Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 532.546

Г. А. Домбровский

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости. Указываются специальные законы фильтрации, допускающие эффективное интегрирование системы уравнений движения, приведенной к линейной преобразованием Лежандра и представленной в канонической форме (о преобразовании Лежандра в газовой динамике см. [1, 2], в нелинейной фильтрации см. [3]). Для одного из предложенных законов фильтрации с предельным градиентом дается в качестве примера решение задачи о точечном источнике в полосе.

1. Пусть $z = x + iy$ — плоскость течения; v — модуль вектора скорости фильтрации; θ — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x; $\varphi = -H + \mathrm{const}$, где H — напор; ψ — функция тока; $\Phi(v)$ — функция, определяющая характер закона фильтрации. Имеем [4]

$$\varphi_x = \Phi(v)\cos\theta,\quad \varphi_y = \Phi(v)\sin\theta,\quad \psi_x = -v\sin\theta,\quad \psi_y = v\cos\theta$$

(нижние индексы означают частные производные по соответствующим переменным).

Полагаем

$$S = -\varphi + x\varphi_x + y\varphi_y,\quad T = -\psi + x\psi_x + y\psi_y$$

Приняв в качестве независимых переменных v и θ, получаем

$$S_v = \Phi'(v)X,\quad S_\theta = \Phi(v)Y,\quad T_v = Y,\quad T_\theta = -vX$$
$$X = x\cos\theta + y\sin\theta,\quad Y = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Эти равенства позволяют записать линейную систему

$$S_\theta = \Phi(v)T_v,\quad S_v = -\Phi'(v)v^{-1}T_\theta$$

и формулу перехода к плоскости течения

$$z = e^{i\theta}(-v^{-1}T_\theta + i\Phi^{-1}S_\theta)$$

Если, согласно условиям

$$\chi = \sqrt{\frac{\Phi(v)\Phi'(v)}{v}},\quad \sigma = \int\sqrt{\frac{\Phi'(v)}{v\Phi(v)}}\,dv \tag{1.1}$$

ввести функцию χ и вместо v — переменное σ, то придем к хорошо известной из газовой динамики канонической системе уравнений

$$S_\theta = \chi(\sigma)T_\sigma,\quad S_\sigma = -\chi(\sigma)T_\theta$$

Ясно, что функции

$$\mu(\sigma,\theta) = S_\theta,\quad \nu(\sigma,\theta) = T_\theta$$

удовлетворяют той же системе уравнений, что и функции $S(\sigma,\theta)$, $T(\sigma,\theta)$. Имеем

$$\mu_\theta = \chi(\sigma)\nu_\sigma,\quad \mu_\sigma = -\chi(\sigma)\nu_\theta \tag{1.2}$$

причем функции, для которых записана эта система, могут быть введены в рассмотрение и непосредственно при помощи равенств $\mu = \Phi Y$, $\nu =$

$= -vX$. Применяя функции $\mu(\sigma, \theta)$ и $\nu(\sigma, \theta)$, переход к плоскости течения осуществляем по формуле

$$z = e^{i\theta}(-\nu v^{-1} + i\mu\Phi^{-1}) \tag{1.3}$$

Из (1.1) следует

$$\chi dv/d\sigma = \Phi, \quad d\Phi/d\sigma = \chi v \tag{1.4}$$

При заданной функции $\chi(\sigma)$ эти соотношения можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в результате решения которой определяются функции $\Phi(\sigma; C_1, C_2)$ и $v(\sigma; C_1, C_2)$ с произвольными постоянными C_1 и C_2. Тем самым для заданной функции $\chi(\sigma)$ устанавливается в параметрическом виде (параметра σ) соответствующее семейство законов фильтрации.

2. Рассмотрим случаи $\chi = a/\sigma^2$ и $\chi = a \operatorname{cth}^2 \sigma$ ($a = \text{const} > 0$).

Решение системы (1.2) в первом случае допускает представление

$$\mu = a\sigma^{-1} \operatorname{Re} F', \quad \nu = \operatorname{Im}(F - \sigma F') \tag{2.1}$$

во втором случае — представление

$$\mu = -a \operatorname{Re}(F - \operatorname{cth} \sigma F'), \quad \nu = \operatorname{Im}(F - \operatorname{th} \sigma F')$$

где F — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\omega = \sigma + i\theta$ [2]. Такие же представления имеют место, конечно, и для пары $S(\sigma, \theta)$, $T(\sigma, \theta)$.

