} = \sin\Phi - \frac{\sin\zeta + \chi\cos\zeta}{\operatorname{sh}\zeta + \chi\operatorname{ch}\zeta}\operatorname{sh}\Phi$$
$$-\pi + \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_0 \qquad (1.5)$$
$$\chi = (\gamma/\pi)\sin 2\pi\eta,\ \zeta = \gamma(1-\eta),\ \Phi = \gamma\varphi/\pi$$

где $\gamma = \gamma_q^{(i)}$ — собственные значения и $\xi_q^{(i)}$ — собственные частоты; $\xi_q^{(i)}$ для симметричных ($i = 1$) собственных функций определяются соотношениями

$$1 + (\alpha\cdot{}^1/_2\gamma/\cos\pi\eta)\,[\operatorname{ctg}\zeta,\ \operatorname{ctg}\zeta + \operatorname{cth}\zeta] = 0,\ \xi_q^{(1)} = (\gamma_q^{(1)}/\pi)^2 \quad (1.6)$$

и антисимметричных ($i = 2$) собственных функций

$$1 - (\gamma/\pi)^2\sin^2 2\pi\eta\cdot\operatorname{ctg}\zeta,\ \operatorname{ctg}\zeta + \varkappa\,(\gamma^3/(2\pi^2))\,(\operatorname{ctg}\zeta - \operatorname{cth}\zeta) = 0, \quad (1.7)$$
$$\xi_q^{(2)} = (\gamma_q^{(2)}/\pi)^2$$

Здесь $q = 2, 3$ — номера корней соответствующих характеристических уравнений.

Радиальное перемещение в интервале $\pi - \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant -\pi + \varphi_0$ можно определить из геометрических соотношений:

$$W_q^{(1)} = (W_q\,|_{\varphi=\pi-\varphi_0} \cos\varphi)/\cos\pi\eta, \quad W_q^{(2)} = (W_q\,|_{\varphi=\pi-\varphi_0} \sin 2\varphi)/\sin 2\pi\eta \quad (1.8)$$

Выражения (1.5), (1.8) определяют собственные функции $W_q{}^{(i)}$ ЦО на интервале $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Известным методом можно доказать ортогональность $W_q{}^{(i)}$, весовая характеристика которой зависит от параметров неоднородности α, $\varkappa$, η.

Вычислена норма $D_q{}^{(i)}$ симметричных и антисимметричных форм колебаний.

В дальнейшем будем использовать ортонормированные собственные функции:

$$\psi_q{}^{(i)}(\varphi) = W_q{}^{(i)}(\varphi)/\sqrt{D_q{}^{(i)}}, \quad i = 1,\ 2 \qquad (1.9)$$

2. Рассмотрим характерные особенности собственных функций $\psi_q{}^{(i)}$ и собственных значений $\gamma_q{}^{(i)}$ ($i = 1, 2$). При малых значениях параметров неоднородности $\alpha \ll 1$, $\varkappa \ll 1$ (1.3) решения характеристических уравнений (1.7), (1.8), имеют вид

$$\begin{gathered} \gamma_q^{(1)} \simeq \frac{q\pi}{1-\eta}\left[1 - \frac{\alpha}{2(1-\eta)\cos\pi\eta}\right] \\ \gamma_q^{(2)} \simeq \frac{q\pi}{1-\eta}\left[1 + \frac{q\sin^2 2\pi\eta - 4\varkappa q^2\pi}{8\pi}\right]; \quad q = 2, 3, 4 \end{gathered} \qquad (2.1)$$

Отметим, что в предельном случае, когда $\alpha \to 0$ и $\eta \to 0$ (неоднородность стягивается в точечную), $\gamma \to \pi q$, $\sin\zeta = 0$, $\chi = 0$ собственные значения и собственные функции таковы:

$$\begin{gathered} \gamma_q{}^{(i)} = q\pi, \quad \xi_q{}^{(i)} = q^2 \quad (i = 1,\ 2); \quad \psi_q{}^{(1)} = \pi^{-1/2}\cos q\varphi, \\ \psi_q{}^{(2)} = \pi^{-1/2}\sin q\varphi \end{gathered} \qquad (2.2)$$

что совпадает с известными соотношениями для однородной ЦО.

