Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 533.601

А. В. Латышев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КЕЙЗА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО БГК УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТЕМПЕРАТУРНОМ СКАЧКЕ

Рассматривается задача о скачке температуры в разреженном газе, занимающем полупространство, с заданным градиентом температуры на бесконечности. Методом Кейза найдены собственные векторы и собственные значения соответствующего оператора переноса. Теорема о полноте семейства собственных векторов доказывается путем решения векторной задачи Римана — Гильберта с матричным коэффициентом. Матрица, приводящая коэффициент краевой задачи к диагональному виду, аналитична в комплексной плоскости с двумя разрезами, соединяющими две пары точек ветвления этой матрицы. Этот факт требует решения дополнительной краевой задачи на разрезах, при помощи которой строится фундаментальная матрица. С использованием этой матрицы строится решение задачи и в качестве приложения получена точная формула для вычисления скачка температуры в квадратурах.

Метод Кейза [1] впервые применен [2] в кинетической теории, а в [3] было представлено аналитическое решение задачи о скачке температуры для БГК-уравнения Больцмана. Однако векторы $\tilde{u}$ и $\tilde{w}$ из [3] имеют различные предельные значения сверху и снизу в точке z_0 на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$. Поэтому решение [3] следует считать некорректным.

На основании результатов работы [3] построена [4] каноническая матрица в краевой задаче Римана — Гильберта. Было дано [5], хотя и приближенное, но «высокоточное» (по выражению авторов) численное значение величины температурного скачка.

Библиография по данной задаче приведена в работах [3—5], построена [1] теория точных решений векторных линеаризованных кинетических уравнений вида

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Sigma \Psi(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) K(\mu, \mu') \Psi(x, \mu') \, d\mu'$$

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N), \quad \Psi(x, \mu) = (\psi_1(x, \mu), \ldots, \psi_N(x, \mu))^T$$

где Σ — диагональная матрица переноса, $K(\mu, \mu')$ — $(N \times N)$-матрица, $\Psi(x, \mu)$ — неизвестный вектор.

Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство $x > 0$ и вдали от плоскости $x = 0$ в газе поддерживается стационарное температурное поле

$$T(x) = T_0 (1 + kx) \quad (x \to \infty)$$

Опуская подробности, известные по работам [3—5], сведем задачу о скачке температуры к решению векторного уравнения с граничными условиями

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} Z(x, \mu) + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) K(\mu') Z(x, \mu') \, d\mu' \tag{1}$$

$$Z(0, \mu) = A\mu \begin{Vmatrix} -1 \\ 1/\gamma \end{Vmatrix} + \varepsilon_n \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} (\mu > 0), \quad Z(\infty, \mu) = \varepsilon_T \begin{Vmatrix} -1 \\ 1/\gamma \end{Vmatrix} \tag{2}$$

[1] *Латышев А. В.* Точные решения и приложения кинетических модельных уравнений Больцмана. М., 1988. 194 с.— Деп. в ВИНИТИ 28 августа 1988 г., № 7208 — В 88.

Здесь

$$K(\mu)=\begin{Vmatrix}1 & \varkappa\\ \varkappa & \gamma^2+\varkappa^2\end{Vmatrix},\quad \varkappa=\gamma\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right),\quad \gamma^2=\frac{2}{3}$$

$$A=\frac{3lk}{\sqrt{\pi}},\quad \varepsilon_T=\frac{T_0-T_w}{T_w}$$

(ε_T — искомая величина скачка температуры, T_w — температура стенки, $Z(x,\mu)$ — вектор-столбец).

Если искать решение уравнения (1) в виде

$$Z(x,\mu)=\exp(-x/\eta)\,F(\eta,\mu) \tag{3}$$

получим после длительных преобразований, которые здесь опускаются, характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\,F(\eta,\mu)=\eta\Delta(\eta)\,B(\eta) \tag{4}$$

$$B(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\,F(\eta,\mu)\,d\mu,\qquad \Delta(\eta)=\frac{1}{\eta^2-3}\begin{Vmatrix}-3 & -\gamma(\eta^2-{}^3/_2)\\ 1/\gamma & \eta^2-{}^5/_2\end{Vmatrix} \tag{5}$$

($B(\eta)$ — нормировочный неособый вектор).

