

УДК 536.25

© 1990 г.

А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский

ДЛИННОВОЛНОВАЯ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СЛОЯХ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

На основе нелинейных уравнений, описывающих конечно-амплитудные искривления границы раздела [1] в системе горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей, изучаются длинноволновые конвективные течения в области значений числа Марангони, близких к критическому. Искривление границы раздела предполагается слабым. Получены приближенные эволюционные уравнения для деформации границы раздела. Найдены аналитические решения, описывающие стационарный рельеф поверхности при термокапиллярной конвекции, и исследована их устойчивость.

1. Пусть пространство между двумя горизонтальными твердыми пластинами ($z = 0$, $z = a$), на которых поддерживается постоянная и различная температура (разность температур равна θ), заполнено двумя слоями несмешивающихся жидкостей. В равновесии толщина нижнего (второго) слоя равна Ha , верхнего (первого) $(1 - H)a$; $0 < H < 1$. Плотности сред, коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности равны ρ_m , η_m , ν_m , κ_m , χ_m ($m = 1$ для верхнего слоя, $m = 2$ для нижнего слоя). Коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры T : $\sigma = \sigma_0(1 - \alpha T)$.

В качестве единиц длины, времени, скорости, давления и температуры выберем соответственно a , a^2/ν_1 , ν_1/a , $\rho_1\nu_1^2/a^2$ и θ . В безразмерных переменных уравнения конвекции и граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} D_1\bar{v}_1 &= -\nabla p_1 + \Delta\bar{v}_1, \operatorname{div}\bar{v}_1 = 0, D_1T_1 = P^{-1}\Delta T_1 \\ D_2\bar{v}_2 &= -\sigma\nabla p_2 + \nu^{-1}\Delta\bar{v}_2, \operatorname{div}\bar{v}_2 = 0, D_2T_2 = (\chi P)^{-1}\Delta T_2 \\ z = 1: \bar{v}_1 &= 0, T_1 = 0; z = 0: \bar{v}_2 = 0, T_2 = s \\ z = H + h: p_1 - p_2 + R^{-1}(W - MT) + Gh &= S_{ik}n_in_k \\ S_{ik}\tau_i^{(l)}n_k - M\tau_i^{(l)}\partial T_1/\partial x_i &= 0 \\ v_1 &= v_2, \partial h/\partial t + v_{1x}\partial h/\partial x + v_{1y}\partial h/\partial y = v_{1z} \\ T_1 &= T_2, (\kappa\partial T_1/\partial x_i - \partial T_2/\partial x_i)n_i = 0 \\ P &= \frac{\nu_1}{\chi_1}, G = \frac{ga^3\rho_1(\rho_2 - \rho_1)}{\eta_1^2}, M = \frac{\alpha\theta a}{\eta_1\nu_1}, W = \frac{\sigma a}{\eta_1\nu_1} \\ D_m &= \partial/\partial t + v_m\nabla, m = 1, 2 \\ S_{ik} &= (\partial v_{1i}/\partial x_k + \partial v_{1k}/\partial x_i) - \eta^{-1}(\partial v_{2i}/\partial x_k + \partial v_{2k}/\partial x_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_m , p_m , T_m — скорость, давление и температура в m -й жидкости (давление отсчитывается от гидростатического), h — отклонение поверхности раздела, n — вектор нормали к поверхности, $\tau^{(l)}$ ($l = 1, 2$) — ортогональные касательные векторы, R — радиус кривизны поверхности, P — число Прандтля, G — модифицированное число Галилея, M — аналог числа Марангони; параметр s равен 1 при подогреве снизу и -1 при нагреве сверху.

При записи краевой задачи (1.1) предполагалось, что числа Галилея $G_m = ga_m^3/\nu_m^2$ ($m = 1, 2$) порядка единицы, а величины $\beta_m\theta$ (β_m — коэф-

коэффициент теплового расширения m -й жидкости) малы. В силу этого в уравнениях (1.1) опущены слагаемые с архимедовой подъемной силой, пропорциональные числам Грасгофа $Gr_m = \beta_m \theta G_m$.

Краевая задача (1.1) всегда обладает решением

$$T_1^e = s(1-z)I^{-1}, T_2^e = s[(1-H) + \kappa(H-z)]I^{-1} \quad (I = (1-H) + \kappa H)$$

$$v_1^e = 0, v_2^e = 0, p_1^e = 0, p_2^e = 0, h^e = 0$$

соответствующим механическому равновесию.

Равновесие может потерять устойчивость с ростом M при некотором способе подогрева. В длинноволновой области нейтральная кривая описывается выражением [2]

