УДК 532.593

А. М. Тер-Крикоров

СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ПОТОКИ И ДИПОЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Методом потенциалов изучаются внутренние волны за препятствием в трехмерном потоке идеальной несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости между двумя горизонтальными стенками. Для уравнения движения в форме Буссинеска строится фундаментальное решение, удовлетворяющее условиям излучения и граничным условиям на плоских стенках. Исследуются особенности фундаментального решения и асимптотика по малому параметру $\beta = NH/(\pi c)$. Фундаментальное решение используется для построения решения граничной задачи в виде потенциала двойного слоя. Показано, что интегральное уравнение для плотности разрешимо, если параметр β достаточно мал. Вне полуцилиндра с осью, параллельной оси потока и содержащего источник возмущения, волновое поле с точностью до малых высших порядков относительно малых параметров может быть заменено волновым полем от диполя с моментом, линейно зависящим от суммы массы препятствия и его присоединенной массы, связанной с поступательным движением вдоль оси симметрии, параллельной скорости потока.

1. Постановка задачи. Между двумя горизонтальными стенками помещено препятствие, занимающее область Ω и обтекаемое потоком идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости, Глубина H/π потока и невозмущенная скорость c потока принимаются за единицы длины и скорости. Частота Брента — Вяйсяля N предполагается постоянной. Начало системы координат находится на верхней граничной плоскости, ось x направлена вдоль потока, ось z — вертикально вверх. Если h — характерный размер области Ω и параметр $\beta' = Nh/c$ достаточно мал, то существует единственная траектория, разветвляющаяся на границе области Ω [1]. Все другие траектории не имеют критических точек и при $x \to -\infty$ асимптотически стремятся к прямым, параллельным оси x. Если $P(x, y, z)$ — произвольная точка внутри жидкости, то ее асимптота при $x \to -\infty$ отстоит от плоскости xy на расстоянии $\zeta(x, y, z)$. Ставится задача нахождения функции $w(x, y, z) = z - \zeta(x, y, z)$, задающей отклонение по вертикали траектории от ее асимптоты.

Линеаризованное уравнение для функции w имеет вид [1]

$$Lw = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_2\right)w + \beta^2\Delta_2 w = 0; \quad \beta = \frac{NH}{\pi c}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

Значение ζ_0 переменной $\zeta(x, y, z)$ на разветвляющейся траектории — неизвестная постоянная, которая должна быть определена в процессе решения. Граничные условия имеют вид

$$w|_{\partial\Omega} = z|_{\partial\Omega} - \zeta_0 \tag{1.2}$$

$$w|_{z=0} = w|_{z=\pi} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} w = \lim_{r\to\infty} |\nabla w| = 0 \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

$$w = o(e^{\gamma x}), \quad |\nabla w| = o(e^{\gamma x}) \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \quad \gamma > 0 \tag{1.3}$$

2. Фундаментальное решение и его свойства. Для того чтобы решать задачу обтекания препятствия при помощи потенциалов, построим методом Фурье функцию $G(x, y, z, \zeta, \beta)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.3) и уравнению

$$LG = \delta(z-\zeta)\,\partial^2\delta(x,y)/\partial x^2$$

где $\delta(x, y)$ и $\delta(z-\zeta)$ — дельта-функции [2]. В приложении показано, что указанная функция приводится к виду

$$G = (2\pi)^{-1}\beta\theta(x)\,(H(\beta x, y, z-\zeta) - H(\beta x, y, z+\zeta)) + G_0 + G_1 + G_2$$

$$H(x, y, z) = -\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(x)\,S_k(y, z), \quad G_m = G_m(x, y, z, \zeta, \beta), \quad m = 0, 1, 2$$

$$S_0(y, z) = y - \ln 2 - \ln(\operatorname{ch} y - \cos z)$$

$$S_k(y, z) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{C_{k-1}^m}{(m+1)!}\, y^{m+1}\, \frac{\partial^{m+1} S_0(y, z)}{\partial y^{m+1}}, \quad k \geqslant 1$$

$$G_0 = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2n\pi-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2n\pi+\zeta)^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0(nr)\sin(nz)\sin(n\zeta) \tag{2.1}$$

