

УДК 539.3

© 1990 г.

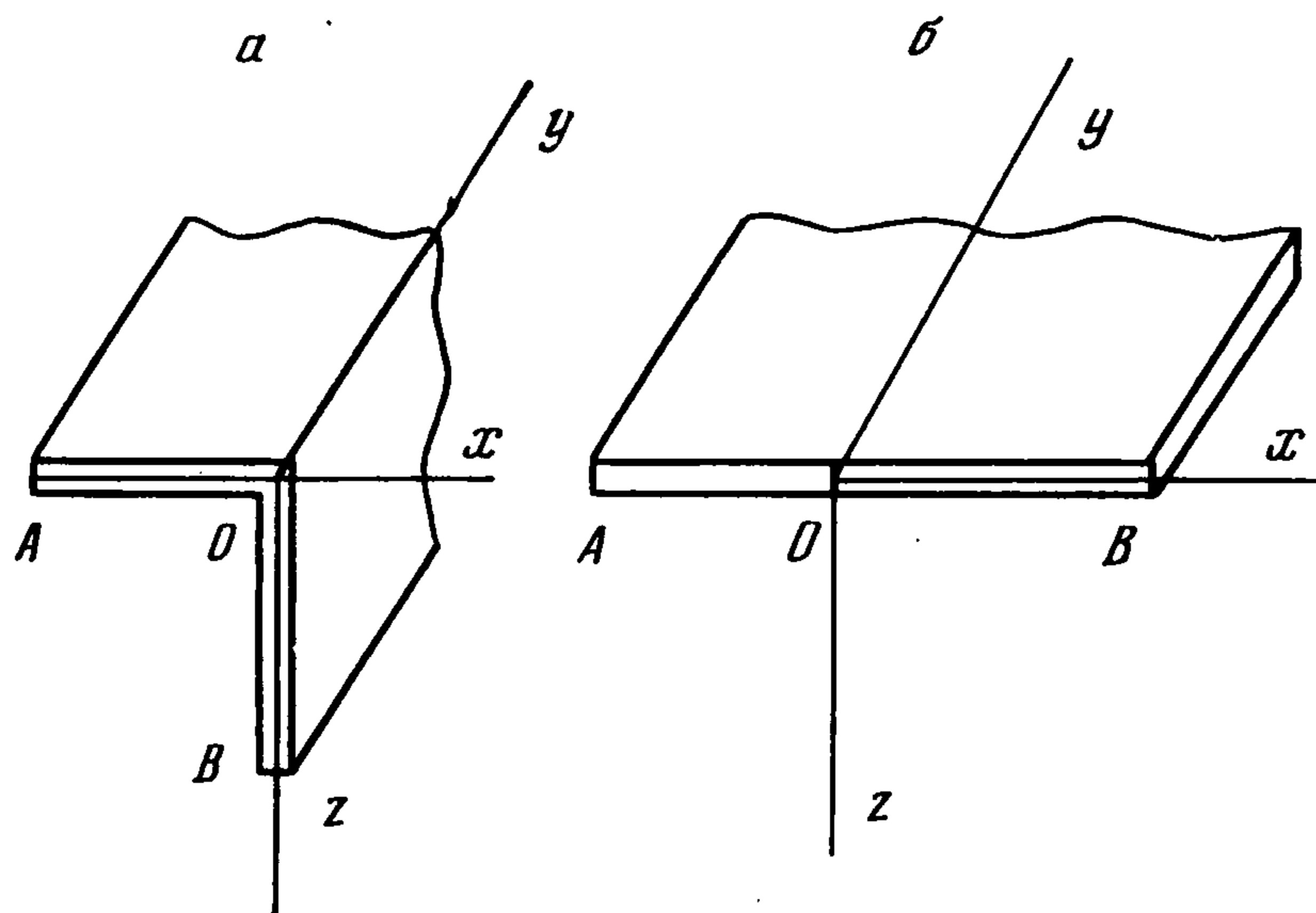
В. А. Гришин, Г. Я. Попов, В. В. Реут

РАСЧЕТ КОРОБЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Излагается метод расчета коробчатых оболочек, основанный на сведении к задаче о совместном плоском и изгибном состоянии пластины с дефектом, методы решения которой изложены в монографии [1] (под дефектом понимается линия, при переходе через которую терпят скачки усилия или смещения). Показано, что при малых толщинах решение задачи о напряженном состоянии коробчатой оболочки сводится к последовательному решению двух задач (изгибной и плоской) с точностью до слагаемого более высокого порядка малости. Результаты вычислений изгибающих моментов и напряжений в оболочке представлены в виде графиков и таблиц.