Если $\chi(\sigma) = a/\sigma^2$, то соответствующее семейство законов фильтрации определяется формулами

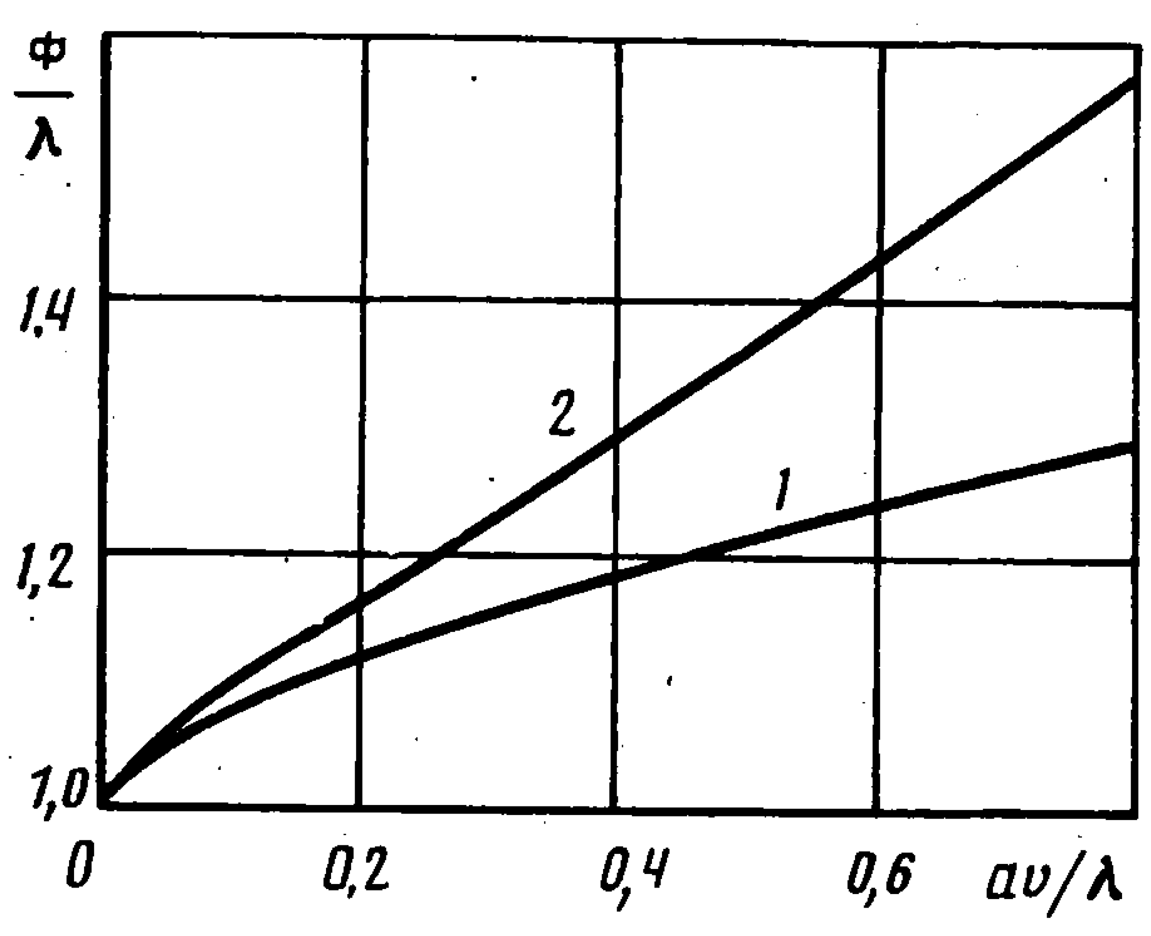
$$\Phi = \sigma^{-1}(C_1 \operatorname{sh} \sigma + C_2 \operatorname{ch} \sigma), \quad v = a^{-1}[C_1(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) + C_2(\sigma \operatorname{sh} \sigma - \operatorname{ch} \sigma)]$$

Положим $C_2 = 0$. Получаем закон фильтрации с предельным градиентом ($\lambda > 0$, $\sigma \geqslant 0$)

$$\Phi/\lambda = \operatorname{sh} \sigma/\sigma, \quad av/\lambda = \sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma \tag{2.2}$$

где вместо C_1 введено обозначение λ.

На фиг. 1 этот закон представлен кривой 1. Он в отличие от ранее предложенных для решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом законов [3, 5, 6] является выпуклым законом. При любом v из интервала $[0, \infty)$ выполняются неравенства $d\Phi/dv > 0$, $d^2\Phi/dv^2 < 0$. При $\sigma = 0$ имеем $v = 0$, $\Phi = \lambda$, $d\Phi/dv = \infty$, $d^2\Phi/dv^2 = -\infty$. Если $\sigma \to \infty$, то $v \to \infty$, $\Phi \to \infty$, $d\Phi/dv \to 0$, $d^2\Phi/dv^2 \to 0$.