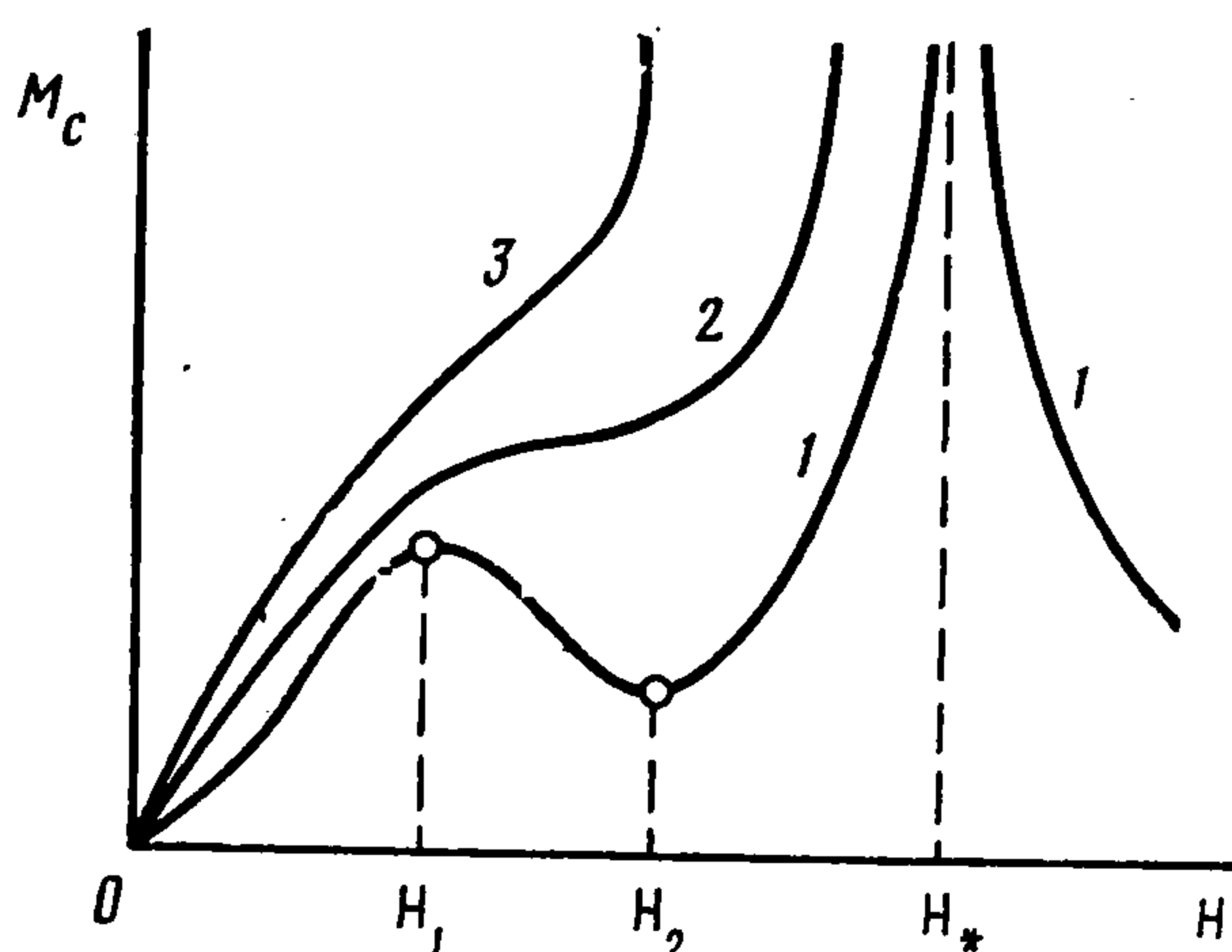
$$M(k) = M_c + Nk^2 \quad (1.2)$$

Пороговое значение $M(0) = M_c$ и способ подогрева (знак величины s), при котором реализуется длинноволновая неустойчивость, определяются формулой

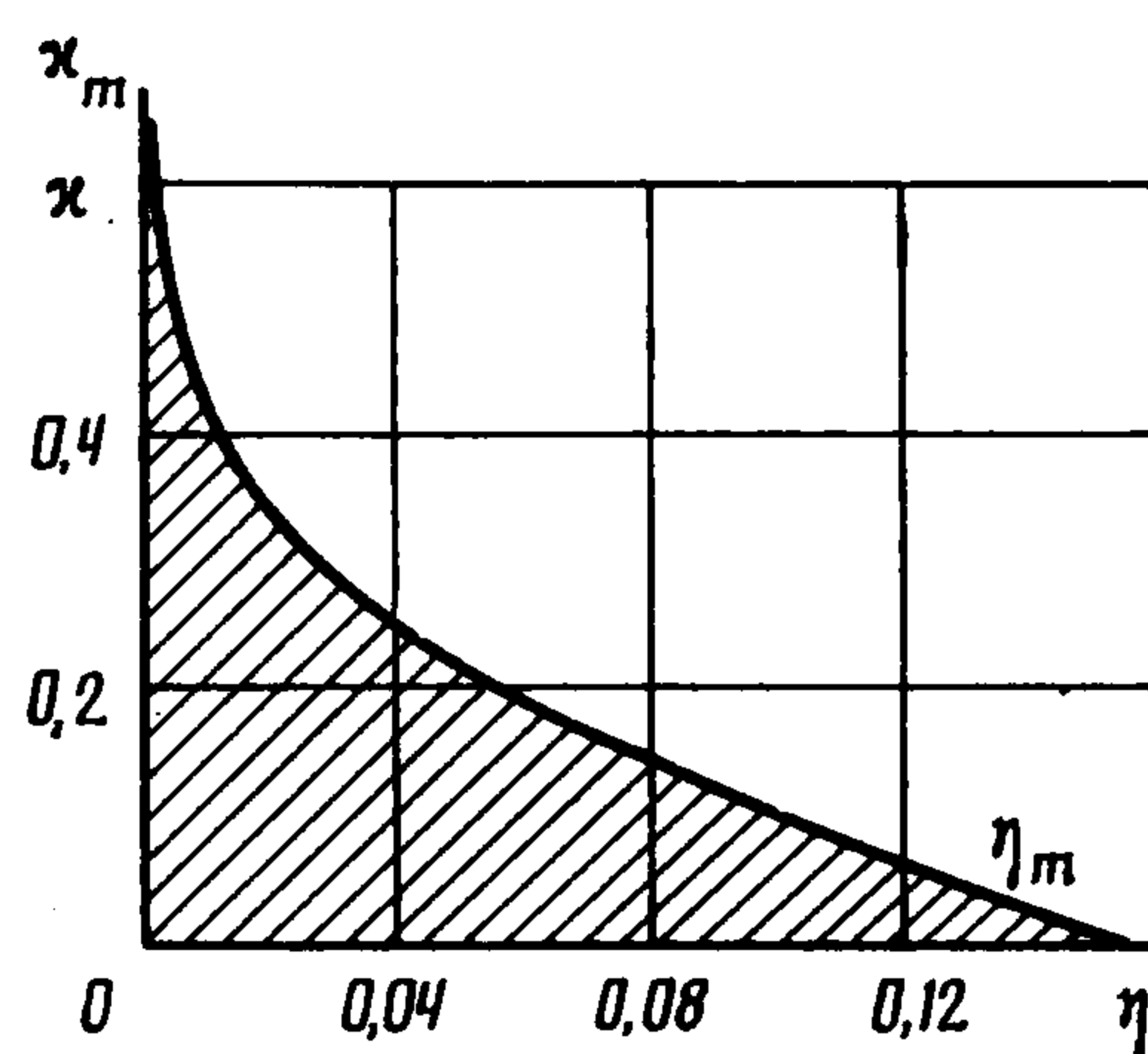
$$sM_c = \frac{2}{3}G\kappa^{-1}I^2JKH(1-H) \quad (1.3)$$