Расчету коробчатых оболочек посвящены работы [2—5], основанные на применении метода однородных решений, эффективного для частных случаев нагружения или для определения собственных частот колебаний. Используемый здесь метод [6—7] позволяет получать точные решения для произвольной нагрузки, значительно упростить постановку задачи и соответствующие выкладки.

1. Рассмотрим напряженное состояние оболочки, состоящей из двух полосовидных пластинок бесконечной длины шириной $OA = a_*$, $OB = b_*$, состыкованных под прямым углом, и находящейся под действием произвольной нагрузки (фиг. 1, а). Для простоты будем предполагать, что пластины имеют одинаковую толщину и изготовлены из одного материала.



Фиг. 1

Задача сводится к отысканию решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$D\Delta^2 w_1(x, y) = Z_1(x, y) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y} + X_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} + Y_1(x, y) = 0$$

$$\Delta(\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right); \quad -a < x < 0, \quad -\infty < y < \infty$$

$$D\Delta^2 u_2(y, z) = X_2(y, z)$$

$$\frac{\partial \sigma_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(2)}}{\partial z} + Y_2(y, z) = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(2)}}{\partial z} + Z_2(y, z) = 0$$

$$\Delta(\sigma_z^{(2)} + \sigma_y^{(2)}) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_2}{\partial z} \right); \quad 0 < z < b, \quad -\infty < y < \infty \quad (1.2)$$

удовлетворяющего граничным условиям $U_k^{(j)} = 0$ на гранях $x = -a$ ($j = 1$) $z = b$ ($j = 2$):

$$U_0^{(1)} [w_1] \equiv w_1 - k_0^{(1)} V_x^{(1)} = 0, \quad U_0^{(2)} [u_2] \equiv u_2 + k_0^{(2)} V_z^{(2)} = 0 \quad (1.3)$$

$$U_2^{(1)} [w_1] \equiv M_x^{(1)} - k_2^{(1)} \varphi_x^{(1)} = 0, \quad U_2^{(2)} [u_2] \equiv M_z^{(2)} + k_2^{(2)} \varphi_z^{(2)} = 0$$

$$U_1^{(1)} [u_1, v_1] \equiv \sigma_x^{(1)} - k_1^{(1)} u_1 = 0, \quad U_1^{(2)} [w_2, v_2] \equiv \sigma_z^{(2)} + k_1^{(2)} w_2 = 0 \quad (1.4)$$

$$U_3^{(1)} [u_1, v_1] \equiv v_1 - k_3^{(1)} \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad U_3^{(2)} [w_2, v_2] \equiv v_2 + k_3^{(2)} \tau_{zy}^{(2)} = 0$$

и условиям стыковки при $x = z = 0$, $-\infty < y < \infty$, обеспечивающих равенство усилий и смещений на ребре оболочки

$$w_1 = D_1 \varepsilon^2 w_2, \quad u_2 = D_1 \varepsilon^2 u_1, \quad v_1 = v_2, \quad \varphi_x^{(1)} = -\varphi_z^{(2)} \\ V_x^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad M_x^{(1)} = -M_z^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)}, \quad V_z^{(2)} = \sigma_x^{(1)} \quad (1.5)$$

Здесь введены безразмерные величины, обозначенные теми же буквами, что и соответствующие им [физические] величины, которые в отличие от первых помечены звездочкой

$$(w_1, u_2) = D_1 \varepsilon^3 (w_{1*}, u_{2*}) / a_*, \quad (v_j, u_1, w_2) = \varepsilon (v_{j*}, u_{1*}, w_{2*}) / a_* \\ (x, y, z) = (x_*, y_*, z_*) / a_*, \quad M_n^{(j)} = M_{n*}^{(j)} / (E_* a_*^2), \quad V_n^{(j)} = V_{n*}^{(j)} / (E_* a_*) \\ \varphi_n^{(j)} = \varphi_{n*}^{(j)} D_1 \varepsilon^3, \quad (X_1, Z_2, Y_j) = h_* (X_{1*}, Z_{2*}, Y_{j*}) / E_* \quad (1.6) \\ (Z_1, X_2) = (Z_{1*}, X_{2*}) / E_*, \quad \sigma_n^{(j)} = \varepsilon \sigma_{n*}^{(j)} / E_*, \quad \tau_{ns}^{(j)} = \varepsilon \tau_{ns*}^{(j)} / E_* \\ D_1 = D_* / (E_* h_*^3), \quad b = b_* / a_*, \quad \varepsilon = h_* / a_*, \quad a = E = D = 1, \quad j = 1, 2$$

Индексы 1 и 2 соответствуют величинам на горизонтальной и вертикальной пластинах: u_j, v_j, w_j — перемещения точек пластин в направлениях осей x, y, z ; $M_n^{(j)}, V_n^{(j)}, \varphi_n^{(j)}$ — изгибающий момент, обобщенная поперечная сила и угол наклона пластины; $\sigma_n^{(j)}, \tau_{ns}^{(j)}$ — нормальные и касательные напряжения; X_j, Y_j, Z_j — нагрузка, действующая в направлении соответствующих осей; h, ν, E, D — толщина, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и цилиндрическая жесткость пластин.