Фиг. 1

Семейство законов фильтрации при $\chi(\sigma) = a \operatorname{cth}^2 \sigma$ определяется формулами

$$\Phi = \frac{C_1(\operatorname{sh} 2\sigma + 2\sigma) + C_2}{\operatorname{sh} \sigma}$$

$$v = \frac{C_1(\operatorname{sh} 2\sigma - 2\sigma) - C_2}{a \operatorname{ch} \sigma}$$

Положим $C_1 = \lambda/4$, $C_2 = 0$. Приходим к закону фильтрации с предельным градиентом ($\lambda > 0$, $\sigma \geqslant 0$)

$$\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{\operatorname{sh} 2\sigma + 2\sigma}{4 \operatorname{sh} \sigma}, \quad \frac{av}{\lambda} = \frac{\operatorname{sh} 2\sigma - 2\sigma}{4 \operatorname{ch} \sigma}$$

На фиг. 1 этот закон представлен кривой 2. При малых значениях скорости фильтрации он обладает свойством $d^2\Phi/dv^2 < 0$ (кривая 2 на фиг. 1 содержит точку перегиба). Для любого $v \geqslant 0$ имеем $d\Phi/dv > 0$. При $\sigma = 0$

выполняются равенства $v = 0$. $\Phi = \lambda$, $d\Phi/dv = \infty$, $d^2\Phi/dv^2 = -\infty$. Если $\sigma \to \infty$, то $v \to \infty$, $\Phi \to \infty$, $d\Phi/dv \to a$, $d^2\Phi/dv^2 \to 0$.

Наиболее простым является условие $\chi = a = \text{const}$. В этом случае $S - iaT$ и $\mu - ia\nu$ — аналитические функции ω. Соответствующее семейство законов фильтрации выражается формулами

$$\Phi = C_1 \operatorname{sh} \sigma + C_2 \operatorname{ch} \sigma, \quad av = C_1 \operatorname{ch} \sigma + C_2 \operatorname{sh} \sigma$$

При $C_1 = C_2$ имеем линейный закон, при $C_1 = 0$, $a = 1$ — закон, рассмотренный в [5].

3. Приложим закон (2.2) к задаче о точечном источнике в полосе.

Пусть полоса, в которой рассматривается движение, ограничена прямыми $y = +l$ и $y = -l$. Ограничивающие поток стенки — непроницаемые. Точечный источник интенсивности $4q$ находится в начале координат. Модуль вектора скорости фильтрации в бесконечности слева и в бесконечности справа принимает значение $v_1 = q/l$, соответствующее значение σ обозначим σ_1. На подлежащих определению границах застойных зон $v = 0$ и, следовательно, $\sigma = 0$, $\nu = 0$.

Благодаря симметрии потока достаточно исследовать лишь часть его в первом квадранте. Этой части потока в плоскости ω соответствует полуполоса $0 < \theta < \pi/2$, $\sigma > 0$, на границе которой выполняются равенства

$$\mu(\sigma, 0) = 0 \ (\sigma > \sigma_1), \quad \mu(\sigma, 0) = l\lambda\sigma^{-1} \operatorname{sh} \sigma \ (0 \leqslant \sigma < \sigma_1)$$
$$\nu(0, \theta) = 0 \ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2), \quad \mu(\sigma, \pi/2) = 0 \ (\sigma \geqslant 0)$$

В результате замены

$$F = \frac{1}{a} \int_{\omega_0}^{\omega} W(\omega)\, d\omega \quad (\omega_0 = \text{const})$$

вместо (2.1) получаем представление

$$\mu = \sigma^{-1} \operatorname{Re} W(\omega), \quad \nu = a^{-1} \operatorname{Im} \left[\int_{\omega_0}^{\omega} W(\omega)\, d\omega - \sigma W(\omega) \right] \tag{3.1}$$

с произвольной аналитической функцией $W(\omega) = U(\sigma, \theta) + iV(\sigma, \theta)$.

Пусть $\omega_0 = i\pi/2$. Приведенное граничное условие будет выполняться, если при $\theta = 0$, $0 \leqslant \sigma < \sigma_1$ выполняется равенство $U = l\lambda \operatorname{sh} \sigma$, а на остальной части границы $U = 0$.