$$J = [(1-H) + \eta H], K = [(1-H)^2 - \eta H^2]^{-1}$$

Видно, что в интервале $0 < H < H_* = 1/(1 + \sqrt{\eta})$ неустойчивость возникает при подогреве снизу, а в интервале $H_* < H < 1$ — при нагреве



Фиг. 1



Фиг. 2

сверху. Внутри этих интервалов в зависимости от значений параметров κ и η производная $M_c' = dM_c/dH$ либо знакопостоянна, либо меняет знак в точках $H = H_1$ и $H = H_2$. Область на плоскости κ, η , в которой функция $M_c(H)$ немонотонна (фиг. 1, кривая 1), состоит из двух подобластей. Одна из них показана штриховкой на фиг. 2 ($\kappa_m = 2/3, \eta_m \simeq 0,1593$); другая подобласть получается преобразованием $\kappa \rightarrow 1/\kappa, \eta \rightarrow 1/\eta$. Если параметры κ и η лежат на границе заштрихованной области, зависимость M_c от H имеет точку перегиба (фиг. 1, кривая 2), в которой обе производные M_c' и M_c'' обращаются в нуль. Вне заштрихованной области M_c не имеет экстремумов и M_c' при любых H (фиг. 1, кривая 3).

Величина

$$N = M_c \left\{ \frac{1}{3}(\kappa - 1) I^{-1} H [(1-H)(1-2H) + \frac{1}{15}[\eta(1-H) + H] J^{-1} H \cdot (1-H) + \frac{2}{15}(1-\eta) K H^2 (1-H)^2 + W G^{-1} + \frac{1}{120} G P \eta K H^3 (1-H)^3 [(1-H)^2 - \kappa H^2]] \right\} \quad (1.4)$$

в зависимости от параметров системы может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае, однако, длинноволновые возмущения заведомо не являются наиболее опасными, поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай $N > 0$.

2. Длинноволновая неустойчивость равновесия приводит к развитию термокапиллярного течения, для которого амплитуда искривления поверхности раздела, вообще говоря, порядка толщины слоя. Это обуславливает довольно сложный вид определяющих уравнений [1], анализ которых затруднителен.

Ограничимся изучением длинноволновой термокапиллярной конвекции в непосредственной окрестности порогового числа Марангони и при малых отклонениях границы раздела h . В этом случае исследование решений задачи (1.1) упрощается.

Полагаем

$$M = M_c + \varepsilon M^{(1)} \quad (2.1)$$

где ε — малый параметр. Величины W и G считаем порядка единицы. Согласно (1.2), основной интерес (при $N > 0$) представляют нарастающие или медленно затухающие возмущения с волновыми числами $k \sim \varepsilon^{1/2}$, поэтому целесообразно произвести масштабное преобразование

$$\bar{x} = \varepsilon^{1/2}x, \quad \bar{y} = \varepsilon^{1/2}y \quad (2.2)$$

Временной масштаб эволюции длинноволновых возмущений

$$\bar{t} = \varepsilon^2 t \quad (2.3)$$

Ограничимся рассмотрением отклонений границы раздела h порядка ε . Произведем замену переменных

$$\begin{aligned} h &= \varepsilon \bar{h}, \quad T_m = T_m^e + \varepsilon \theta_m, \quad p_m = \varepsilon P_m, \\ u_m &= \varepsilon^{3/2} U_m, \quad v_m = \varepsilon^{3/2} V_m, \quad w_m = \varepsilon^2 W_m \quad (m = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(u, v, w обозначают x -, y - и z -компоненты скорости). Функции $h, \theta_m, P_m, U_m, V_m, W_m$ разложим в ряд по степеням ε :

$$h = h^{(0)} + \varepsilon h^{(1)} + \dots \quad (2.5)$$

и аналогично для остальных переменных.