Операторы граничных условий (1.3), (1.4) описывают условия упругой заделки контура с коэффициентами податливости опор $k_n^{(j)}$. Отметим, что случай $k_n^{(j)} = \infty$ (здесь и далее $n = 0, 1, 2, 3$) соответствует симметричному загрузению короба относительно j -й грани, а $k_n^{(j)} = 0$ — кососимметричному. Таким образом, задача о напряженном состоянии коробчатой конструкции сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений с общим порядком, равным 16, и удовлетворению соответствующего числа граничных условий.

При непосредственном решении задачи неизбежны значительные трудности, ввиду громоздкости выкладок и вычислительных процедур. Некоторых упрощений можно достичь в частных случаях. Так, например, если $a = b$, $k_n^{(1)} = k_n^{(2)}$, то задачу можно разбить на сумму задач о симметричном и кососимметричном загрузении уголкового конструкции (фиг. 1, а), каждая из которых сводится к решению задачи о плоскоизгибном напряженном состоянии полосы, представляющей собой половину уголкового конструкции. При этом необходимо решать вдвое меньше дифференциальных уравнений, например систему (1.1), которая должна удовлетворять граничным условиям (1.3), (1.4) при $x = -a$ и условиями стыковки (1.5), причем последние будут иметь вид:

в симметричном случае

$$x = 0, \quad w_1 = -D_1 \varepsilon^2 u_1, \quad V_x^{(1)} = \sigma_x^{(1)}, \quad \varphi_x^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0$$

в кососимметричном случае

$$x = 0, \quad w_1 = D_1 \varepsilon^2 u_1, \quad V_x^{(1)} = -\sigma_x^{(1)}, \quad M_x^{(1)} = v_1 = 0$$

Но и в этих случаях предлагаемый в работе подход, как будет показано ниже, позволяет существенно упростить решение.

2. Изменим постановку задачи, введем новые функции

$$(u, v, w)(x, y) = \begin{cases} (u_1, v_1, w_1)(x, y), & x < 0 \\ (w_2, v_2 - u_2)(y, x), & x > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y)(x, y) = \begin{cases} (\sigma_x^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}, \sigma_y^{(1)})(x, y), & x < 0 \\ (\sigma_x^{(2)}, \tau_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(2)})(y, x), & x > 0 \end{cases}$$

$$(X, Y, Z)(x, y) = \begin{cases} (X_1, Y_1, Z_1)(x, y), & x < 0 \\ (Z_2, Y_2, -X_2)(y, x), & x > 0 \end{cases}$$

Замена неизвестных (2.1) соответствует следующей операции: мысленному развороту двугранного угла АОВ (фиг. 1, а) и замене знака прогиба пластины УОВ на противоположный с сохранением условий стыковки. В результате получим задачу о пластине с дефектом вдоль оси y (фиг. 1, б). Такая задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$D\Delta^2 w(x, y) = Z(x, y)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} \right); \quad -0 < x < b, x \neq 0, \quad -\infty < y < \infty$$

удовлетворяющей однородным граничным условиям

$$U_{2k-1}^{(j)}[w] = U_{2k}^j[u, v] = 0, \quad k, j = 1, 2 \quad (2.3)$$

и условиям на дефекте $x = 0, -\infty < y < \infty$

$$\langle v \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = \langle \varphi_x \rangle = \langle M_x \rangle = 0 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon^2 D_1 \langle u \rangle = -(w_+ + w_-), \quad \langle w \rangle = \varepsilon^2 D_1 (u_+ + u_-)$$

$$\langle \sigma_x \rangle = -[(V_x)_+ + (V_x)_-], \quad \langle V_x \rangle = (\sigma_x)_+ + (\sigma_x)_-$$

$$(F_{\pm} = F(\pm 0), \langle F \rangle = F_- - F_+)$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что, во-первых, вдвое сокращается количество решаемых дифференциальных уравнений, во-вторых, упрощаются условия стыковки, в-третьих, методы решения как плоских, так и изгибных задач для пластин с дефектом в настоящее время разработаны и изложены в монографии [1]. Отметим также, что такая постановка должна быть удобней традиционной [3] при реализации метода граничных элементов.