Здесь $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$ и единице при $x \geqslant 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя, $K_0(nx)$ — модифицированная функция Бесселя, функция G_1 непрерывно дифференцируема и для нее справедлива равномерная оценка

$$|G_1| + |\nabla G_1| \leqslant C\beta^3(1 + \beta|x|) \tag{2.2}$$

Функция G_2 непрерывна, имеет ограниченные производные и для нее справедлива равномерная оценка

$$|G_2| + |\nabla G_2| \leqslant C\beta^2 \exp\left(-\sqrt{1-\beta^2}\,|x|\right) \tag{2.3}$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что функция G имеет в точке $(0, 0, \zeta)$ полярную особенность типа источника, а на оси x — логарифмические особенности, ряд в третьей формуле (2.1) быстро сходится при $\beta x = O(1)$.

3. Случай потенциального потока. Будем рассматривать задачу обтекания препятствия при $\beta \to 0$. Значению параметра $\beta = 0$ соответствует задача обтекания препятствия однородным потоком. При малых β будут построены такие решения, которые при $\beta \to 0$ равномерно стремятся к решению задачи обтекания препятствия потенциальным потоком, но предварительно проведем исследование предельного решения при $\beta = 0$.

Пусть $x + \varphi_1(x, y, z)$ — потенциал обтекания области Ω. Рассмотрим функции точечного источника для задач Дирихле и Неймана в слое $-\pi < z < 0$

$$R_0(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n(P, Q)} - \frac{1}{r_n(P, Q')}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(n\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\sin(nz)\sin(n\zeta) \tag{3.1}$$

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(\xi, \eta, \zeta), \quad Q' = Q'(\xi, \eta, -\zeta)$$

$$r_n^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2n\pi-\zeta)^2$$

$$R_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n(P, Q)} + \frac{1}{r_n(P, Q')} - \frac{1}{n\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(n\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\cos(nz)\cos(n\zeta) \tag{3.2}$$

Функции R_i по каждой из переменных точек P, Q интегрируемы с квадратом в плоском слое T $(-\pi < z < 0)$ в силу равенства Парсеваля.

Предполагая, что поверхность $\partial\Omega$ удовлетворяет условиям Ляпунова, принятым в теории потенциала, будем функцию $w_0(Q)$, являющуюся решением внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, искать в виде потенциала двойного слоя [2]

$$w_0(Q) = \iint\limits_{\partial\Omega} \nu_0(P) \frac{\partial}{\partial N_P} R_0(P, Q)\, dS_P$$

При этом будут удовлетворены условия на границах слоя и асимптотические условия на бесконечности. Для того чтобы удовлетворить условиям (1.2) на поверхности $\partial\Omega$, потребуем, чтобы плотность $\nu_0(P)$ была решением интегрального уравнения

$$\nu_0(Q) + \iint\limits_{\partial\Omega} \nu_0(P) \frac{\partial}{\partial N_P} R_0(P, Q)\, dS_P = z\,|_{\partial\Omega} - \zeta_0 \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) имеет решение в том и только в том случае, когда правая часть ортогональна собственной функции $\mu_0(P)$ сопряженного интегрального уравнения. Если искать решение однородной задачи Неймана в виде потенциала простого слоя, то $\mu_0(P)$ — плотность этого потенциала. Ей соответствует решение однородной задачи Неймана, равное единице.

Условие разрешимости дает уравнение для определения неизвестной постоянной

$$\int\limits_{\partial\Omega} z(P)\,\mu_0(P)\, dS = \zeta_0 \int\limits_{\partial\Omega} \mu_0(P)\, dS \tag{3.4}$$

Постоянная ζ_0 из этого уравнения может быть определена, т. е. функция $\mu_0(P)$ не ортогональна единице.