Подставим (2.1)–(2.5) в полные нелинейные уравнения конвекции (1.1) и приравняем члены одного порядка по ε .

В низшем порядке по ε решение имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_1^{(0)} &= h^{(0)} A_1 (z - 1), \quad P_1^{(0)} = h^{(0)} B_1 \\ U_1^{(0)} &= \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \bar{x}} B_1 \left[\frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(1-H)(z-1)}{3} \right] \\ W_1^{(0)} &= \Delta_2 h^{(0)} B_1 \left[-\frac{(z-1)^3}{6} + \frac{(1-H)(z-1)^2}{6} \right] \\ \theta_2^{(0)} &= h^{(0)} A_2 z, \quad P_2^{(0)} = h^{(0)} B_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$U_2^{(0)} = \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \bar{x}} \eta B_2 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{Hz}{3} \right), \quad W_2^{(0)} = \Delta_2 h^{(0)} \eta B_2 \left(-\frac{z^3}{6} + \frac{Hz}{6} \right)$$

$$A_1 = s(\kappa - 1) I^{-2}, \quad B_1 = G\eta K H^2, \quad A_2 = s\kappa(\kappa - 1) I^{-2}, \quad B_2 = GK(1 - H)^2; \\ \bar{\Delta}_2 = \partial^2 / \partial \bar{x}^2 + \partial^2 / \partial \bar{y}^2$$

Выражения для $V_m^{(0)}$ получаются [из формул для $U_m^{(0)}$ заменой $\partial / \partial \bar{x}$ на $\partial / \partial \bar{y}$. Функция $h^{(0)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ в низшем порядке остается произвольной.

Из условия разрешимости системы уравнений в следующем порядке по ε получаем эволюционное уравнение для функции $h^{(0)}$, которое приводится к виду

$$\begin{aligned} B \partial h^{(0)} / \partial \bar{t} &= -M^{(1)} \bar{\Delta}_2 h^{(0)} = N \bar{\Delta}_2^2 h^{(0)} + 1/2 M'_c \bar{\Delta}_2 (h^{(0)})^2 \\ B &= 2s\kappa^{-1} \eta^{-1} I^2 K [K^{-2} + 4\eta H(1 - H)] H^{-2} (1 - H)^{-2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

м, что параметр B всегда положителен, поскольку, согласно, (1.3), величины s и K одного знака. Напомним, что параметр N предполагается положительным, так как в противном случае длинноволновые возмущения заведомо не являются наиболее опасными (см. формулу (1.2)). Как отмечалось в разд. 1, всюду за исключением отдельных значений параметра $H = H_{1,2}$ (фиг. 2). Здесь будем считать, что $M_c' \neq 0$; случай $M_c' = 0$ рассматривается в разд. 3.

Введем новые переменные

$$\tau = \frac{\bar{t}}{BN}, \quad X = \frac{\bar{x}}{N^{1/2}}, \quad Y = \frac{\bar{y}}{N^{1/2}}, \quad Z = -\frac{M_c'}{2} h^{(0)} \quad (2.8)$$

Тогда уравнение (2.6) приводится к виду

$$\partial Z / \partial \tau + \Delta_2^2 Z + M^{(1)} \Delta_2 Z + \Delta_2 (Z)^2 = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение типа (2.9) (в одномерном варианте) было получено [3] при изучении длинноволновых конвективных движений в условиях аномального термокапиллярного эффекта.

Рассмотрим стационарные одномерные режимы течения ($Z = Z(X)$), для которых уравнение (2.9) принимает вид

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\frac{d^2 Z}{dX^2} + M^{(1)} Z + Z^2 \right) = 0 \quad (2.10)$$

Величина Z пропорциональна отклонению высоты рельефа от среднего положения, поэтому выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z dX = 0 \quad (2.11)$$

Задача (2.10) обладает семейством периодических решений

$$Z(X) = -\frac{M^{(1)}}{2} - \frac{2-q^2}{3q^2} A + \frac{1-q^2}{q^2} A \operatorname{dn}^{-2} \xi \quad (2.12)$$