После применения преобразования Фурье по переменной y

$$\begin{vmatrix} u_\alpha & v_\alpha & w_\alpha & \varphi_\alpha \\ M_{x\alpha} & V_{x\alpha} & \sigma_{x\alpha} & \sigma_{y\alpha} \\ \tau_\alpha & Z_\alpha & X_\alpha & Y_\alpha \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{vmatrix} u & v & w & \varphi_x \\ M_x & V_x & \sigma_x & \sigma_y \\ \tau_{xy} & Z & X & Y \end{vmatrix} e^{i\alpha y} dy \quad (2.5)$$

задача (2.2)–(2.4) сводится к одномерной разрывной краевой задаче

$$L^2 f_\alpha^\pm(x) = q_\alpha^\pm(x), \quad -a < x < 0 \wedge 0 < x < b \quad (2.6)$$

с однородными граничными условиями

$$U_{1j}^\pm[f_\alpha^\pm] = U_{2j}^\pm[f_\alpha^\pm] = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

$$S_2^+ f_\alpha^+ = S_1^+ f_\alpha^+ = S_2^- f_\alpha^- = S_1^- f_\alpha^- = 0, \quad S_0^+ f_\alpha^+ = H_3^- f_\alpha^-, \quad H_0^+ f_\alpha^+ = -S_3^- f_\alpha^- \quad (2.8)$$

$$[S_3^+ f_\alpha^+] \varepsilon^2 D_1 = \alpha^4 [H_0^- f_\alpha^-], \quad [H_3^+ f_\alpha^+] \varepsilon^2 D_1 = \alpha^4 [S_0^- f_\alpha^-]$$

Здесь

$$f_\alpha^+(x) = \sigma_{x\alpha}, \quad f_\alpha^-(x) = w_\alpha(x), \quad q_\alpha^+(x) = -R_3 X_\alpha - i\alpha R_2^+ Y_\alpha, \quad q_\alpha^-(x) = Z_\alpha \quad (2.9)$$

и введены дифференциальные операторы

$$R_k^\pm f = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \quad k = 0, 1, \quad R_2^\pm f = [L + (1 \pm \nu)\alpha^2] f \quad (2.10)$$

$$R_3^\pm f = \frac{\partial}{\partial x} [L - (1 \pm \nu)\alpha^2] f, \quad Lf = \frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha^2 f$$

$$Sf = (T^- - T^+) f, \quad Hf = (T^- + T^+) f, \quad T^\pm f = f(\pm 0)$$

$$S_k^\pm f = S[R_k^\pm f], \quad H_k^\pm f = H[R_k^\pm f], \quad T_k^\pm f = T[R_k^\pm f]$$

При помощи дифференциальных операторов (2.10) можно выразить трансформанты основных упругих величин

$$-\alpha^4 u_\alpha = R_3^+ f_\alpha^+ + \left[\frac{d^2}{dx^2} - 2(1 + \nu)\alpha^2 \right] X_\alpha + i\alpha \frac{dY_\alpha}{dx}$$

$$-i\alpha^3 v_\alpha = R_3^+ f_\alpha^+ + \frac{dX_\alpha}{dx} + i\alpha Y_\alpha, \quad w_\alpha = R_0^- f_\alpha^-, \quad \varphi_\alpha = R_1^- f_\alpha^-$$

$$M_{x\alpha} = -R_2^- f_\alpha^-, \quad V_{x\alpha} = -R_3^- f_\alpha^-, \quad \sigma_{x\alpha} = R_0^+ f_\alpha^+, \quad i\alpha \tau_\alpha = R_1^+ f_\alpha^+ + X_\alpha$$

и преобразовать функционалы граничных условий

$$U_{1j}^\pm [f_\alpha^\pm] = R_0^\pm f_\alpha^\pm + (-1)^{j+1} \mu_{1j}^\pm R_3^\pm f_\alpha^\pm, \quad U_{2j}^\pm [f_\alpha^\pm] = R_2^\pm f_\alpha^\pm + \\ + (-1)^{j+1} \mu_{2j}^\pm R_1^\pm f_\alpha^\pm$$

$$(\mu_{1j}^- = k_0^{(j)}, \quad \mu_{1j}^+ = \alpha^{-4} k_1^{(j)}, \quad \mu_{2j}^- = k_2^{(j)}, \quad \mu_{2j}^+ = \alpha^2 k_3^{(j)})$$

где $j = 1$ соответствует грани $x = -a$, а $j = 2$ — грани $x = b$.