Действительно, в противном случае решение внешней задачи Дирихле $w_0^1(P)$, равное единице на $\partial\Omega$, можно представить в виде потенциала двойного слоя. Из интегрируемости с квадратом ядра по области T следует, что функции w_0^1 и ∇w_0^1 интегрируемы с квадратом в области $T \setminus \Omega$, а поверхностные интегралы от этих функций по боковым поверхностям цилиндров радиуса R и с образующей, параллельной оси z, стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Замечая, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} w_0^1 \frac{\partial w_0^1}{\partial N}\, dS = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w_0^1}{\partial N}\, dS = 0$$

и применяя к w_0^1 формулу Грина, получаем

$$0 = -\int\limits_{T-\Omega} |\nabla w_0^1|^2\, dx\, dy\, dz + \int\limits_{\partial\Omega} w_0^1 \frac{\partial w_0^1}{\partial N}\, dS = -\int\limits_{T\setminus\Omega} |\nabla w_0^1|^2\, dx\, dy\, dz$$

Следовательно, $\nabla w_0^1 = 0$ и $w_0^1 = \mathrm{const}$ в области $T \setminus \Omega$, что невозможно, так как функция w_0^1 равна единице на $\partial\Omega$ и обращается в нуль на бесконечности. Итак ζ_0 определяется из уравнения (3.4).

Пусть область Ω симметрична относительно прямой, параллельной оси x, объем области Ω равен V, а M — присоединенная масса области при поступательном движении вдоль указанной оси симметрии.

Можно показать, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \nu_0(P) \cos N\zeta\, dS = \frac{1}{2}(V + M) \tag{3.5}$$

Для доказательства заметим, что потенциал $\varphi_1(Q)$ — решение внешней задачи Неймана, обращающееся в нуль на бесконечности, и поэтому может быть представлен в виде потенциала простого слоя. Применяя к функции $\varphi_1(Q)$ формулу Грина, получаем, что

$$\varphi_1(Q) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\varphi_1(P)\frac{\partial}{\partial N_P}R_1(P, Q) + R_1(P, Q)\cos N\xi\right)dS_P$$

Найдем асимптотику $\varphi_1(Q)$ при $Q \to \infty$. Можно установить, что

$$R_1(P, Q) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n(Q, O)} - \frac{1}{2n\pi} + \frac{x\xi + y\eta}{r_n^3(Q, O)}\right)$$

$$\frac{\partial R_1(P, Q)}{\partial N_P} \sim \frac{1}{\pi}(x\cos N\xi + y\cos N\eta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r_n^3(Q, O)}$$

Подставляя эти соотношения в формулу Грина, получаем

$$\varphi_1(Q) = \frac{V+M}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x}{r_n^3(Q, O)} \tag{3.6}$$

Ранее было показано, что функция $w_0(Q)$ может быть представлена в виде потенциала двойного слоя с плотностью $\nu_0(P)$. Асимптотика $w_0(Q)$ при $Q \to \infty$ имеет вид

$$w_0(Q) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\nu_0(P)\cos N\zeta\, dS\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z+2n\pi}{r_n^3(Q, O)}\right) \tag{3.7}$$

Учитывая, что $v_z = \partial\varphi_1/\partial z = \partial w_0/\partial x$ и сравнивая формулы (3.6) и (3.7), получаем формулу (3.5).

4. Исследование задачи обтекания препятствия при $\beta \to 0$. Положим

$$R(P, Q, \beta) = -2G(x-\xi, y-\eta, z, \zeta, \beta)$$

В разд. 2 было показано, что функция $R(P, Q, \beta)$ имеет в точке $P = Q$ особенность типа источника, а на луче $y = \eta$, $z = \zeta$ — логарифмические особенности типа $q(x)\ln((y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)$, где $q(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Вне луча функция $R(P, Q, \beta)$ регулярна в слое T.

Будем искать решение задачи обтекания препятствия неоднородным потоком в виде

$$w(Q, \beta) = \int\limits_{\partial\Omega}\nu(P, \beta)\frac{\partial}{\partial N_P}R(P, Q, \beta)\,dS_P \tag{4.1}$$

Правая часть при переходе через поверхность $\partial\Omega$ терпит такой же разрыв, как и обычный потенциал двойного слоя, и для определения неизвестной функции $\nu(P, \beta)$ получаем уравнение Фредгольма

$$\nu(Q, \beta) + \int\limits_{\partial\Omega}\nu(P, \beta)\frac{\partial}{\partial N_P}R(P, Q, \beta)\,dS_P = z|_{\partial\Omega} - \bar\zeta, \quad Q \in \partial\Omega \tag{4.2}$$

