

УДК 533.69:532.5

© 1990 г.

А. М. Елизаров, Е. В. Федоров

ОПТИМИЗАЦИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Формулируются и решаются вариационные задачи о форме непроницаемых крыловых профилей максимальной подъемной силы, минимального профильного сопротивления и максимального аэродинамического качества, имеющих заданный периметр контура, одну острую кромку с фиксированным углом и обтекаемых безотрывно плоским установившимся потоком несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Строятся функционалы, минимизация которых эквивалентна оптимизации указанных характеристик. Проводится анализ существования и единственности экстремальных точек. Даются примеры оптимизированных профилей. При решении вариационных задач вслед за [1] используется идея конструирования такого оператора, действующего на функции заданного множества, что каждой функции соответствует искомый объект с нужными свойствами (в данном случае однолиственный профиль, ограниченный замкнутым кусочно-ляпуновским контуром).

Один из подходов к аэродинамической оптимизации профилей основан на решении прямых краевых задач аэрогидродинамики. При этом задается многопараметрическое семейство контуров определенного типа для модификации некоторого исходного контура. Для каждого профиля рассчитываются аэродинамические характеристики, а их оптимизация проводится за счет выбора значений свободных параметров при ограничениях, выражающих условия физической и конструктивной реализуемости получаемого решения (например, [2], п. 6). Такой подход дает возможность автоматически учитывать изменения величин нерасчетных параметров за счет включения их в систему ограничений задачи и позволяет найти оптимальный профиль в специальном классе, что требует специальных способов модификации исходного контура.

Другой подход к оптимизации аэродинамических форм базируется на теории обратных краевых задач (ОКЗ) для аналитических функций [3—5], позволяющей решать задачи построения крыловых профилей и их решеток в несжимаемой жидкости, в дозвуковом потоке газа и в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Основная ОКЗ аэрогидродинамики, наиболее полно исследованная для случая идеальной несжимаемой жидкости [3, 6], заключается в нахождении формы непроницаемого крылового профиля по заданному вдоль его контура распределению $v(s)$ скорости потока (s — дуговая абсцисса) при известной величине v_∞ скорости невозмущенного течения. Если функция $v(s)$ интегрируема, то решение этой задачи в классе областей В. И. Смирнова (например, [7], с. 250) единственно и имеет интегральное представление, связанное с конформным отображением области $E^- = \{\zeta: |\zeta| > 1\}$ на внешность искомого профиля. При различных $v(s)$ это представление позволяет исчерпать класс областей В. И. Смирнова, который весьма обширен и содержит области со спрямляемыми границами (гладкость граничных кривых обеспечивается дополнительными ограничениями на $v(s)$).

Один из способов оптимизации формы профилей на основе решения ОКЗ состоит в оптимальном выборе $v(s)$. При проектировании высоконесущих профилей он был реализован в ряде работ (см. библиографию в [8]) за счет оптимального выбора параметров исходного многопараметрического семейства $v(s)$, построенного с учетом условий гидродинамической целесообразности. Однако произвольному распределению скорости может соответствовать профиль, ограниченный разомкнутым контуром, что будет означать физическую нереализуемость решения. Поэтому основная ОКЗ аэрогидродинамики является некорректной, и для получения ее решения в нужном классе необходимо применять методы регуляризации (см. [9]), что ограничивает рамки применимости описанного способа.

Другой способ оптимизации методами ОКЗ, развиваемый ниже, базируется на идее М. А. Лаврентьева задания множества допустимых решений как образа некоторого множества функций при действии специального оператора. На ее основе была решена [1] вариационная задача о дуге максимальной подъемной силы, заданной длины и ограниченной кривизны, обтекаемой плавно идеальной несжимаемой жидкостью. В данной работе указанная идея применяется при задании множества профилей, ограниченных дугами Ляпунова. Соответствующий оператор построен на основе интегрального представления решения основной ОКЗ аэрогидродинамики, а оптимизируемые характеристики выражены в виде функционалов на множестве функций, удовлетворяющих условиям разрешимости ОКЗ и общему критерию безотрывности. Минимизация функционалов осуществлена численно. В задаче построения профиля с максимальной подъемной силой исследованы вопросы существования и единственности ее решения.

Отметим, что задача оптимизации формы профиля с учетом условий, обеспечивающих безотрывность обтекания большей его части, упомянута в [1], а в [10] при ее численном решении в качестве упрощенного условия безотрывности взято ограничение на градиент давления.

1. Постановка вариационных задач. В плоский безграничный установившийся поток несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса помещен непроницаемый крыловой профиль, ограниченный замкнутым контуром L_z длины L . Скорость потока на бесконечности параллельна оси абсцисс выбранной системы координат, а ее величина v_∞ и плотность ρ жидкости известны.

Зададим класс контуров L_z . Будем считать L_z образами единичной окружности при конформных отображениях $z = z(\zeta)$, $\zeta \in E^-$, $z(\infty) = \infty$, имеющих представление

$$z'(\zeta) = (1 - \zeta^{-1})^{\varepsilon-1} z_0'(\zeta), \quad \zeta \in E^-; \quad 1 \leq \varepsilon \leq 2, \quad z_0'(\zeta) \neq 0$$

причем существуют предельные значения

$$\ln |z_0'(e^{i\theta})| = a_0 + p(\theta), \quad a_0 = \text{const}$$

Будем предполагать, что функция $p(\theta)$ удовлетворяет условию Гельдера $H(K_0, \lambda)$ с постоянными $0 < K_0 < \infty$ и $0 < \lambda \leq 1$, причем

$$J_0(p) \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 0 \quad (1.1)$$

Задавая произвольно функцию $p(\theta)$, удовлетворяющую указанным ограничениям, восстановим $\ln z'(\zeta)$ оператором Шварца с плотностью $g(\theta) = a_0 + p(\theta) + h(\theta)$, где $h(\theta) = (\varepsilon - 1) \ln [2 \sin(\theta/2)]$, и, следовательно, найдем

$$z(\zeta) = \int_1^\zeta e^{-i\alpha} \exp \left(- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta \right) d\zeta \quad (1.2)$$