Решение разрывной краевой задачи (2.6)–(2.8) будем искать по схеме, изложенной в [7], в виде

$$f_\alpha^\pm(x) = f_q^\pm(x) + \sum_{i=0}^3 (-1)^i f_i^\pm T_{3-i}^\pm [G_\alpha^\pm(x, t)] \quad (f_i^\pm = S_i^\pm f_\alpha^\pm) \quad (2.11)$$

где f_i^\pm ($i = 0, 1, 2, 3$) — неизвестные скачки функции $f_\alpha^\pm(x)$, $G_\alpha^\pm(x, t)$ — функция Грина краевой задачи (2.6), (2.7), а f_q^\pm — частное решение, определяемое по формуле

$$f_q^\pm = \int_{-a}^b q_\alpha^\pm(t) G_\alpha^\pm(x, t) dt$$

Здесь и всюду ниже операторы T_i^\pm применяются по переменной t . Из первых четырех условий (2.7) следует, что четыре из восьми неизвестных скачков равны нулю: $f_1^\pm = f_2^\pm = 0$, а четыре оставшихся являются решением системы четырех линейных алгебраических уравнений, получающихся при подстановке (2.11) в последние четыре условия (2.8)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -C_{33}^- & C_{30}^- \\ 0 & \varepsilon^2 \alpha^{-4} D_1 & -C_{30}^- & C_{00}^- \\ -\varepsilon^2 C_{33}^+ & \varepsilon^2 C_{30}^+ & -\alpha^4 D_1 & 0 \\ -C_{03}^+ & C_{00}^+ & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_0^+ \\ f_3^+ \\ f_0^- \\ f_3^- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{3q}^- \\ H_{0q}^- \\ \varepsilon^2 H_{3q}^+ \\ H_{0q}^+ \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

$$(C_{1j}^\pm = H_i^\pm T_j^\pm [G_\alpha^\pm], \quad H_{iq}^\pm = H_i^\pm f_q^\pm)$$

Таким образом, после решения системы (2.12) решение краевой задачи (2.6)–(2.8) будет

$$f_\alpha^\pm = f_q^\pm(x) + f_0^\pm T_3^\pm [G_\alpha^\pm] - f_3^\pm T_0^\pm [G_\alpha^\pm] \quad (2.13)$$

а это позволяет определить трансформанты всех упругих величин, в частности

$$\begin{aligned}
 w_\alpha(x) &= f_0^- T_3^- [G_\alpha^-] - f_3^- T_0^- [G_\alpha^-] + \int_{-a}^b q_\alpha(\xi) G_\alpha^-(x, \xi) d\xi \\
 -i\alpha^3 v_\alpha(x) &= f_0^+ R_2^+ T_3^+ G_\alpha^+ - f_3^+ R_2^+ T_0^+ G_\alpha^+ + \\
 &+ (1 + \nu) \int_{-a}^b \{X_\alpha(\xi) [(1 + \nu) \alpha^4 G_\alpha^+(x, \xi)] + \\
 &+ Y_\alpha(\xi) (-i\alpha^3) [2L G_\alpha^+(x, \xi) + (1 + \nu) \alpha^2 G_\alpha^+(x, \xi)]\} d\xi \\
 -\alpha^4 u_\alpha(x) &= f_0^+ R_3^+ T_3^+ G_\alpha^+ - f_3^+ R_3^+ T_0^+ G_\alpha^+ - \\
 -\alpha^4 (1 + \nu) &\int_{-a}^b \{X_\alpha(\xi) [(1 - \nu) G_\alpha^{+'}(x, \xi) - 2\alpha^2 g_1'(x, \xi)] + \\
 &+ Y_\alpha(\xi) [(-i\alpha) G_\alpha^{+'}(x, \xi)]\} d\xi \\
 g_1(x, \xi) &= \int_{-a}^\xi G_\alpha^+(x, t) dt
 \end{aligned}$$

Здесь штрих и точка означают производную по первой и второй переменной соответственно.

Заметим, что при $a = b$ и $k_n^{(j)} = \infty$ ($n = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2$) в случае симметричного нагружения квадратного короба система (2.12) распадается на две независимые системы второго порядка относительно двух пар скачков f_0^\pm и f_3^\pm вследствие $C_{03}^\pm = C_{30}^\pm = 0$. Путем разбиения задачи на симметричную и кососимметричную по координате x можно добиться того, чтобы одна из этих пар тождественно равнялась нулю. В этом случае решение плоской (изгибной) задачи выражается через один из скачков f_3^+ (f_3^-) или f_0^+ (f_0^-), аналитическое выражение для которых достаточно просто.

Например, при обжатии оболочки сосредоточенными силами P_* , приложенными в серединах граней $y = 0$, $x = \pm b$ случай симметричной задачи

$$\begin{aligned}
 f_3^- &= P (2\rho)^{-1} (2B + \operatorname{sh} 2B) (\operatorname{sh} B + B \operatorname{ch} B), \\
 f_3^+ &= 2P (\varepsilon\rho)^{-1} \alpha^3 \operatorname{sh}^2 B (\operatorname{sh} B + B \operatorname{ch} B) \\
 \rho &= \varepsilon^2 [3 (1 - \nu^2)]^{-1} \alpha^2 \operatorname{sh}^4 B + (B + \operatorname{sh} B \operatorname{ch} B)^2; \\
 P &= P_*/(E_* a_*^2), \quad B = \alpha b
 \end{aligned}$$