В разд. 3 было показано, что при $\beta = 0$ и $\bar\zeta = \zeta_0$ это уравнение имеет решение $\nu = \nu_0(Q)$. Положим

$$\nu = \nu_0 + \beta\nu_1, \quad \bar\zeta = \zeta_0 + \beta\zeta_1, \quad R(P, Q, \beta) = R_0(P, Q) + \beta R_1(P, Q, \beta) \tag{4.3}$$

Ядро $\partial R(P, Q, \beta)/\partial N$ порождает вполне непрерывный интегральный оператор в пространстве непрерывных на $\partial\Omega$ функций.

Введем обозначения

$$R_i u = -\int\limits_{\partial\Omega}u(P)\frac{\partial}{\partial N_P}R_i(P, Q, \beta)\,dS_P, \quad i = 0, 1 \tag{4.4}$$

$$(u, v) = \int\limits_{\partial\Omega}u(P)v(P)\,dS_P$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя обозначение (4.4), получаем уравнение

$$(I - R_0)\,\nu_1 = -\zeta_1 + R_1\nu_0 + \beta R_1\nu_1 \tag{4.5}$$

Подберем ζ_1 так, чтобы правая часть уравнения (4.5) была ортогональна μ_0, а μ_0 перенормируем так, чтобы $(\mu_0, 1) = 1$. Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$(I - R_0)\,\nu_1 = R_1\,\nu_0 + \beta R_1\nu_1 - (\mu_0,\ R_1\nu_0 + \beta R_1\nu_1)$$

Так как оператор $I - R_0$ имеет ограниченный обратный на подпространстве непрерывных функций, ортогональных μ_0, то

$$\nu_1 = (I - R_0)^{-1}\,(R_1\nu_0 - (\mu_0,\ R_1\nu_0)) - \beta\,(I - R_0)^{-1}\,(R_1\nu_1 - (\mu_0,\ R_1\nu_1)) \tag{4.6}$$

При достаточно малом β уравнение (4.6) имеет решение, которое может быть построено методом итераций.

Подставляя выражение для ν из формулы (4.3) в формулу (4.1), получаем

$$w(Q, \beta) = \int\limits_{\partial\Omega} \nu_0(P)\frac{\partial}{\partial N_P} R(P, Q, \beta)\,dS_P + \beta\int\limits_{\partial\Omega} \nu_1(P)\frac{\partial}{\partial N_P} R(P, Q, \beta)\,dS_P \tag{4.7}$$

Второе слагаемое в формуле (4.7) будем отбрасывать как дающее вклад более высокого порядка малости. Тогда

$$w(x, y, z, \beta) = -2\int\limits_{\partial\Omega} \nu_0(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial N_P} G(x-\xi, y-\eta, z, \zeta, \beta)\,dS_P \tag{4.8}$$

Пусть h_0 — глубина погружения препятствия, d — его диаметр, T_Ω — область, полученная удалением из слоя T всех лучей, исходящих из граничных точек $\partial\Omega$ в положительном направлении оси x. Из свойств функции G, описанных в разд. 2, следует, что в области T_Ω функция G аналитична по x, y, z при любых $(\xi, \eta, \zeta) \in \partial\Omega$.

Будем считать, что диаметр d мал. Раскладывая функцию G по степеням $\zeta - h_0$ при $(\xi, \eta, \zeta) \in \partial\Omega$ и пренебрегая величинами порядка квадрата диаметра, имеем

$$G(x, y, z, \zeta, \beta) = G(x, y, z, h_0, \beta) + \frac{\partial G}{\partial\zeta}(x, y, z, h_0, \beta)(\zeta - h_0) + o((\zeta - h_0)) \tag{4.9}$$

Подставляя формулу (4.9) в формулу (4.8) и учитывая равенство (3.5), получаем, что в области T_Ω на расстояниях, значительно превышающих глубину жидкости, справедлива формула

$$w(x, y, z, \beta) \sim -(V + M)\frac{\partial G}{\partial\zeta}(x, y, z, h_0, \beta) \tag{4.10}$$

Формулу (4.10) можно трактовать как «дипольное приближение» к решению задачи обтекания.