Таким образом, наличие неоднородности приводит к снятию вырождения собственных значений для ЦО, когда собственным функциям типа $\cos q\varphi$ и $\sin q\varphi$ однородной ЦО соответствуют одинаковые собственные значения γ_q и собственные частоты ξ_q (2.2).

Из соотношений (1.5)—(1.7), (2.1) следует, что масса неоднородности (параметр α) оказывает влияние преимущественно на симметричные формы колебаний, а момент инерции неоднородности (параметр $\varkappa$) — на антисимметричные; параметр, характеризующий размеры неоднородности по азимуту (η), оказывает влияние как на симметричные, так и антисимметричные формы колебаний. При $\alpha \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ происходит снижение значений собственных частот системы $\xi_q{}^{(1)} \neq \xi_q{}^{(2)}$.

Решение характеристических уравнений (1.6), (1.7) удается получить в практически важном случае больших значений параметров неоднородности $\alpha > 1$, $\varkappa > 1$, когда

$$\begin{gathered} \gamma_q^{(1)} = \frac{Q_1/\pi}{1-\eta}\left[1 + \frac{(1-\eta)\cos\pi\eta}{\alpha\pi^2 Q_1{}^2}\right] \\ \gamma_q^{(2)} = \frac{Q_2/\pi}{1-\eta}\left[1 + \frac{Q_2{}^2\sin^2 2\pi\eta - 4}{2\pi\,(Q_2{}^3\sin^2 2\pi\eta - 2\pi\varkappa Q_2{}^4)}\right] \end{gathered} \qquad (2.3)$$

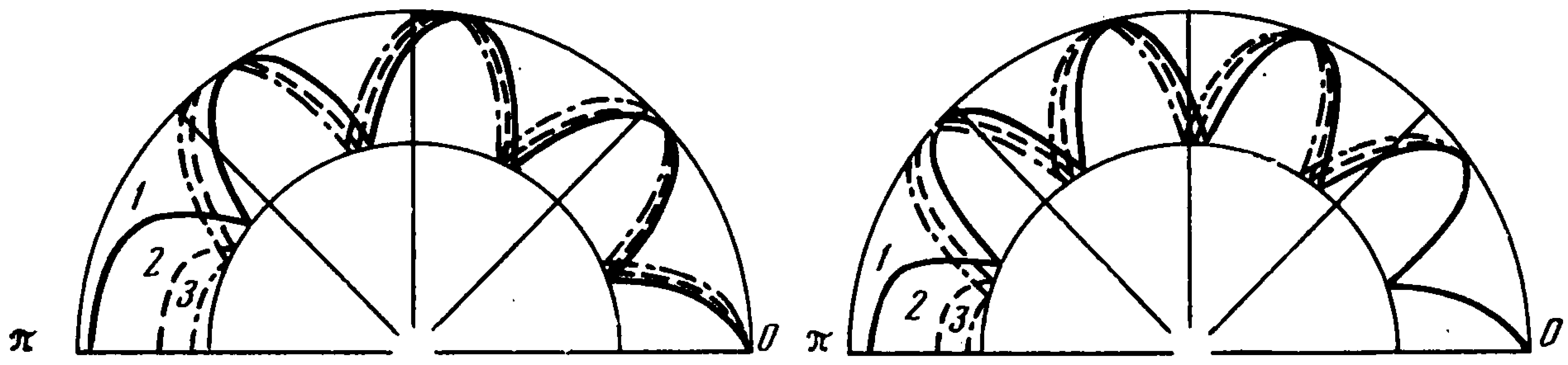
Как показывают расчеты, соотношения (2.3) определяют собственные значения с погрешностью менее 5 % при α, $\varkappa \geqslant 2$, что позволяет использовать эти соотношения для наглядной интепретации влияния неоднородности на вибрационные характеристики ЦО.

Из соотношений (2.1), (2.3) следует, что неоднородность изменяет собственные значения q-й формы колебаний в пределах

$$q/(1-\eta) \leqslant \gamma_q^{(i)} / \pi < Q_i/(1-\eta), \quad i = 1, 2 \tag{2.4}$$

т. е. момент инерции (параметр $\varkappa$) неоднородности оказывает более сильное влияние на изменения $\gamma_q^{(2)}$ по сравнению с влиянием массы неоднородности (параметр α) на $\gamma_q^{(1)}$.