где α — некоторая постоянная, характеризующая ориентацию относительно набегающего потока профилей, ограниченных контурами L_z . Взяв в (1.2) граничные значения при $\zeta = e^{i\gamma}$, получим параметрические уравнения кусочно-ляпуновского контура L_z , имеющего самое большее одну острую кромку в точке $z = 0$ с фиксированным углом $\varepsilon\pi$, $1 \leq \varepsilon \leq 2$, внутренним к области течения. Как и в [3, 6], контур L_z будет замкнутым лишь при выполнении условий

$$J_1(p) + iJ_2(p) \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta) e^{i\theta} d\theta - \pi(\varepsilon - 1) = 0 \quad (1.3)$$

Следовательно, (1.1) и (1.3) необходимы для получения L_z из заданного класса.

В силу произвольности α контуры L_z определяются с точностью до вращения около начала координат. Обратно, для любой области, ограниченной кусочно-ляпуновским контуром указанного типа (подчеркнем, что все контуры этого типа проходят через точку $z = 0$ и имеют в этой точке при $\varepsilon > 1$ острую кромку), конформное отображение $z(\zeta)$ в силу выбора нормировки ($z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$), как известно [7], имеет вид (1.2), причем величина α будет принимать вполне определенное значение. Считая L_z заданным с точностью до вращения около начала координат, можно получить желаемое значение α . Таким образом, оператор (1.2) дает описание широкого класса профилей из множества профилей с кусочно-гладкими границами.

Отметим, что величина α в (1.2) имеет вполне определенный физический смысл: она характеризует отклонение профиля от направления обтекания с нулевой подъемной силой. В дальнейшем считаем $\alpha > 0$ (это условие выражает требование положительности подъемной силы) и рассмотрим отдельно два случая, когда величина α фиксирована или изменяется в интервале $[0, \pi/2]$. Первый случай соответствует дополнительному ограничению на угол атаки искомого профиля.

Требуется определить такую форму профиля из заданного класса, чтобы при условии безотрывного обтекания он обладал наибольшей подъемной силой (задача 1), наименьшим профильным сопротивлением (задача 2) или максимальным аэродинамическим качеством (задача 3).

2. Условия безотрывности обтекания. При стационарном обтекании крыловых профилей вязкой жидкостью при реально больших числах Рейнольдса типична схема течения с тонким пограничным слоем и следом. Для расчета такого течения рассматривают модельный внешний потенциальный поток около полубесконечного тела вытеснения, которое отличается от исходного профиля на малую толщину вытеснения δ^* и продолжается в следе в виде тонкой полосы, причем распределение скорости на контуре полутела совпадает с распределением скорости на контуре профиля. С учетом малости δ^* на профиле и в следе в качестве внешнего потока приближенно рассматривают сплошное потенциальное обтекание заданного профиля идеальной жидкостью. Отсутствие отрыва жидкости гарантируется условием [11]

$$(-1)^j [v(s)]^{-1} v'(s) \delta^{**}(s) \leq F(R^{**}), \quad R^{**} = v(s) \delta^{**}(s) / \nu \quad (2.1)$$

(ν — кинематический коэффициент вязкости, $\delta^{**}(s)$ — толщина потери импульса, $F(R^{**})$ — функция, зависящая от режима течения, $j = 1$ для верхней поверхности профиля, $j = 2$ — для нижней). В частности, $F(R^{**}) = \mu_1 / R^{**}$ для ламинарного, $F(R^{**}) = \mu_2$ или

$$F(R^{**}) = \mu_3 R^{** - 1/m} \quad (2.2)$$

для турбулентного пограничных слоев, где μ_1 , μ_2 , μ_3 , m — известные эмпирические постоянные. Из уравнения импульсов для турбулентного пограничного слоя (например, [4], с. 398) выводим

$$\delta^{**}(s) = A \frac{|v(s)|}{v'(s)} f(s) R^{** - 1/m}, \quad f(s) = a \frac{v'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_*}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \quad (2.3)$$

$$a = (m + 1)/m, \quad b = 2(4m + 1)/(2m - 1)$$

где $A = A(m)$ — постоянная, зависящая от выбора m [4], s_* — дуговая абсцисса точки разветвления потока. Выбирая в (2.1) функцию F в виде (2.2) и используя (2.3), получим следующий критерий безотрывности тур-

булентного пограничного слоя (см. также [9]):

$$f(s) \geq f_*, \quad f_* > f_0 = -\mu_3/A \quad (2.4)$$

где $a = 1,25$, $b = 4,85$, $f_0 = -5,57 \dots -4,77$ по Прандтлю — Бури, $a = 1,17$, $b = 4,55$, $f_0 = -3 \dots -2$ по Л. Г. Лойцянскому, $a = 1$, $b = 4$, $f_0 = -0,8 \dots -0,7$ по Г. М. Бам-Зеликовичу. Отметим, что (2.4) дает условие безотрывности и по методу Кочина — Лойцянского ([12], § 128), причем $a = 1,17$, $b = 4,75$, $f_0 = -6$ и $a = 0,45$, $b = 5,35$, $f_0 = -0,0681$ соответственно для турбулентного и ламинарного пограничных слоев.

3. Максимизация подъемной силы. Существование и единственность решения. В соответствии с гипотезой Жуковского — Чаплыгина при $1 < \varepsilon \leq 2$ острая кромка является точкой схода потока, а результатом его воздействия на профиль будет подъемная сила величины $P = \rho v_\infty \Gamma$, где Γ — циркуляция скорости. При $\varepsilon = 1$ контур профиля будет гладким, а для определения Γ зафиксируем в качестве точки схода потока точку $z(1)$. Отметим, что функции $z(\zeta)$ устанавливают соответствие потоков, обтекающих искомые профили и единичный круг, причем обтекание круга происходит под углом атаки α , а точкой схода служит $\zeta = 1$.