Для плоской задачи, в случае, когда потенциал соответствующего однородного потока может быть задан распределением диполей на горизонтальном или вертикальном отрезке, формула (4.10) была получена в [3].

5. Приложение. Исследование свойств функции G. Раскладывая функцию G в ряд по системе синусов $\{\sin(nz)\}$ и применяя к каждому коэффициенту этого ряда преобразование Фурье по переменным x, y, можно показать, что

$$G = \Theta(x)\sum_{n=1}^{\infty}(G_n^1(x, y, \beta) + G_n^2(x, y, \beta))\sin nz \sin n\zeta \tag{5.1}$$

$$G_n^1 = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(\beta x A(\eta))\cos(\beta y\eta)\frac{A(\eta)}{D(\eta)}\,d\eta \tag{5.2}$$

$$G_n^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x C(\eta)) \cos(\beta y \eta) \frac{C(\eta)}{D(\eta)} d\eta \tag{5.3}$$

$$D(\eta) = \sqrt{(\eta^2 + \gamma_n^2)^2 + 4\eta^2}, \quad 2A(\eta)^2 = D(\eta) - \eta^2 - \gamma_n^2$$
$$2C^2(\eta) = D(\eta) + \eta^2 + \gamma_n^2, \quad \gamma_n^2 = \varepsilon_n^2 - 1, \quad \varepsilon_n^2 = n/\beta > 1$$

При $\varepsilon_n \to \infty$ равенства (5.2) и (5.3) можно записать в виде [1]

$$G_n^1 = \frac{\beta}{\pi n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{\beta x t}{\sqrt{t^2+1}} \cos nyt \frac{t\,dt}{(t^2+1)^{3/2}} + G_n^3 \tag{5.4}$$

$$G_n^2 = -\pi^{-1} K_0 (n\sqrt{x^2+y^2}) + G_n^4 \tag{5.5}$$

причем для функций G_n^3 и G_n^4 справедливы равномерные оценки

$$|G_n^3| \leqslant C_1 \beta^3 n^{-3} (1 + \beta |x|), \quad |G_n^4| \leqslant C_2 \beta^2 n^{-2} \exp(-x\sqrt{n^2 - \beta^2}) \tag{5.6}$$

Подставляя (5.4) и (5.5) в формулу (5.1), получаем формулу (2.1), где функция G_0 определяется формулой (2.4), для функций G_1 и G_2 справедливы оценки (2.5) и (2.6), а

$$H = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{x\beta t}{\sqrt{t^2+1}} \cos nyt \frac{t\,dt}{(t^2+1)^{3/2}} \tag{5.7}$$

Преобразуем формулу (5.7). В силу четности функции H по переменной y можно считать, что $y \geqslant 0$. Если ввести регулярную в верхней полуплоскости функцию

$$\chi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\tau}}{n} = -\ln(1 - e^{i\tau})$$

то формулу (5.7) можно записать в виде

$$H = -\frac{1}{2\pi\beta} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{x\beta t}{\sqrt{t^2+1}} \frac{\chi(z+yt) + \chi(-z-yt)}{t^2+1} dt \tag{5.8}$$

Воспользуемся известной формулой

$$\cos(x\beta\cos\varphi) = J_0(\beta x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta x) \cos 2k\varphi$$

и подставим в нее выражения

$$\cos\varphi = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \cos 2k\varphi = \operatorname{Re}\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k$$

Формулу (5.8) можно записать в виде

$$H = -\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta x) S_k(y,z), \quad S_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(z+yt) + \chi(-z-yt)}{t^2+1} dt$$

$$S_k(y,z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(z+yt) \frac{(t+i)^{k-1}}{(t-i)^{k+1}} dt, \quad k \geqslant 1$$

Вычисляя интегралы при помощи теории вычетов, получаем формулы (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М.* Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровности дна потоком стратифицированной жидкости Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 86—94.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
3. *Miles J., Huppert H.* Lee waves in a stratified flow. Pt 4. Perturbation approximations // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. Pt 3. P. 497—525.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
1.VI.1989