Из уравнения (4) находим обобщенные собственные векторы непрерывного спектра, который заполняет всю числовую ось

$$F(\eta,\mu)=[\eta P(\eta-\mu)^{-1}+\omega(\eta)\,\delta(\eta-\mu)]\,\Delta(\eta)\,B(\eta) \tag{6}$$

Символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла по Коши, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\omega(\eta)$ — скалярная функция, определяемая из условий нормировки (5).

Подставляя (6) в первое соотношение (5), приходим к уравнению

$$[\Lambda(\eta)-\exp(-\eta^2)\,\omega(\eta)\,\Delta(\eta)]\,B(\eta)=0 \tag{7}$$

$$\Lambda(z)=\sqrt{\pi}\,I+zt(z)\,\Delta(z),\quad t(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-x^2)}{x-z}\,dx$$

где $\Lambda(z)$ — дисперсионная матрица, I — единичная матрица второго порядка.

Уравнение (7) означает, что определитель матрицы, соответствующей выражению в квадратных скобках в (7), равен нулю, что дает квадратное уравнение относительно $\omega(\eta)$, имеющее, следовательно, два решения: $\omega_1(\eta)$ и $\omega_2(\eta)$. Таким образом, формула (6) содержит два собственных вектора, которые при помощи (7) запишутся в форме

$$F_\alpha(\eta,\mu)=[\eta P(\eta-\mu)^{-1}I+\exp(\eta^2)\,\Omega(\eta)\,\delta(\eta-\mu)]\,M_\alpha(\eta),\quad \alpha=1,2 \tag{8}$$

$$\Omega(z)=\Lambda(z)\,\Delta^{-1}(z),\quad M_\alpha(\eta)=\Delta(\eta)\,B_\alpha(\eta) \tag{9}$$

причем $B_\alpha(\eta)$ — нормировочный вектор, определенный первой формулой (5) при подстановке в правую часть вектора $F_\alpha(\eta,\mu)$.

Введем теперь дисперсионную функцию $\lambda(z)=\det\Lambda(z)$, при помощи которой можно убедиться, что дискретный спектр характеристического уравнения содержит двойную точку $\eta_i=\infty$, которой отвечают два решения уравнения (1):

$$Z_+(x,\mu)=\begin{Vmatrix}a_1\\ a_2\end{Vmatrix},\quad Z_-(x,\mu)=(\mu-x)\,Z_+(x,\mu) \tag{10}$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, причем, в силу второго граничного условия (2) лишь первый вектор (10) участвует в разложении решения уравнения (1) по собственным векторам характеристического уравнения (4).

Теорема 1. Уравнение (1) с граничными условиями (2) имеет единственное решение, представимое в виде разложения

$$Z(x,\mu)=\varepsilon_T\left\|\begin{matrix}-1\\ 1/\gamma\end{matrix}\right\|+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)a_\alpha(\eta)F_\alpha(\eta,\mu)\,d\eta \qquad (11)$$

т. е. скалярные коэффициенты ε_T и a_α (η) $(\alpha=1,\,2)$ этого разложения определяются однозначно.

Теорема 1 означает, что собственные векторы (8) и (10) образуют полное семейство, или базис.

Доказательство. Согласно граничным условиям (2) из разложения (11) получим интегральное уравнение

$$A\mu\left\|\begin{matrix}-1\\ 1/\gamma\end{matrix}\right\|+\varepsilon_n\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|=\varepsilon_T\left\|\begin{matrix}-1\\ 1/\gamma\end{matrix}\right\|+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^\infty a_\alpha(\eta)F_\alpha(\eta,\mu)\,d\eta \qquad (12)$$

Для доказательства теоремы докажем существование и единственность коэффициентов разложения (12), причем коэффициент ε_T, имеющий смысл скачка температуры, вычислим в явном виде.