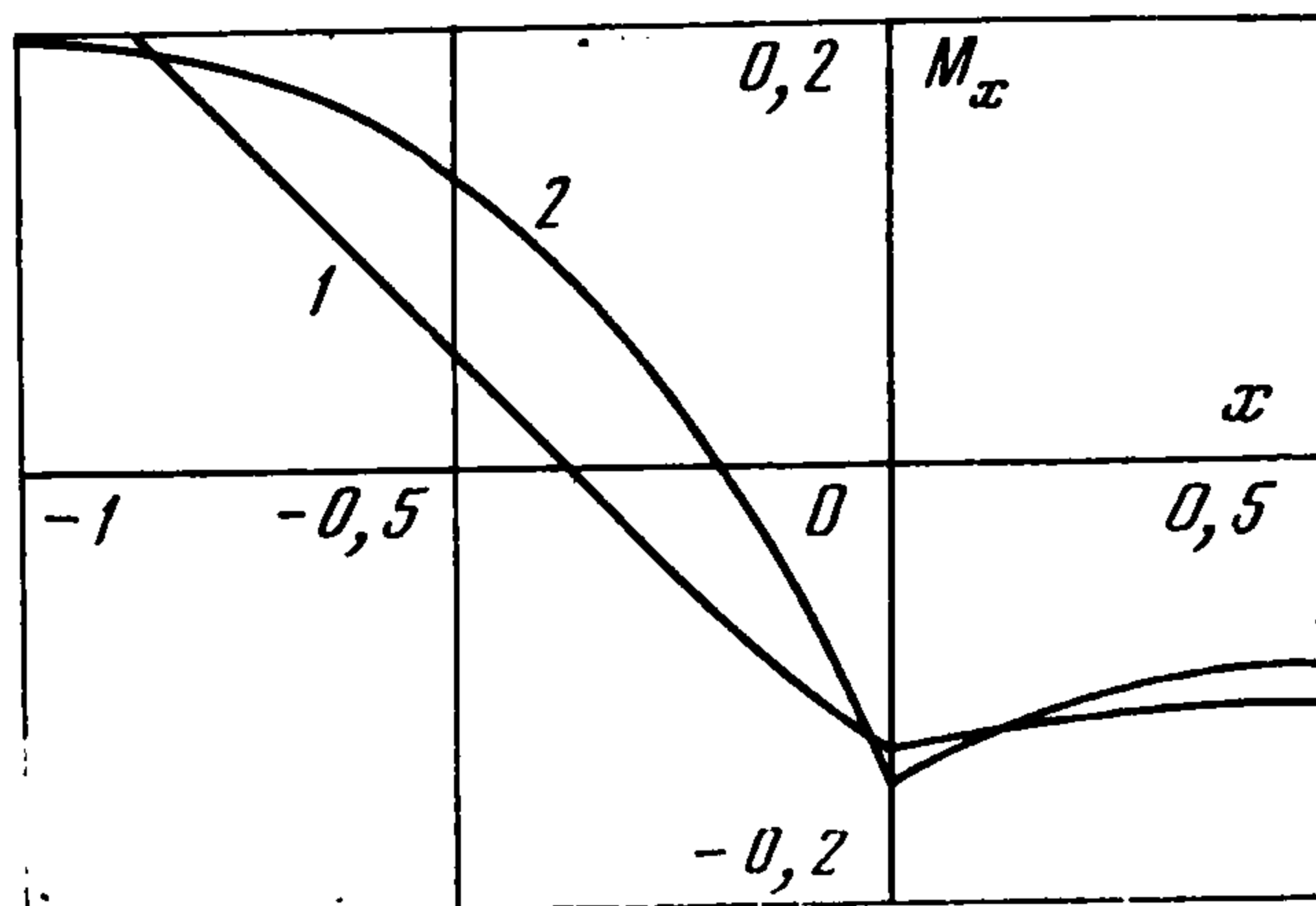
3. Указанная схема была реализована для решения задачи о симметричном нагружении коробчатой оболочки прямоугольного профиля нагрузкой постоянной интенсивности q , приложенной перпендикулярно срединной плоскости горизонтальных пластин $k_n^{(j)} = \infty$ ($j = 1, 2; n = 0, 1, 2, 3$) для двух видов нагружения: линия распределения нагрузки $x = -a$, $-l \leq y \leq l$ параллельна линии стыка пластин (задача 1) и линия распределения нагрузки $y = 0$, $-a - l \leq x \leq -a + l$ перпендикулярна ей (задача 2). Здесь $q = q_*/(E_* a_*)$, $l = l_*/a_*$. В этом случае функции Грина $G_\alpha(x, t)$ изгибной и плоской задач совпадают.