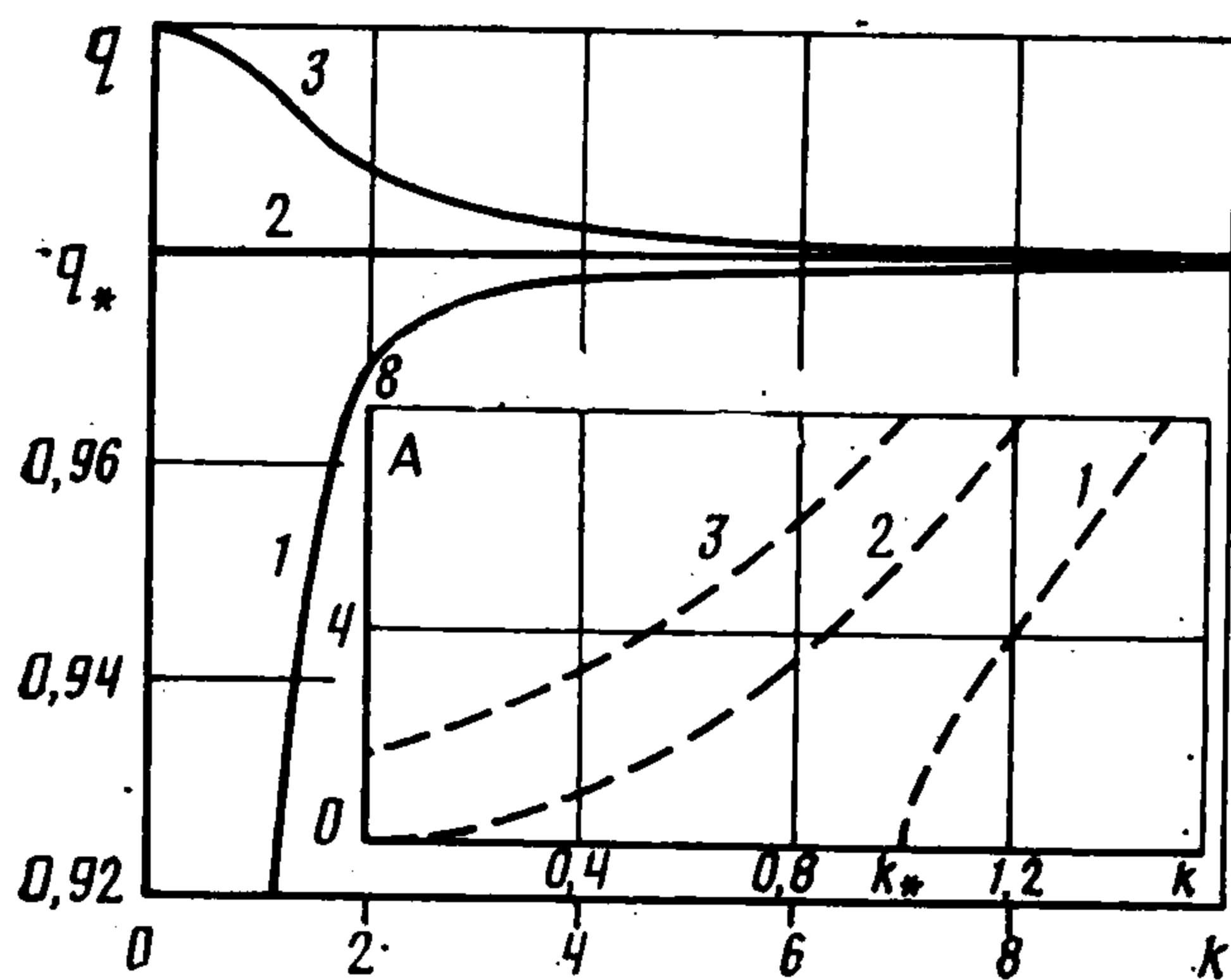
$$A = \frac{3q^2 M^{(1)}}{2[q^2 - 2 + 3E(q)/K(q)]} > 0, \quad \xi = \frac{\sqrt{A}}{3q} (X - X_0) \quad (2.13)$$

где $\operatorname{dn} \xi$ — эллиптическая функция Якоби с модулем q ; $E(q)$, $K(q)$ — полные эллиптические интегралы, X_0 — произвольная константа. Пространственный период функции $Z(X)$