Увеличение азимутальных размеров неоднородности (η) приводит к увеличению собственных значений как для симметричных, так и для



Фиг. 1

антисимметричных форм колебаний, причем для симметричных форм даже при больших значениях α можно снижение частоты компенсировать за счет увеличения η. Например, для второй формы при $\alpha = 1$, $\eta = 0{,}01$ значение γ_q совпадает с собственными значениями однородной системы.

Соотношения (2.1)—(2.4) определяют характерные особенности деформации собственных форм колебаний ЦО, как видно из фиг. 1, где приведены модули четвертых симметричных форм колебаний при $\eta = 0{,}1$ (слева) и пятых симметричных форм колебаний при $\eta = 0{,}05$ (справа). Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\alpha = 0{,}02$; $0{,}2$; 1.

Под действием неоднородности происходит уменьшение расстояний между узлами $\psi_q^{(1)}$ в окрестности неоднородности и снижение амплитуды пучности в месте расположения неоднородности $\psi_q^{(1)}$ $(-\pi + \varphi_0;\ \pi - \varphi_0)$ по сравнению с соответствующими параметрами для однородной ЦО (2.2).

Более удобной для практических применений мерой степени деформации собственных функций под действием неоднородности могут служить значения коэффициентов разложения $\psi_q^{(i)}$ в ряды Фурье по собственным функциям однородной системы (симметричных и антисимметричных):

$$\psi_q^{(1)}(\varphi) = \frac{a_{q0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{qm} \cos m\varphi, \qquad \psi_q^{(2)}(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{qm} \sin m\varphi \tag{2.5}$$

Влияние параметров неоднородности на деформацию собственных функций $\psi_q^{(1)}$ можно проследить из зависимости a_{qm} от α и η. С ростом α значения a_{qm} возрастают и стремятся к постоянным значениям при достаточно больших α. Увеличение параметра η приводит к снижению значений коэффициентов разложения a_{qm}. Следует также отметить, что при определенных сочетаниях параметров α и η (например, при $\eta = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}15$) коэффициент $a_{20} = 0$. Характерно, что неоднородность приводит к такой деформации собственных функций, когда в разложении симметричных собственных функций $\psi_q^{(1)}(\varphi)$ с номерами $q \geqslant 2$ возникают члены, соответствующие пульсирующим ($m = 0$) и осциллирующим ($m = 1$) колебаниям ЦО. Для антисимметричных собственных функций $\psi_q^{(2)}(\varphi)$ при $q \geqslant 2$ возникают члены разложения, соответствующие осциллирующим ($m = 1$) колебаниям однородной оболочки. Это обстоятельство имеет важное практическое значение для задачи об излучении неоднородной ЦО.

3. Анализ вынужденных колебаний неоднородной ЦО проведем известным методом, представив решение задачи о вынужденных колебаниях в виде разложения в ряды по собственным формам колебаний системы в вакууме

$$v(\varphi) = v_0 \sum_{q=2}^{\infty} [c_q^{(1)} \psi_q^{(1)}(\varphi) + c_q^{(2)} \psi_q^{(2)}(\varphi)] \tag{3.1}$$

где v_0 — размерная амплитуда, $c_q^{(i)}$ — искомые амплитуды разложения вибрационной скорости.

Подставив разложение (3.1) в (1.1) и используя свойство ортогональности собственных функций $\psi_q^{(i)}$, можно получить решение этой системы уравнений относительно амплитуды $c_q^{(i)}$ в виде

$$c_q^{(i)} = \frac{\psi_q^{(i)}(\varphi)}{Z_q^{(i)}}, \quad Z_q^{(i)} = \frac{\xi_q^{(i)2} - \xi^2}{-i\xi}, \quad v_0 = \frac{F_0}{(m_s \omega_1 a)} \tag{3.2}$$

Решение (3.2) получено в предположении, что на оболочку действует локальная сила $F = F_0 a^{-1} \delta(\varphi - \varphi_1)$, где φ_1 — точка приложения силы. Отметим, что представленные решения в виде разложения в ряды по собственным функциям неоднородной ЦО приводят к диагональной системе уравнений относительно $c_q^{(i)}$ и решение (3.2) получаем при отсутствии взаимодействия между формами колебаний ЦО. Такое взаимодействие возникает только при учете реакции среды на колебания ЦО.