На ЭВМ были вычислены значения M_x и σ_x в разных сечениях при разных соотношениях между a , b и l . При этом было использовано представление

$$M_x(x, y) = M_x^a(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{x\alpha}^u(x) e^{i\alpha y} d\alpha$$

Здесь M_x^α — обращенная в явном виде слабосходящаяся часть, выделяемая из частного решения, трансформанта которой имеет лишь степенное убывание по α , вследствие чего ее численное обращение затруднено, $M_{x\alpha}^u(x)$ — функция, экспоненциально убывающая по α , интеграл от которой эффективно вычисляется численно. При этом значения трансформант скачков f_k^\pm определяются непосредственно из решения системы (2.12), а операторы и функционалы от функции Грина удобно программируются в матричной форме.

На фиг. 2 представлен график безразмерной величины M_x для первого (кривая 1) и второго (кривая 2) видов загрузки (задачи 1 и 2 соответственно)



Фиг. 2

ственно) в сечении $y = 0$, где M_x имеет максимальное значение, при $\nu = 0,4$, $l = 1$, $b = 0,5$, $\varepsilon = 0,01$. В таблице представлены значения изгибных напряжений σ_b^1 (в точке $x = -a$, $y = 0$, где они имеют максимальные значения), σ_b^2 (в точке $x = y = 0$, где они максимальны на линии стыка пластин) и максимальных плоских напряжений σ_p (в точке $x = 0$, $y = +0$) для $\nu = 0,4$, $\varepsilon = 0,01$ и ряда значений b , l . Физические значения связаны с безразмерными соотношениями

$$\sigma_{x*} = \sigma_x q_* l_* / h_*^2, \quad M_{x*} = M_x q_* l_*$$

Подтверждением правильности предлагаемой методики и численных расчетов может служить совпадение результатов решения задачи 1 при больших l (проверялись значения 5 и 10) с результатами решения задачи плоской деформации (когда $l \rightarrow \infty$) в достаточно малой окрестности y . Точное совпадение в пределах точности вычислений отмечено в зоне $y < 0,7l$. Добавим, что решения задач 1 и 2 совпадают при $l \rightarrow 0$ (случай загрузки сосредоточенной силой).

| b | l | Задача 1 | | | Задача 2 | | |
|-----|-----|--------------|--------------|-------------------------|--------------|--------------|-------------------------|
| | | σ_b^1 | σ_b^2 | $-\sigma_p \times 10^5$ | σ_b^1 | σ_b^2 | $-\sigma_p \times 10^5$ |
| 0,5 | 0,1 | 4,74 | 1,12 | 778 | 4,17 | 1,07 | 787 |
| | 0,5 | 2,60 | 1,01 | 665 | 2,05 | 1,01 | 885 |
| | 1 | 1,73 | 0,798 | 473 | 1,19 | 0,940 | 2330 |
| 1 | 0,1 | 4,85 | 0,984 | 777 | 4,27 | 0,973 | 786 |
| | 0,5 | 2,71 | 0,875 | 663 | 2,13 | 0,955 | 883 |
| | 1 | 1,83 | 0,664 | 470 | 1,24 | 0,880 | 2330 |
| 2 | 0,1 | 4,91 | 0,912 | 779 | 4,29 | 0,939 | 788 |
| | 0,5 | 2,78 | 0,801 | 664 | 2,14 | 0,902 | 886 |
| | 1 | 1,90 | 0,597 | 470 | 1,27 | 0,743 | 2330 |

4. Построенное выше решение задачи для коробчатой оболочки можно упростить в предположении малости параметра ε . Отметим, что в постановке (1.1)—(1.5) все упругие величины имеют один порядок малости по параметру ε . И если в (1.5) перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $w_1 = u_2 = 0$ и задача (1.1)—(1.5) распадается на две последовательно решаемые задачи.

Задача А об отыскании решения системы первых двух уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющего граничным условиям (1.3) и условиям стыковки

$$w_1 = u_2 = 0, \varphi_x^{(1)} = -\varphi_z^{(2)}, M_x^{(1)} = -M_z^{(2)} \quad (4.1)$$

Задача Б об отыскании решения системы последних двух уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющего граничным условиям (1.4) и условиям стыковки

$$v_1 = v_2, \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)}, \sigma_x^{(1)} = V_z^{(2)}, \sigma_z^{(2)} = V_x^{(1)} \quad (4.2)$$

где значения $V_z^{(2)}$ и $V_x^{(1)}$ определяются из решения задачи А.