Пусть $w(z)$ — комплексные потенциалы течения в областях D_z , содержащих ∞ и ограниченных контурами L_z . Функции $w(z)$ аналитичны в D_z всюду, за исключением бесконечно-удаленной точки, где они имеют простой полюс и логарифмическую особенность, причем в окрестности ∞

$$w(z) = v_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \quad (3.1)$$

При фиксированных значениях ρ , v_∞ , ε , α задача 1 эквивалентна следующей вариационной ОКЗ: определить область D_z , ограниченную контуром L_z из указанного выше класса, и аналитическую в D_z функцию $w(z)$ вида (3.1), которая удовлетворяет (2.4), где $v(s) = \|dw/dz\|_{L_z}$, и условиям

$$\operatorname{Im} w(z)|_{L_z} = 0, \quad \Phi \equiv \left| \int_{L_z} (dw/dz)^2 dz \right| \rightarrow \max \quad (3.2)$$

Первое соотношение в (3.2) выражает условие непроницаемости L_z , а второе эквивалентно максимизации подъемной силы, так как по теореме Жуковского

$$\Phi = 2v_\infty \Gamma = 2P/\rho = 8\pi v_\infty^2 |z'(\infty)| \sin \alpha \quad (3.3)$$

Сведем рассматриваемую вариационную ОКЗ к задаче вариационного исчисления.

Из условия задания периметра L вытекает равенство

$$\exp a_0 = 2^{1-\varepsilon} \frac{L}{J(p)}, \quad J(p) = \int_0^{2\pi} \sin^{\varepsilon-1} \frac{1}{2} \theta \exp p(\theta) d\theta \quad (3.4)$$

Так как по (1.2) имеем $|z'(\infty)| = \exp a_0$, то в силу (3.3) и (3.4) для максимизации P нужно минимизировать функционал $J(p)$ на допустимых функциях из множества

$$U = \{p(\theta) \in H(K_0, \lambda): J_0(p) = 0, \quad J_1(p) + iJ_2(p) = 0\} \quad (3.5)$$

удовлетворяющих дополнительно условию (2.4).

Исследуем общие свойства $J(p)$.

Теорема 1. Функционал $J(p)$ — строго выпуклый на выпуклом компактном множестве $U \subset L_2[0, 2\pi]$, и, следовательно, задача минимизации $J(p)$ на U однозначно разрешима.

Так как $J(p) \in C^2(U)$, то для строгой выпуклости $J(p)$ необходимо и достаточно выполнение известного критерия $\langle (Jp'') \xi, \xi \rangle > 0$ для всех $0 \neq \xi \in L_2[0, 2\pi]$, $p \in U$, где $\langle (Jp'') \xi, \xi \rangle$ — значение линейного функционала $(Jp'')(\xi)$ на элементе ξ . Имеем

$$\langle (J''p) \xi, \xi \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^{\varepsilon-1} \frac{1}{2} \theta \xi^2(\theta) \exp p(\theta) d\theta > 0$$

Множество U , очевидно, выпукло и ограничено в пространстве гельдеровских функций. Следовательно, U выпукло и компактно в $L_2[0, 2\pi]$.

Рассмотрим задачу минимизации $J(p)$ на линейном подпространстве $U_0 \subset L_2[0, 2\pi]$, определяемом (1.1) и (1.3). Непосредственным применением метода множителей Лагранжа может быть доказана

Теорема 2. Функционал $J(p)$ достигает глобального минимума на U_0 в точке $p_*(\theta) = -(\varepsilon - 1) \ln(2 \sin^{1/2} \theta)$.

При $\varepsilon = 1$ функция $p_*(\theta) \equiv 0 \in U$, $J(p_*) = 2\pi$, $g(\theta) = \ln[L/(2\pi)]$ и максимум подъемной силы достигается при обтекании круга радиуса $L/(2\pi)$.

Пусть $1 < \varepsilon \leq 2$. Тогда $p_*(\theta) \notin U$ и исходная задача эквивалентна наилучшей аппроксимации в $L_2[0, 2\pi]$ функции p_* множеством U .

Теорема 3. Единственным наилучшим приближением в $L_2[0, 2\pi]$ функции $p_*(\theta)$ на множестве U при некотором значении $K_0 = K_0(n)$ является n -й отрезок $S_n p_*$ ряда Фурье функции $p_*(\theta)$ по тригонометрической системе $\{\varphi_k\}$. При этом имеет место неулучшаемая в смысле порядка оценка

$$\| p_*(\theta) - (S_n p_*)(\theta) \|_{\delta, q} \leq C H_q(p_*, \lambda) n^{-(\lambda-\delta)}, \quad 1 \geq \lambda > \delta > 0 \quad (3.6)$$

$$C = C(p_*, \lambda) = \text{const}, \quad q = 2, \quad \| \cdot \|_{\delta, q} = \| \cdot \|_{L_q} + H_q(\cdot, \delta)$$

$$H_q(p_*, \delta) = \begin{cases} \sup_{t \neq 0} (t^{-\delta} \| p_*(\theta + t) - p_*(\theta) \|_{L_q}), & 0 < \delta < 1 \\ \sup_{t \neq 0} (t^{-1} \| p_*(\theta + t) - 2p_*(\theta) + p_*(\theta - t) \|_{L_q}), & \delta = 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим всюду плотное в U множество тригонометрических сумм $c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$, $c_k = \text{const}$. Как известно (например, [13]), единственное наилучшее приближение в $L_2[0, 2\pi]$ функции $p_*(\theta)$ линейными комбинациями указанного вида дает $S_n p_*$. Очевидно, $S_n p_* \in U$ при некотором значении K_0 . Оценку уклонения $\| S_n p_* - p_* \|_{L_2}$ можно получить, используя, например, аппроксимацию в H -пространствах [14]. В частности, банахово пространство H_q^δ , $1 \leq q < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, с нормой $\| \cdot \|_{\delta, q}$ состоит из функций $r(\theta) \in L_q$, удовлетворяющих условию $H_q(r, \delta) < \infty$. В силу критерия принадлежности к H_q^δ из [14] функция $p_*(\theta) \in H_2^\lambda$. Теперь оценка (3.6) следует непосредственно из теоремы 3 в [14].