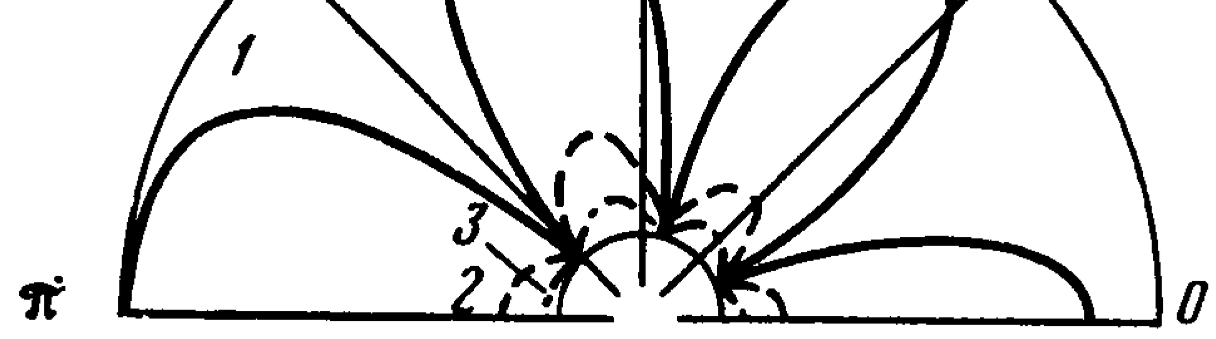
Если же решение задачи о вынужденных колебаниях ЦО представить в виде разложения в ряды по собственным формам колебания однородной ЦО

$$v = v_0 \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \tag{3.3}$$

то система уравнений относительно амплитуд A_m и B_m будет отличаться от диагональной, что связано с взаимодействиями между формами колебаний однородной ЦО через имеющуюся неоднородность. Решение такой системы уравнений относительно амплитуд A_m и B_m можно получить только численными методами, что затрудняет физическую интерпретацию влияния неоднородности на вибрационные характеристики ЦО.

Решение (3.1), (3.2) позволяет выяснить основные особенности этого влияния. Действительно, соотношения (1.6), (1.7), (3.1), (3.2) определяют зависимость вибрационной скорости от частоты и азимута $v(\xi, \varphi)$. Частотная зависимость вибрационной скорости имеет последовательный ряд максимумов при выполнении условия резонанса $\xi = \xi_q^{(i)}$ (3.2).

Соотношения (3.1), (3.2) позволяют наглядно проиллюстрировать влияние точки приложения силы на вибрационные характеристики системы. Например, в практически важном случае, когда локальная сила приложена в центре неоднородности ($\varphi_1 = \pi$), будут возбуждаться только симметричные формы колебаний, для которых $\psi_q^{(i)}(\varphi = \pi) \neq 0$, $(i = 1, 2)$. Если точка приложения локальной силы не совпадает с центром неоднородности ($\varphi_1 \neq \pi$), появится момент силы и будут возбуждаться как симметричные, так и антисимметричные формы колебаний при условии, что φ_1 не совпадает с положением узла в распределении вибрационной скорости. Таким образом, выбор способа возбуждения системы может оказать существенное влияние на значение амплитуд $c_q^{(i)}$ и, следовательно, на виброакустические характеристики неоднородной ЦО.



Фиг. 2

На графиках фиг. 2 представлены зависимости $v(\varphi)$ при $\eta = 0{,}1$ и разных значениях α (обозначения кривых — те же, что на фиг. 1) от азимутального угла на резонансных частотах $\xi = \xi_q$ для $_q = 3$, точка приложения силы $\varphi_1 = \pi$. Видно, что с ростом α происходит уменьшение амплитуды скорости в области закрепления массы. Таким образом, соотношения (3.1), (3.2) могут быть использованы для вибродиагностики неоднородных ЦО, они показывают характер изменения как собственных частот, так и распределение вибрационной скорости в зависимости от параметров неоднородности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов В. С., Пляхов Д. Д.* Колебания кругового кольца, несущего сосредоточенную массу // Инж. журн. 1963. Т. 3. № 3. С. 482—489.
2. *Лиходед А. И.* О влиянии на динамику оболочки массы, распределенной по участку ее поверхности // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 163—166.
3. *Заруцкий В. А.* Вынужденные колебания продольно подкрепленной цилиндрической оболочки, несущей локально присоединенную массу // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 1. С. 50—56.

Горький

Поступила в редакцию 19.X.1988