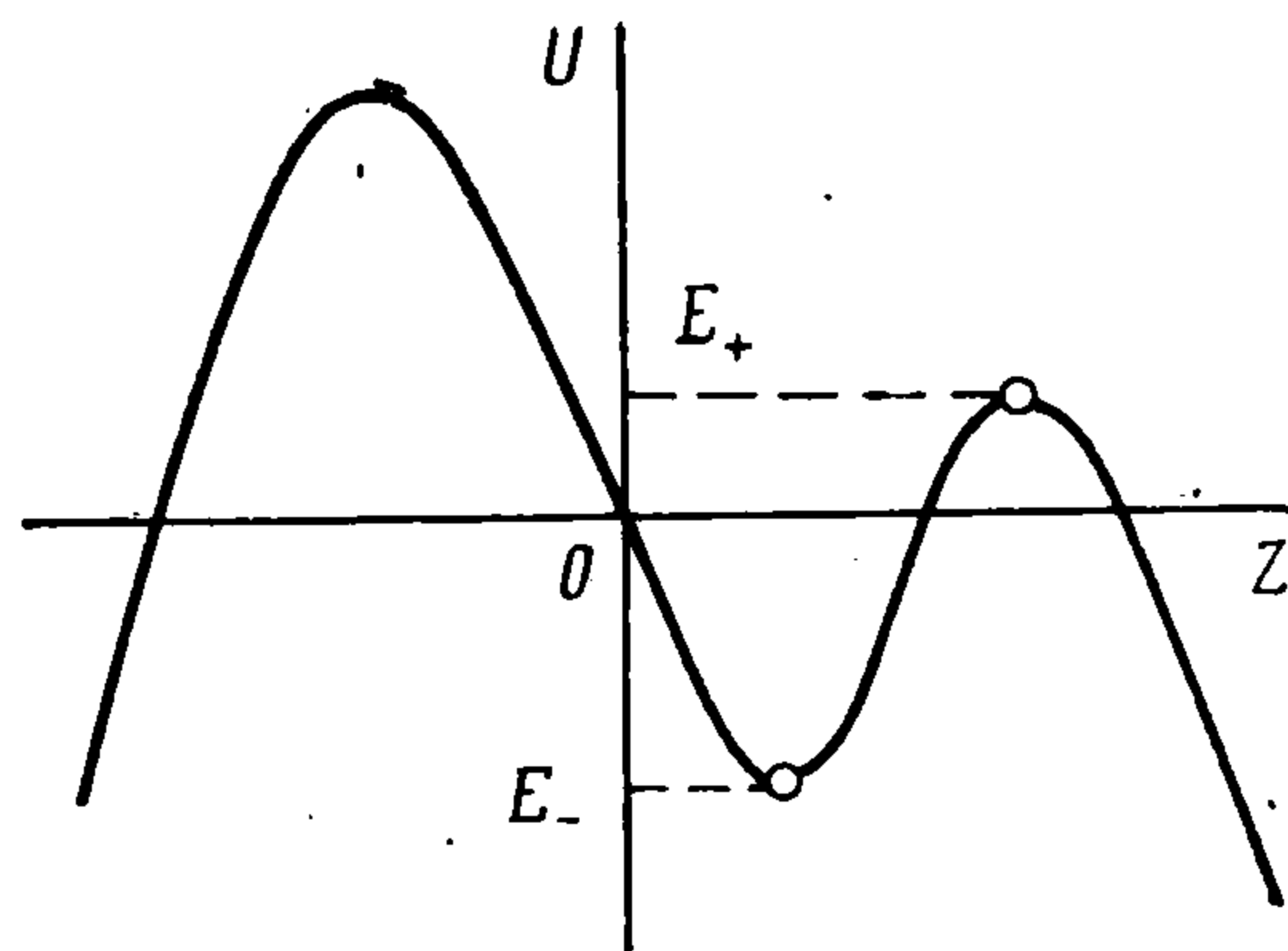
$$L = 2\pi/k, \quad k = \pi \sqrt{A/6} [qK(q)]^{-1} \quad (2.14)$$

Рассмотрим сначала область $M^{(1)} > 0$ (т. е. $M > M_c$). В этой области условие $A > 0$ выполняется при $0 < q < q_*$, где $q_* \simeq 0,98038$. Зависимость амплитуды рельефа A от волнового числа k , заданная параметрически формулами (2.14), (2.15), изображена на фиг. 3 (штриховая кривая 1). Ветвление осуществляется в область устойчивости равновесия $k > k_* = [M^{(1)}]^{1/2}$, поэтому стационарные решения (2.11) неустойчивы. В пространстве функций с заданным периодом такому решению отвечает седловая точка, устойчивое многообразие которой разделяет области затухающих и нарастающих возмущений конечной амплитуды, наложенных на состояние равновесия.

Зависимость параметра q от k показана на фиг. 3 (сплошная кривая 1). Заметим, что уже при небольшом отклонении k от единицы параметр q быстро приближается к q_* , так что стационарный рельеф сильно отличается от синусоидального.



Фиг. 3



Фиг. 4

При $M^{(1)} = 0$ ($M = M_c$) решение (2.12) удовлетворяет условию (2.11) независимо от величины A , если $q = q_*$ (фиг. 3, сплошная кривая 2); при этом

$$A = 6 (q_* K(q_*) / \pi)^2 k^2$$

(фиг. 3, штриховая кривая 2).

В подкритической области $M^{(1)} < 0$ ($M < M_c$) решение (2.12) существует для любого значения волнового числа k , причем $q_* < q \leq 1$. Зависимости амплитуды A и параметра q от волнового числа k показаны на фиг. 3 соответственно штриховой и сплошной кривыми 3. Минимальное значение A достигается при $k \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$) для решения

$$Z = {}^{3/2} |M^{(1)}| \operatorname{ch}^{-2} ({}^{1/2} |M^{(1)}|^{1/2} X)$$

С ростом k амплитуда A , определяющая границу неустойчивости равновесия по отношению к конечным возмущениям, быстро нарастает, причем, поскольку величина q остается близкой к единице, форма нейтрального конечно-амплитудного возмущения сильно отличается от синусоидальной и напоминает цепочку уединенных волн. По-видимому, именно этими обстоятельствами объясняется тот факт, что в численных экспериментах [3] не наблюдалось конечно-амплитудной неустойчивости равновесия при наложении пространственно-периодических возмущений, в то время как для возмущений в форме уединенной волны такая неустойчивость была обнаружена.