Рассматриваемую в плоскости ω полуполосу отобразим с помощью функции $\zeta = \operatorname{ch} 2\omega$ на верхнюю полуплоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. На границе $\eta = 0$ будем иметь

$$U = 0 \ (\xi \leqslant 1), \quad U = l\lambda \sqrt{(\xi - 1)/2} \ (1 \leqslant \xi < \operatorname{ch} 2\sigma_1)$$
$$U = 0 \ (\xi > \operatorname{ch} 2\sigma_1)$$

Определив по этим граничным данным при помощи интеграла Шварца функцию $W(\zeta)$, получаем после возвращения к переменной ω искомую функцию $W(\omega)$ в виде

$$W = \frac{l\lambda}{\pi i} \left(2 \operatorname{sh} \sigma_1 + \operatorname{sh} \omega \ln \frac{\operatorname{sh} \omega - \operatorname{sh} \sigma_1}{\operatorname{sh} \omega + \operatorname{sh} \sigma_1} \right) \tag{3.2}$$

Граница застойной зоны определяется уравнением

$$z(\theta) = \lambda^{-1} e^{i\theta} [-U_{\sigma\theta} + iU_{\sigma}]_{\sigma=0},$$

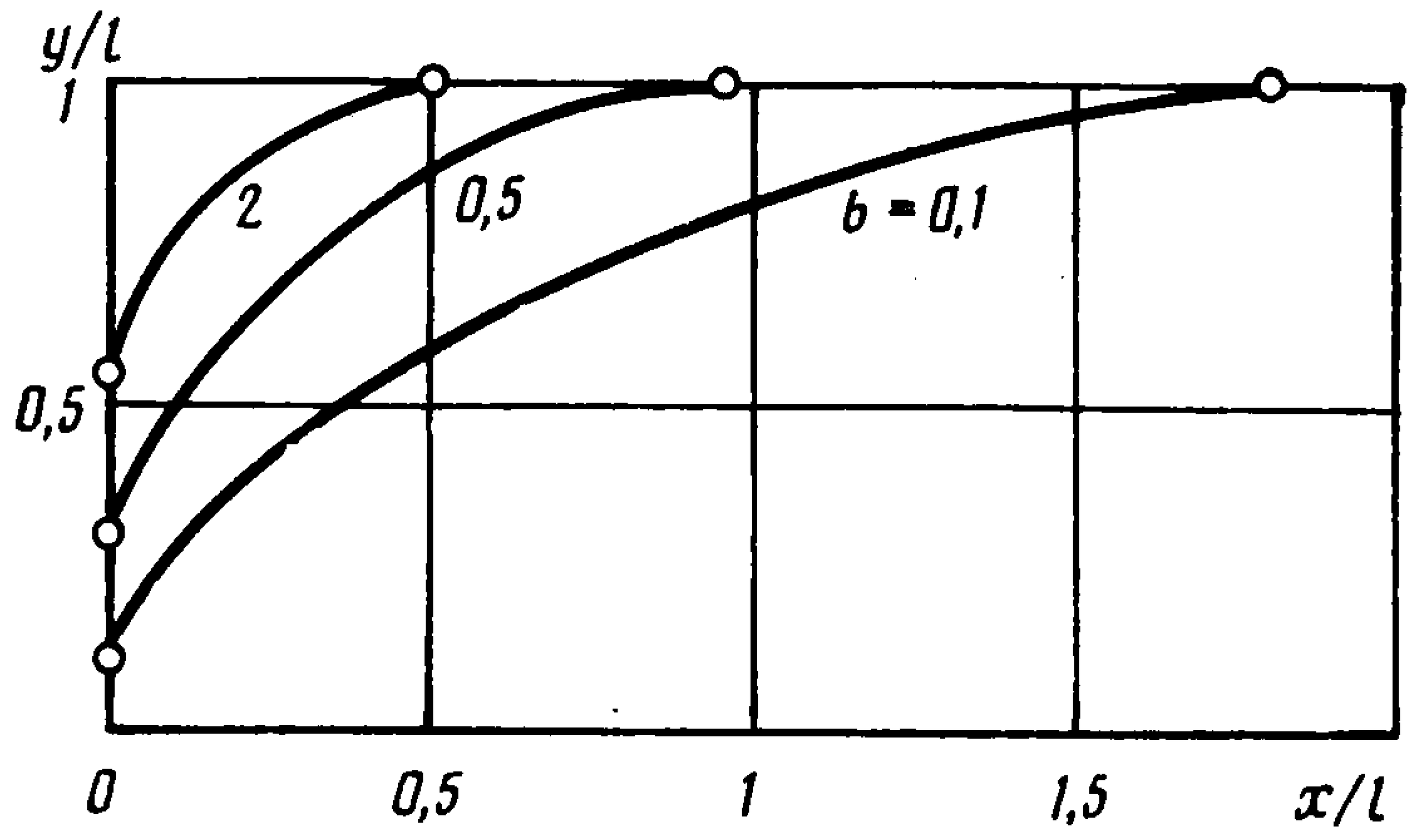
которое получаем из (1.3), применяя правило Лопиталя и учитывая в процессе преобразования первые из формул (1.2), (1.4) и (3.1). Пользуясь решением (3.2), устанавливаем следующие формулы для построения границы застойной зоны:

$$\frac{\pi x}{l} = \frac{4 \operatorname{sh}^3 \sigma_1 \cos^3 \theta}{(\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \sigma_1)^2}, \quad \frac{\pi y}{l} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \sigma_1} +$$
$$+ 2 \operatorname{sh} \sigma_1 \sin \theta \, \frac{\operatorname{sh}^2 \sigma_1 \cos^2 \theta - \operatorname{ch}^2 \sigma_1 \sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \sigma_1)^2}$$

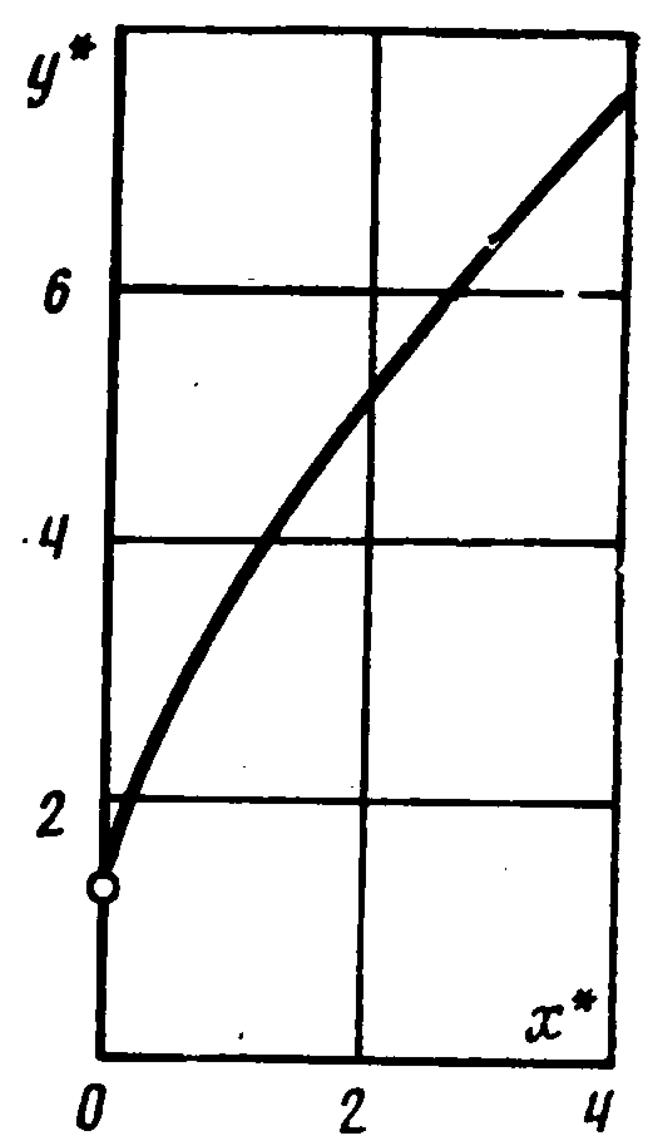
Результат расчета, проведенного по этим формулам при некоторых значениях параметра $b = av_1/\lambda$, показан на фиг. 2.

В случае $l = \infty$, $v_1 = 0$ имеем особенно простое решение

$$W = 2iaq/(\pi \operatorname{sh}^2 \omega)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Его можно получить, если в (3.2) заменить l на q/v_1, учесть вторую из формул (2.2) и затем перейти к пределу при $\sigma_1 \to 0$.

Граница застойной зоны в предельном случае $l = \infty$, $v_1 = 0$ определяется по формуле

$$z(\theta) = \frac{4aq}{\pi\lambda}\left(\frac{3\cos^3\theta}{\sin^4\theta} + i\,\frac{1+3\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\right)$$

Результат расчета по этой формуле приведен в координатах $x^* = \lambda x/(aq)$, $y^* = \lambda y/(aq)$ на фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. *Домбровский Г. А.* Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 158 с.
3. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
4. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33—52.
5. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 177—181.
6. *Домбровский Г. А.* О некоторых специальных законах нелинейной фильтрации // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 685—687.

Харьков

Поступила в редакцию
21.VIII.1989