Подставим собственные векторы (8) в разложение (12). Получим векторное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\Psi(\mu)=\int_0^\infty \frac{\eta A(\eta)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)\,\Omega(\mu)\,A(\mu) \qquad (13)$$

где было положено

$$\Psi(\mu)=(A\mu-\varepsilon_T)\left\|\begin{matrix}-1\\ 1/\gamma\end{matrix}\right\|+\varepsilon_n\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|$$

и введен новый неизвестный вектор

$$A(\eta)=\sum_{\alpha=1}^{2}a_\alpha(\eta)\,M_\alpha(\eta) \qquad (14)$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\eta A(\eta)}{\eta-z}\,d\eta \qquad (15)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$. Используя граничные значения сверху и снизу на $\mathbb{R}_+$ матрицы (9) и вектора (15), сведем уравнение (13) к векторной краевой задаче Римана — Гильберта с матричным коэффициентом:

$$\Omega^+(\mu)\,(2\pi iN^+(\mu)-\Psi(\mu))=\Omega^-(\mu)\,(2\pi iN^-(\mu)-\Psi(\mu)) \qquad (16)$$

Здесь и всюду далее $\mu\in\mathbb{R}_+$.

Построим для этой задачи фундаментальную матрицу-функцию, т. е. такую аналитическую и невырожденную в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\mathbb{R}_+$ матрицу X (z), чтобы на берегах этого разреза выполнялась факторизация коэффициента задачи:

$$\Omega^+(\mu)\,X^+(\mu)=\Omega^-(\mu)\,X^-(\mu) \qquad (17)$$

Будем искать фундаментальную матрицу в виде произведения

$$X(z)=S(z)\,U^{-1}(z)\,S^{-1}(z),\quad U(z)=\operatorname{diag}\{U_1(z),\,U_2(z)\} \qquad (18)$$

где U (z) — новая неизвестная диагональная матрица, а S (z) — матрица, приводящая к диагональному виду м атрицу Ω (z). Непосредственные выкладки показывают, что такая матрица существует:

$$S(z) = \begin{Vmatrix} z^2 + {}^1/_2 + R(z) & z^2 + {}^1/_2 - R(z) \\ -3\gamma & -3\gamma \end{Vmatrix}$$

$$R(z) = \sqrt{w(z)}, \quad w(z) = z^4 - 3z^2 + 25/4$$

Матрицу $S(z)$ будем рассматривать как однозначную аналитическую матрицу-функцию в плоскости с разрезом $\Gamma = [-\bar{a}, a] \cup [-a, \bar{a}]$, где $\pm a$, $\pm\bar{a}$ — нули полинома $w(z)$, причем $a = \sqrt{2} + i/\sqrt{2}$. Вычисляя элементы диагональной матрицы

$$D(z) = S^{-1}(z)\,\Omega(z)\,S(z) = \operatorname{diag}\{D_1(z), D_2(z)\}$$

находим

$$D_\alpha(z) = zt(z) + {}^1/_4\sqrt{\pi}\,(11/2 - z^2 \mp R(z)) \quad (\alpha = 1, 2)$$

причем здесь и далее значению $\alpha = 1$ соответствует верхний знак, а $\alpha = 2$ — нижний.