Двумерные стационарные решения уравнения (2.9) не удается построить в аналитическом виде. Ограничимся анализом ветвления двумерных пространственно-периодических решений в форме прямоугольных и гексагональных ячеек при $M^{(1)} > 0$ в окрестности $k = k_*$. Для прямоугольных ячеек разложение решения уравнения (2.9) по амплитуде дает следующее приближенное выражение:

$$Z = [a(S^2) (k - k_*) k_*]^{1/2} \cos k \sqrt{1 - S^2} X \cos SkY + O(k - k_*)$$

$$a(S^2) = \frac{48(3 - 4S^2)(1 - 4S^2)}{16S^4 - 16S^2 - 9}, \quad S = \sin \frac{\varphi}{2}$$

Здесь φ — угол между базисными волновыми векторами прямоугольной структуры. При $\varphi < 60^\circ$ ветвление мягкое, а при $\varphi > 60^\circ$ — жесткое. Для гексагональной структуры ветвление имеет двусторонний характер:

$$Z = 2(k - k_*) \left(\cos kX + 2 \cos \frac{kX}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kY \right) + o(k - k_*)$$

Как уже отмечалось, стационарное решение определяет порог устойчивости равновесия по отношению к возмущениям конечной амплитуды. Видно, что при малых $k - k_*$ амплитуда конечного возмущения в форме гексагональной ячейки, вызывающего неустойчивость равновесия, существенно ниже, чем амплитуда соответствующего возмущения в форме валов.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $M_c' = 0$. Как отмечалось в разд. 1, это может произойти при некоторых значениях $H = H_{1,2}$, если параметры η и κ лежат внутри указанных областей. Полагаем вместо (2.4)

$$h = \varepsilon^{1/2} \bar{h}, \quad T_m = T_m^e + \varepsilon^{1/2} \theta_m, \quad p_m = \varepsilon^{1/2} P_m$$

$$u_m = \varepsilon U_m, \quad v_m = \varepsilon V_m, \quad w_m = \varepsilon^{1/2} W_m$$

и разлагаем переменные в ряд по степеням параметра $\varepsilon^{1/2}$. В нулевом порядке вновь получаем решение (2.6); условие разрешимости задачи в порядке $\varepsilon^{1/2}$ сводится к $M_c' = 0$. Наконец, в порядке по ε находим эволюционное уравнение для $h^{(0)}$:

$$B \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \bar{t}} = -M^{(1)} \Delta_2 h^{(0)} - N \Delta_2^2 h^{(0)} + \frac{1}{6} M_c'' \Delta_2 (h^{(0)})^3 \quad (3.1)$$

где величины B , $M^{(1)}$ и N — те же что и в уравнении (2.7).

Ограничимся рассмотрением случая $M_c'' > 0$, что соответствует точке минимума $H = H_2$ зависимости M_c от H ; в противоположном случае стационарные решения, как и при $M_c' \neq 0$, оказываются неустойчивыми. Произведем замену переменных по первым трем формулам (2.8); положим

$$Z = (1/6 M_c'')^{1/2} h^{(0)} \quad (3.2)$$

При этом (3.1) принимает вид уравнения Кана — Хиллиарда (см., например, [4]):

$$\partial Z / \partial \tau + \Delta_2^2 Z + M^{(1)} \Delta_2 Z - \Delta_2 Z^3 = 0 \quad (3.3)$$

Представляют интерес ограниченные решения, удовлетворяющие условию (2.11). В области $M^{(1)} < 0$ уравнение не обладает ненулевыми решениями. При $M^{(1)} > 0$ можно построить семейство пространственно-периодических движений в форме валов

$$Z = \left(\frac{2q^2 M^{(1)}}{q^2 + 1} \right)^{1/2} \operatorname{sn} \left[\left(\frac{M^{(1)}}{q^2 + 1} \right)^{1/2} (X - X_0) \right], \quad 0 < q < 1 \quad (3.4)$$

(q — модуль эллиптической функции Якоби) с периодом

$$l = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \left(\frac{M^{(1)}}{q^2 + 1} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2K(q)} \quad (3.5)$$

Известно [4—6], что устойчивыми стационарными решениями уравнения (3.3) являются только неперiodические решения

$$Z = \pm (M^{(1)})^{1/2} \operatorname{th} [(1/2 M^{(1)})^{1/2} (X - X_0)] \quad (3.6)$$

Решение типа (3.6) представляет собой стационарную «ступеньку», поддерживаемую конвективным вихрем, центр которого расположен при $X = X_0$. На больших расстояниях от ступеньки относительные толщины нижнего слоя определяются выражением

$$H_{\pm} = H_2 \pm (6 (M - M_c(H_2)) / M_c'')^{1/2}$$

Учитывая, что при значениях H , близких к H_2 , зависимость $M_c(H)$ приближенно описывается формулой

$$M_c(H) = M_c(H_2) + 1/2 M_c'' (H - H_2)^2$$

можно убедиться, что $M < M_c(H_{\pm})$. Вследствие этого конвективная неустойчивость вдали от ступеньки не развивается.

Решение типа (3.4) при малых k представляет собой совокупность удаленных одна от другой ступенек. Хотя такие структуры неустойчивы, инкремент нарастания возмущений для движения с $k/k_* \ll 1$ экспоненциально мал, так что процесс разрушения такой структуры может быть очень длительным.