Итак, функция $S_n p_*$ дает решение задачи на множестве U при некотором значении $K_0 = K_0(n)$; соответствующий $S_n p_*$ профиль имеет острую кромку с углом ε . Из теорем об устойчивости решений ОКЗ [5] следует, что при $n \rightarrow \infty$ этот профиль неограниченно приближается к кругу. Таким образом, полученные результаты дополняют и развивают результаты работы [10].

На U можно накладывать дополнительные ограничения, гарантирующие простоту и определенное геометрическое строение L_2 . Они выражают-

ся в виде достаточных признаков однолиственности [15], которые приводят к ограничениям на K_0 и к сужению U . Построенное таким образом множество U выступает в качестве множества корректности, а поиск в нем наилучшего приближения к $p_*(\theta)$ эквивалентен нахождению квазирешения задачи. Заменяя функцию $p_*(\theta)$ ее наилучшим приближением $S_n p_*$, приходим к задаче, эквивалентной отысканию в U квазирешения внешней ОКЗ [16].

Выразим теперь критерий (2.4) через функцию $p(\theta)$. Можно показать, что условие (2.4) может выполняться на L_z всюду при $\varepsilon = 2$. В дальнейшем будем рассматривать этот случай.

Комплексный потенциал потока, обтекающего круг, имеет вид

$$w(\zeta) = \Gamma(2\pi)^{-1} [(\zeta e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}/\zeta)(2\sin\alpha)^{-1} - i \ln \zeta + \pi + 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha] \quad (3.7)$$

Из (3.7) и (3.1) выводим

$$v[s(\theta)] = \Gamma \cos(1/2\theta - \alpha) \exp[-a_0 - p(\theta)] / (2\pi \sin \alpha) \quad (3.8)$$

причем $v[s(\theta)] > 0$ при $0 < \theta < \pi + 2\alpha$ (на верхней поверхности профиля), $v[s(\theta)] < 0$ при $\pi + 2\alpha < \theta < 2\pi$ (на нижней поверхности). В силу (3.8) в предположении кусочной гладкости $p(\theta)$ имеем

$$\frac{d}{d\theta} \ln |v[s(\theta)]| = G_1(p; \theta) \equiv -p'(\theta) - 1/2 \operatorname{tg}(1/2\theta - \alpha)$$

Следовательно, критерий безотрывности (2.4) в выражении через $p(\theta)$ принимает вид

$$(-1)^j G_1(p; \theta) \geq f_{0j} G_0(p; \theta), \quad f_{0j} \geq f_0, \quad j = 1, 2 \quad (3.9)$$

$$\theta \in [0, \pi + 2\alpha] \text{ при } j = 1, \quad \theta \in [\pi + 2\alpha, 2\pi] \text{ при } j = 2$$

$$G_0(p; \theta) = G_2(p; \theta) \left[a \left| \int_{\pi+2\alpha}^{\theta} G_2(p; \theta) d\theta \right| \right]^{-1}$$

$$G_2(p; \theta) = \sin 1/2\theta |\cos(1/2\theta - \alpha)|^{b-1} \exp[(2-b)p(\theta)]$$