Теперь задача факторизации (18) эквивалентна системе двух матричных краевых задач, одна из которых рассматривается на основном разрезе:

$$D^+(\mu)\,[U^+(\mu)]^{-1} = D^-(\mu)\,[U^-(\mu)]^{-1} \tag{19}$$

а вторая — на дополнительном разрезе:

$$U^+(\tau)\,T = TU^-(\tau) \quad (\tau \in \Gamma) \tag{20}$$

$$T = [S^+(\tau)]^{-1} S^-(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Запишем задачи (19) и (20) в виде двух систем краевых задач:

$$U_\alpha^+(\mu) = \frac{D_\alpha^+(\mu)}{D_\alpha^-(\mu)}\,U_\alpha^-(\mu) \quad (\alpha = 1, 2) \tag{21}$$

$$U_1^\pm(\tau) = U_2^\mp(\tau) \quad (\tau \in \Gamma) \tag{22}$$

Пусть $\theta_\alpha(\mu)$ — главное значение аргумента функции

$$D_\alpha^+(\mu) = D_\alpha(\mu) + \pi i\mu \exp(-\mu^2)$$

Видно, что

$$\theta_\alpha(\mu) = \begin{cases} \theta_\alpha^{(0)}(\mu), & 0 \leqslant \mu \leqslant x_\alpha \\ \pi + \theta_\alpha^{(0)}(\mu), & x_\alpha < \mu < \infty \end{cases}$$

$$\theta_\alpha^{(0)}(x) = \operatorname{arctg}(\pi x \exp(-x^2)/D_\alpha(x))$$

где x_α — нуль функции $D_\alpha(x)$.

Чтобы получить решение $\{U_1, U_2\}$ задач (21) и (22), рассматриваемых на основном и дополнительном разрезах, перейдем после очевидных преобразований от задач (21) и (22) к следующим двум краевым задачам, определенным лишь на основном разрезе:

$$\ln(U_1U_2)^+ - \ln(U_1U_2)^- = 2ia(\mu) \tag{23}$$

$$\frac{1}{R(\mu)} \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^+ - \frac{1}{R(\mu)} \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^- = 2i\,\frac{b(\mu)}{R(\mu)} \tag{24}$$

$$a(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x) - 2\pi$$

$$b(x) = \theta_1(x) - \theta_2(x)$$

Система краевых задач (23) и (24) решается уже стандартно и ее решение имеет вид

$$U_\alpha^{(*)}(z) = \exp\left[A(z) \pm R(z)\,B(z)\right] \quad (\alpha = 1, 2) \tag{25}$$

$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{a(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \quad B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{b(\tau)\,d\tau}{R(\tau)(\tau - z)}$$

Недостаток этого решения состоит в наличии существенной особенности в бесконечности. Чтобы погасить эту особенность, ищем $U_\alpha(z)$ в виде

$$U_1(z) = U_1^{(*)}(z)\,\varphi(z), \quad U_2(z) = U_2^{(*)}(z)/\varphi(z) \tag{26}$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая вне Γ (с существенной особенностью в бесконечности). При этом краевое условие (21) выполняется автоматически, а краевое условие (22) будет выполнено тогда и только тогда, когда на

$$\varphi^+(\tau) = 1/\varphi^-(\tau)$$

Возьмем $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \exp\left(-R(z)\int_0^{\mu_0} \frac{d\mu}{R(\mu)(\mu - z)}\right)$$

При любом выборе $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ эта функция $\varphi(z)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, так что пара $\{U_1, U_2\}$ будет решением задач (21) и (22).

Чтобы функции $U_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, 2)$ не имели существенной особенности в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{b(x)\,dx}{R(x)} = \int_0^{\mu_0} \frac{dx}{R(x)} \tag{27}$$

Задача (27) является частным случаем проблемы обращения Якоби.

Заметим, что функция $U_1(z)$ имеет нуль второго порядка в точке $z = 0$ и полюс первого порядка в точке μ_0. Функция $U_2(z)$ имеет нуль первого порядка в точке μ_0. Заметим, что матрица $X(z)$ аналитична в нулях полинома $w(z)$ и $\det X(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Итак, фундаментальная матрица $X(z)$ построена.