Если для решения этих задач применить прием, изложенный в разд. 2, то задача А сведется к исследованию изгиба пластинки, имеющей шарнирную опору

$$\langle \varphi_x \rangle = \langle M_x \rangle = 0, w_+ = w_- = 0$$

а задача Б сведется к анализу плоского напряженного состояния пластинки, ослабленной дефектом вида

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \langle v \rangle = 0, (\sigma_x)_{\pm} = \mp (V_x)_{\pm}$$

Решение задач А и Б дает приближенное решение задачи (1.1)—(1.5) и эквивалентной ей задаче (2.2)—(2.4) с точностью до слагаемого, имеющего порядок малости $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ценность этого факта заключается в том, что при решении задач о расчете пластинчатых оболочек можно эффективно пользоваться стандартными программами расчета плоских и изгибных задач теории пластин. Здесь же построено решение задач А и Б по схеме разд. 2 методом интегральных преобразований. Тогда после применения преобразования (2.5) эти задачи сводятся к упрощенной ($\varepsilon = 0$) системе (2.12), решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} f_0^- &= 0, \quad f_3^- = (C_{00}^-)^{-1} H_{0q}^-, \quad f_0^+ = H_{3q}^- - C_{30}^+ (C_{00}^-)^{-1} H_{0q}^- \\ f_3^+ &= (C_{00}^+)^{-1} \{ H_{0q}^+ - C_{03}^+ H_{3q}^- + (C_{00}^-)^{-1} [1 - C_{30}^+ C_{03}^-] H_{0q}^- \} \end{aligned}$$

Тогда в случае нагрузки в виде сосредоточенной силы с компонентами (P_{x*}, P_{y*}, P_{z*}) , приложенной в точке (ξ, η) , трансформанты возникающих в пластинах изгибных σ_{1*} и плоских напряжений σ_{2*} можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 a_*^2 \sigma_{1*} &= 6 P_{z*} e^{i\alpha\eta} R_2^- Q(x, \xi) \\ \varepsilon a_*^2 \sigma_{2*} &= e^{i\alpha\eta} \{ P_{x*} R_3^+ Q(x, \xi) + P_{y*} (-i\alpha) \cdot R_2^+ Q(x, \xi) + \\ &+ P_{z*} (C_{00}^-)^{-2} [C_{00}^+ C_{03}^+ b_{30}(x, \xi) + (C_{30}^+ C_{03}^- - 1) b_{00}(x, \xi) + \\ &+ b_{33}(x, \xi) - C_{03}^+ C_{00}^+ b_{03}(x, \xi)] \} \end{aligned}$$

$$Q(x, \xi) = G_\alpha(x, \xi) - G_\alpha(x, 0) G_\alpha(0, \xi) G_\alpha^{-1}(0, 0),$$

$$b_{jk}(x, \xi) = [H_j^- G_\alpha(x, \xi)] [T_k^+ G_\alpha(x, \xi)]$$

причем коэффициенты C_{jk}^\pm определены в (2.12), операторы R_j^\pm , T_j^\pm , H_j^\pm — в (2.10), причем операторы здесь применяются по второй переменной. В частности, в случае задачи 1 максимальные изгибные напря-

жения таковы:

$$\sigma_* = \frac{6q_*}{\pi a_* \varepsilon^2} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \times \\ \times \frac{(1 + \nu) \operatorname{ch} A [B \operatorname{ch} A + \operatorname{ch} B \operatorname{sh} (A + B)] + (1 - \nu) A (B + \operatorname{ch} B \operatorname{sh} B + A \operatorname{ch}^2 B)}{B \operatorname{ch}^2 A + A \operatorname{ch}^2 B + \operatorname{ch} A \operatorname{ch} B \operatorname{sh} (A + B)} d\alpha \\ (A = \alpha a, B = \alpha b)$$

Вычисления показали, что в случае задач (1) и (2) при $\varepsilon < 0, 1$ точное и приближенное решения совпадают с точностью до трех значащих цифр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Гавеля С. П., Сысоев Ю. А. Об исследовании напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций // Прикл. механика. 1975. Т. 15. № 7. С. 11—15.
3. Тихомиров В. В. К расчету коробчатой оболочки прямоугольного профиля // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 8. С. 48—55.
4. Моссаковский В. И., Куликов Д. В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 1. С. 24—27.
5. Мусияка В. Г., Пошивалова Е. В. Применение однородных решений к исследованию напряженного состояния пластинчатых конструкций // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 8. С. 50—53.
6. Гришин В. А., Реут В. В. Исследование краевой задачи, описывающей напряженное состояние бесконечной коробчатой оболочки // Респ. науч. конф. «Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения»: Тез. докл. Ч. 1. Одесса. Одесский ун-т. 1987. С. 75—76.
7. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчет коробчатых оболочек // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси. 1987. Изд-во Тбил. ун-та. Тбилиси: 1987. Т. 2. С. 327—332.

Одесса

Поступила в редакцию
11.V.1989