4. Особого рассмотрения требует случай $|H - H_2| \sim \varepsilon^{1/2}$, для которого $M_c' = M_c''(H - H_2) \sim \varepsilon^{1/2}$ и в эволюционном уравнении для отклонения поверхности квадратичный и кубический члены имеют один порядок:

$$B\partial h^{(0)}/\partial \bar{t} = -M^{(1)}\bar{\Delta}_2 h^{(0)} - N\bar{\Delta}_2^2 h^{(0)} + 1/2 M_c'' H^{(0)} \bar{\Delta}_2 h^{(0)2} + 1/6 M_c'' \bar{\Delta}_2 h^{(0)3}, \quad H^{(0)} = (H - H_2)/\varepsilon^{1/2} \quad (4.1)$$

(обозначения те же, что и в уравнении (3.1)). Произведя замену переменных по первым трем формулам (2.8) и полагая

$$Z = (1/6 M_c'')^{1/2} (h^{(0)} + H^{(0)})$$

приводим уравнение (4.1) к виду

$$\partial Z/\partial \tau + \Delta_2^2 Z + \bar{M}^{(1)} \Delta_2 Z - \Delta_2 (Z^3) = 0 \quad (4.2)$$

$$\bar{M}^{(1)} = M^{(1)} + 1/2 M_c'' H^{(0)2} = (M - M_c(H_2)) / \varepsilon$$

Условие сохранения средней толщины слоев обеих жидкостей дает вместо (2.11)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L Z dX = \bar{Z}, \quad \bar{Z} = \left(\frac{M_c''}{6} \right)^{1/2} H^{(0)} \quad (4.3)$$

Для стационарных одномерных решений имеем

$$d^2 Z/dX^2 + \bar{M}^{(1)} Z - Z^3 = CX + D \quad (4.4)$$

где C, D — постоянные. Согласно условию ограниченности решения при $X \rightarrow \pm\infty$ следует положить $C = 0$. Видно, что отыскание стационарных конвективных структур формально эквивалентно задаче о нелинейных колебаниях частицы с потенциальной энергией

$$U(Z) = 1/2 \bar{M}^{(1)} Z^2 - 1/4 Z^4 - DZ$$

(роль времени играет координата X). Ограниченные решения с $\bar{Z} \neq 0$ существуют в области значений параметров

$$\bar{M}^{(1)} > 0, \quad 0 < D < 2 (1/3 \bar{M}^{(1)})^{3/2}$$

в которой потенциал $U(Z)$ имеет вид, изображенный на фиг. 4. Очевидно, что для фиксированных $\bar{M}^{(1)}, D$ задача обладает семейством периодических решений, для которых величина $E = 1/2 (dZ/dX)^2 + U(Z)$ лежит в интервале $E_- < E < E_+$, и аperiodическим решением с $E = E_+$. Эти решения могут быть выражены через эллиптические функции [4]. Заметим, что все решения с $\bar{Z} \neq 0$, в отличие от (3.6), немонотонны.

Все перечисленные решения, однако, неустойчивы. Этот вывод следует из результатов работы [5], согласно которым знаки инкрементов нормальных возмущений, определяемых краевой задачей

$$\sigma\psi + \Delta_2^2 \psi + \bar{M}^{(1)} \Delta_2 \psi - 3\Delta_2 (Z^2 \psi) = 0, \quad \lim_{X \rightarrow \pm\infty} |\psi| < \infty$$

совпадают со знаками собственных значений для задачи

$$\Delta_2 \Phi + (\bar{M}^{(1)} - 3Z^2) \Phi = \sigma \Phi, \quad \lim_{X \rightarrow \pm\infty} |\Phi| < \infty \quad (4.5)$$

Поскольку задача (4.5) всегда обладает знакопостоянным решением

$$\Phi = dZ/dX, \quad \sigma = 0$$

а максимальное значение $\sigma = \sigma_{\max}$ не вырождено и отвечает знакопостоянной собственной функции, отсюда следует, что $\sigma_{\max} > 0$.

В реальных условиях, однако, слои всегда имеют конечную длину. Можно показать, что наличие твердых теплоизолированных боковых стенок при $X = \pm L$ накладывает граничные условия

$$X = \pm L: \partial Z / \partial X = \partial^2 Z / \partial X^2 = 0 \quad (4.6)$$

При $L \gg 1$, $\bar{Z} < [\bar{M}^{(1)}]^{1/2}$ задача (4.4), (4.6) обладает двумя монотонными решениями, которые с экспоненциальной точностью могут быть записаны в виде (3.6) (с заменой $M^{(1)}$ на $\bar{M}^{(1)}$), где $X_0 = \mp L\bar{Z}$. Как и при $\bar{Z} = 0$, эти решения устойчивы.

Таким образом, стационарный рельеф имеет форму ступеньки и существует в области $M > M_c(H_2) + 1/6 M_c'' (H - H_2)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадрагинова Л. Г. Нелинейные уравнения длинных волн в задаче о термокапиллярной конвекции в двухслойной жидкости // *Динамика сплошной среды*. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып. 69. С. 3—18.
2. Smith K. A. On convective instability induced by surfacetension gradients // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24. № 2. P. 401—414.
3. Пухначев В. В. Проявление аномального термокапиллярного эффекта в тонком слое жидкости // *Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью*. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 119—127.
4. Novick-Cohen A., Segel L. A. Nonlinear aspects of the Cahn — Hilliard equation // *Physica D*. 1984. V. 10. № 3. P. 277—298.
5. Langer J. S. Theory of spinodal decomposition in alloys // *Ann. Phys.* 1971. V. 65. № 1—2. P. 53—86.
6. Непомнящий А. А. Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве // *ПММ*. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 886—891.

Пермь

Поступила в редакцию
12.IX.1989