Вернемся к задаче (16), которая при помощи (17) преобразуется к однородной векторной краевой задаче с матричным коэффициентом

$$[X^+(\mu)]^{-1}(2\pi i N^+(\mu) - \Psi(\mu)) = [X^-(\mu)]^{-1}(2\pi i N^-(\mu) - \Psi(\mu)) \tag{28}$$

Учитывая поведение на бесконечности и в точке μ_0 входящих в (28) векторов и матриц, получим общее решение этой задачи

$$2\pi i N(z) = (Az - \varepsilon_T)\begin{Vmatrix} -1 \\ 1/\gamma \end{Vmatrix} + \varepsilon_n \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + X(z)\begin{Vmatrix} \alpha_1 z + \alpha_0 + \dfrac{\alpha_{-1}}{z - \mu_0} \\ \beta_1 z + \beta_0 + \dfrac{\beta_{-1}}{z - \mu_0} \end{Vmatrix} \tag{29}$$

где α_i и β_i $(i = -1, 0, 1)$ — постоянные. Чтобы сделать это решение корректным, т. е. чтобы этот вектор на бесконечности вел себя так же, как и вектор (15), и не имел особенностей в конечных точках, приравняем нулю коэффициенты при z и при z^0 в разложениях элементов столбца (29) и потребуем, чтобы $N(z)$ не имел двойных полюсов в точке $z = 0$ и в точке μ_0. В результате найдем α_i, β_i, ε_n и ε_T, причем

$$\varepsilon_T = -\frac{3lk}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left[a(x) - x^2\frac{b(x)}{R(x)}\right]dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\mu_0}\frac{x^2\,dx}{R(x)} + \mu_0 + 2\mu_0\frac{\gamma^2 + \gamma\beta\mu_0 - \alpha^2}{(\gamma-\alpha)^2}\right\} \qquad (30)$$

$$\alpha = -{}^1\!/_2\gamma\,[R(\mu_0) + \mu_0^2 + {}^1\!/_2], \quad \beta = -\gamma\mu_0\,(1 + (\mu_0^2 - {}^3\!/_2)/R(\mu_0))$$

После того как вектор $N(z)$ построен, коэффициенты $a_\alpha(\mu)$ определяются однозначно из формулы Сохоцкого $N^+(\mu) - N^-(\mu) = \mu A(\mu)$.

Теорема 1 полностью доказана.

Таким образом, теорема 1 представляет в виде (11) решение интегро-дифференциального уравнения (1), описывающего скачок температуры в разреженном газе. Формула (30) дает искомую величину температурного скачка.

Сделаем несколько замечаний к методу решения и трудностям, которые пришлось преодолеть при решении уравнения (1). Дело в том, что методы решения векторной краевой задачи с матричным коэффициентом, когда диагонализирующая коэффициент задачи матрица $S(z)$ имеет точки ветвления, еще не описаны в монографической литературе. Кроме того, значительные аналитические усилия здесь требуются для того, чтобы получить решение матричных краевых задач (19) и (20), определенных на основном и двух дополнительных разрезах. Решение основной и дополнительной краевых задач содержит существенную особенность в бесконечности, для устранения которой вводится задача (27), являющаяся частным случаем проблемы обращения Якоби.

Предложенный здесь метод может быть использован при решении различных граничных задач кинетической теории, где используется уравнение Больцмана с БГК-оператором столкновений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Case K. M.* Elementary solutions of the Transport equation and their applications // Ann. Phys. 1960. V. 9. № 1. P. 1—23.
2. *Cereignani C.* Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip-flow // Ann. Phys. 1962. V. 20. № 2. P. 219—233.
3. *Cereignani C.* Analytic solution of the temperature jump problem for the BGK model // Trans. Theory and Stat. Phys. 1977. V. 6. № 1. P. 29—56.
4. *Siewert C. E., Kelly C. T.* An analytical solution to a matrix Riemann — Hilbert problem // Z. angew. Math. Phys. 1980. V. 31. № 3. P. 344—351.
5. *Kriese J. T., Chang T. S., Siewert C. E.* Elementary solutions of coupled model equations in the kinetic theory of gases // Int. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 6. P. 441—470.

Пушкино
Московская обл.

Поступила в редакцию
5.V.1989