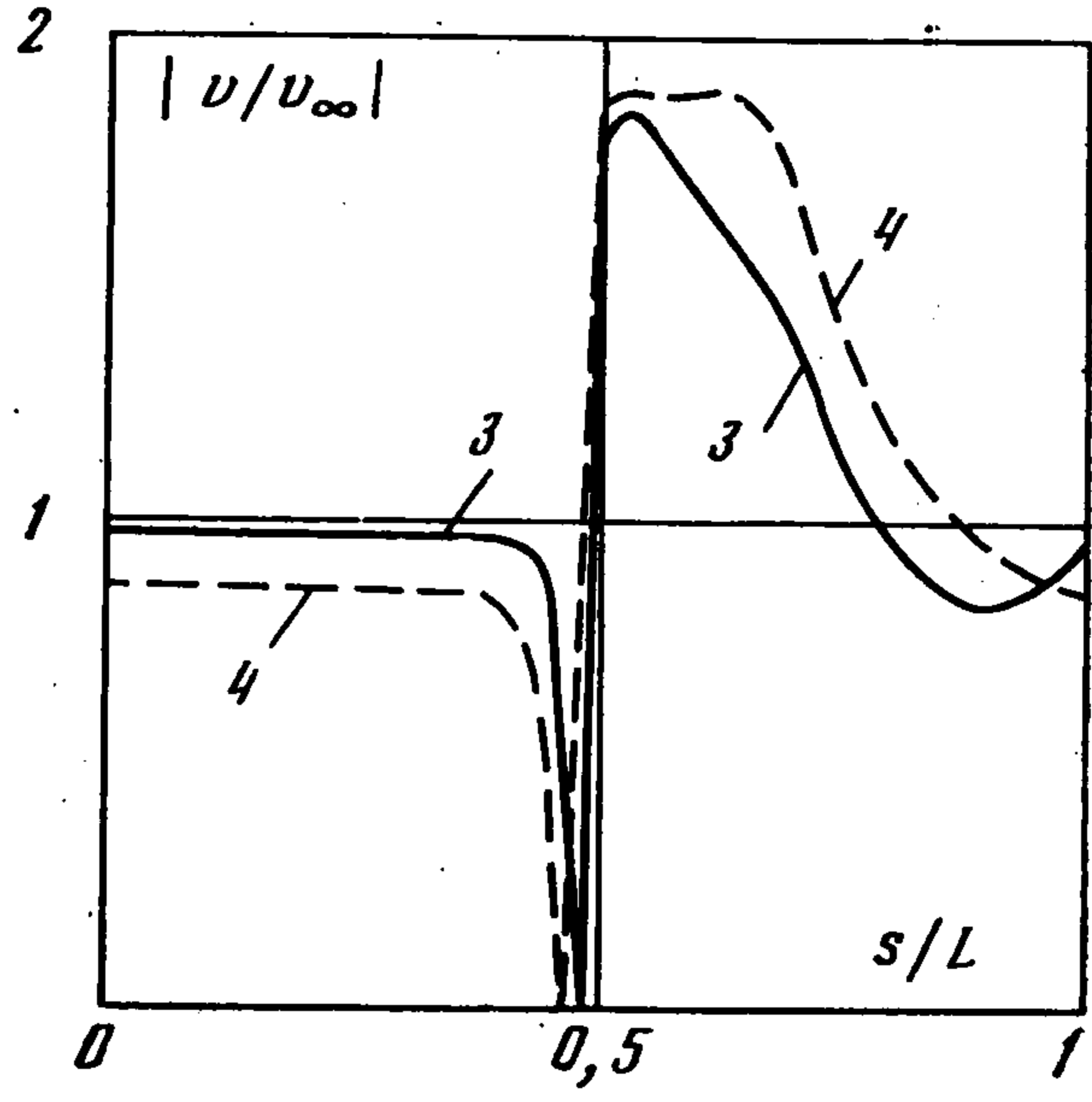
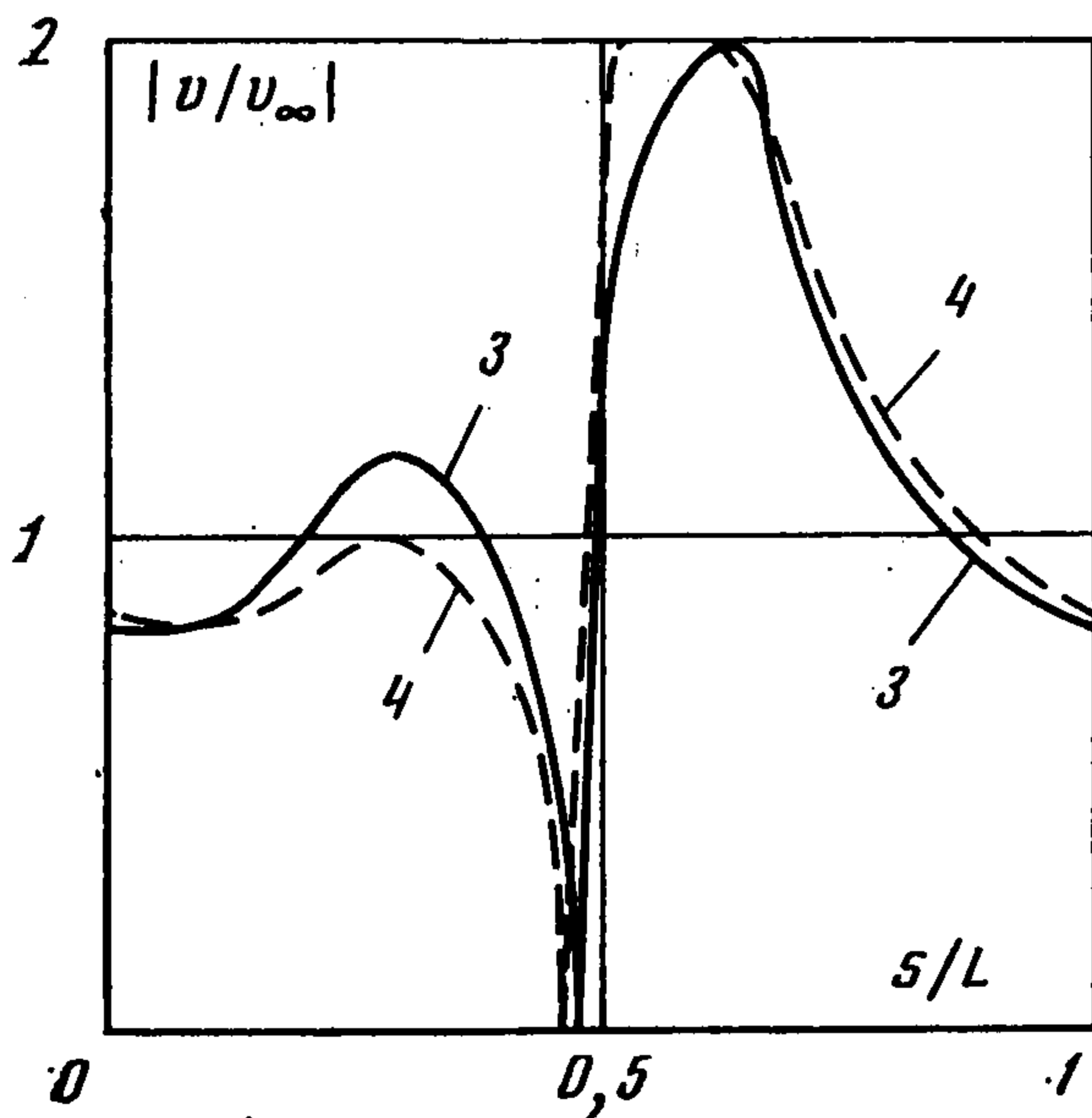
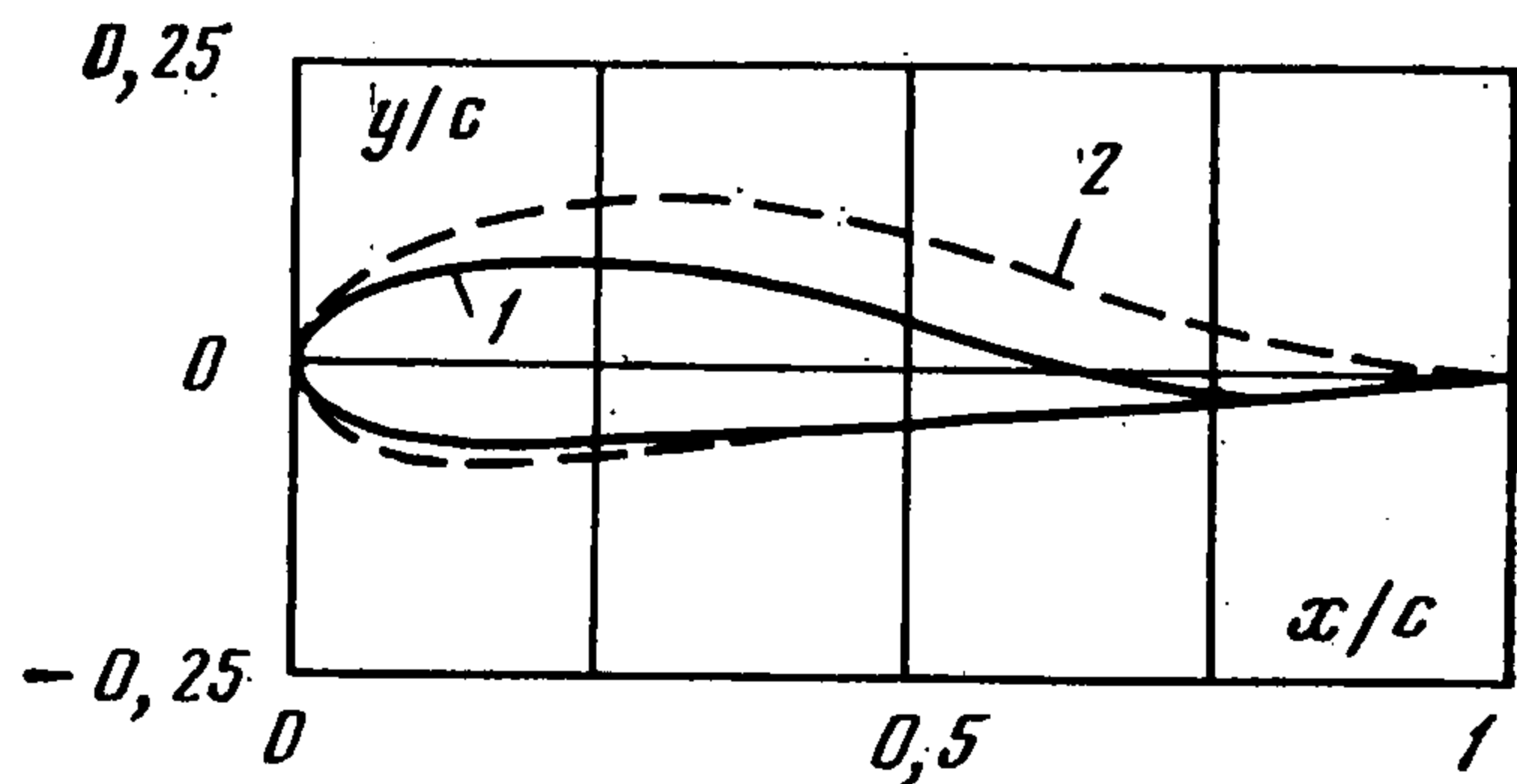
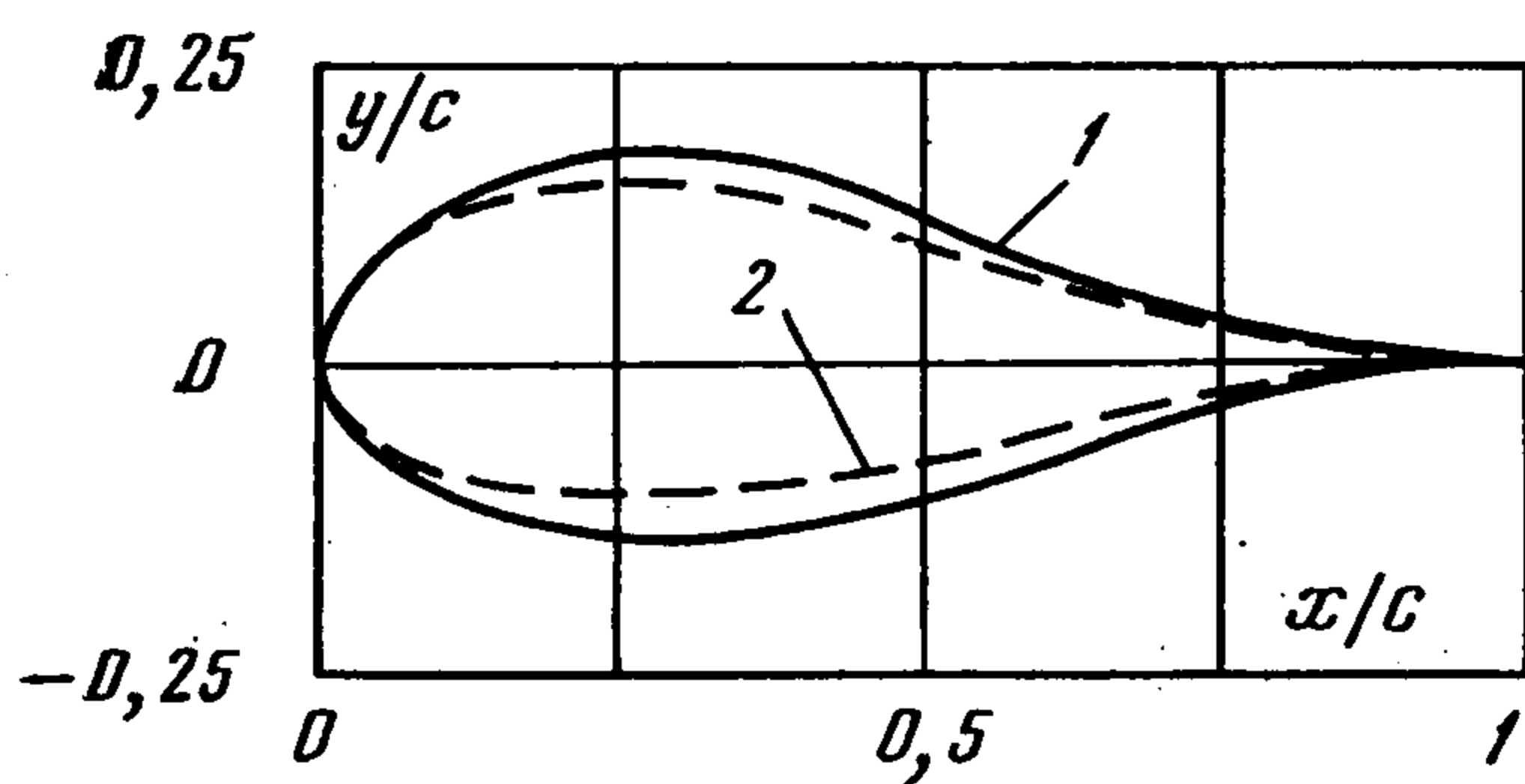
Задача минимизации функционала $J(p)$ на множестве U_1 (U с дополнительными ограничениями (3.9)) решалась численно релаксационным методом, описанным, например, в [17].

На фиг. 1 представлены оптимальные профили, полученные при $\alpha = 0,15(8,6^\circ)$ и $\alpha = 0,2(11,5^\circ)$ (контуры 1 и 2), а также соответствующие им распределения скорости (линии 3 и 4) (система координат xy выбрана так, чтобы хорда профиля лежала на оси x , а передняя кромка совпадала с началом координат). Постоянные a , b и f_0 в (2.4) были выбраны по методу Кочина — Лойцянского для турбулентного пограничного слоя. Безразмерная дуговая координата отнесена к периметру L , безразмерная скорость $v(s)$ — к заданной величине v_∞ , а координаты контуров — к хорде c профилей. Профиль 1 имеет коэффициент подъемной силы $C_y = 1,152$ при угле атаки $\beta = 7,7^\circ$ и относительную толщину $t = 0,318$, а для профиля 2 $C_y = 1,502$, $\beta = 10,7^\circ$, $t = 0,252$.

Ограничение (3.9) весьма сложное, в частности, открытым остается вопрос о выпуклости U_1 . В качестве упрощенных условий безотрывности можно использовать ограничения, определяющие некоторую аппроксимацию множества U_1 . Простейшими из них являются неравенства

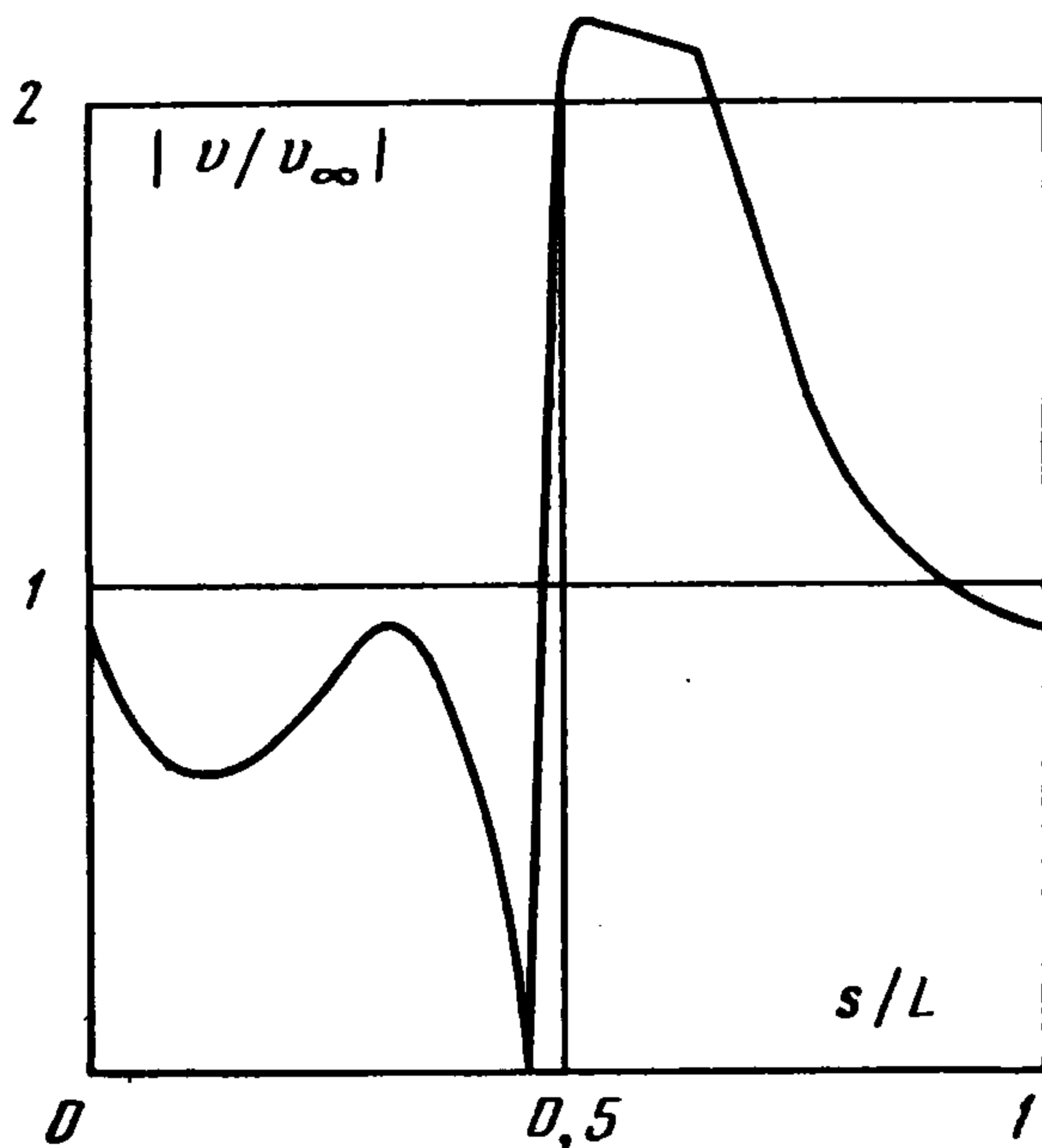
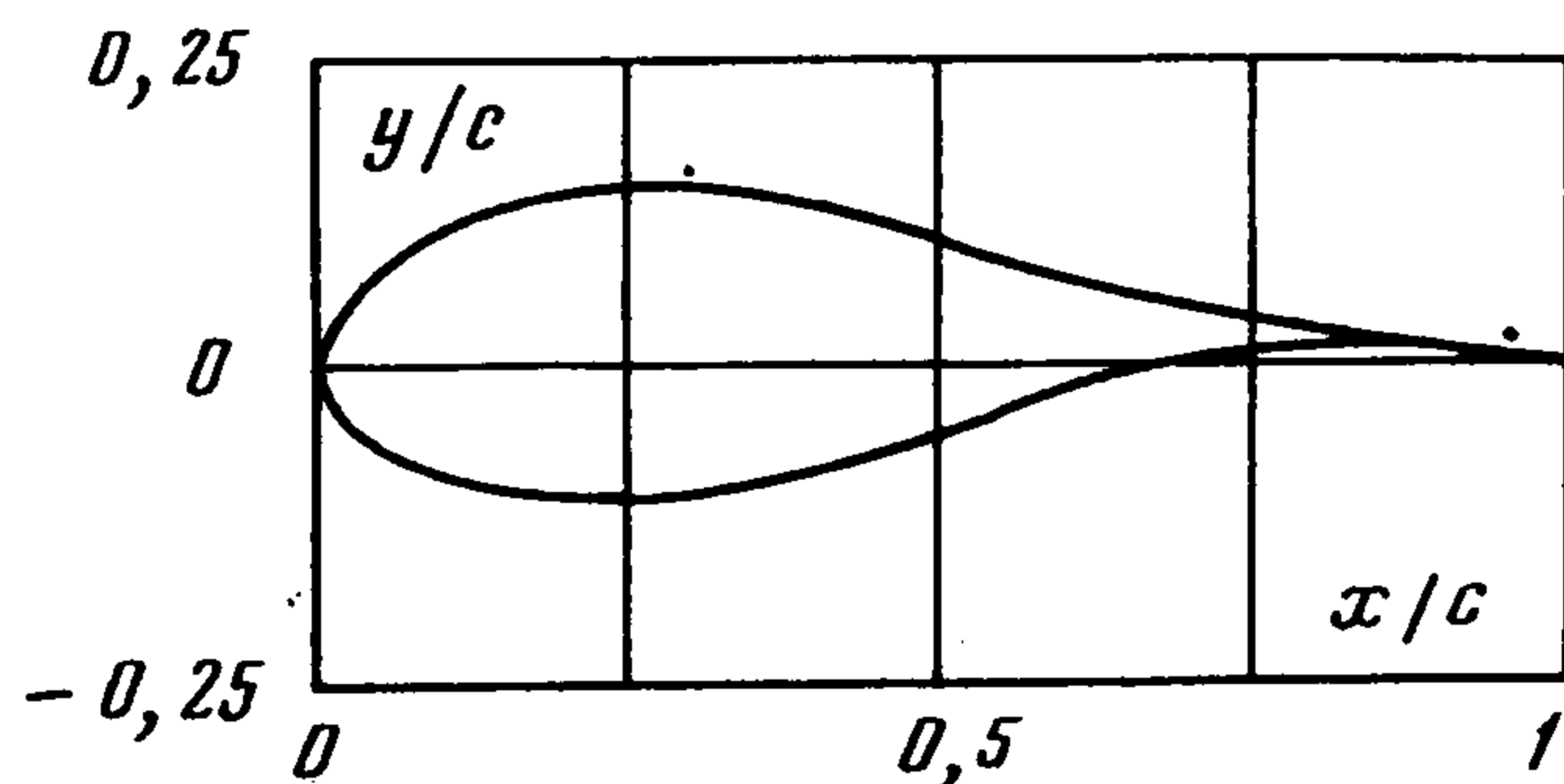
$$(-1)^j G_1(p; \theta) \geq -d_j, \quad j = 1, 2 \quad (3.10)$$

где $d_1, d_2 \geq 0$ — некоторые постоянные. Отметим, что при $d_j = 0$ соотношения (3.10) дают необходимое и достаточное условия монотонности функции $v(s)$ на соответствующих поверхностях профиля и, следовательно, являются точными, если отыскивается решение с монотонным распре-



Фиг. 1

Фиг. 2



Фиг. 3

делением скорости. Ограничения (3.10) сохраняют выпуклость множества допустимых решений (обозначим его U_2) и гарантируют существование и единственность точки минимума функционала $J(p)$ на U_2 .

Опишем способ выбора d_1 и d_2 . Зафиксировав $d_2 = 0$ и решая задачи минимизации $J(p)$ на множестве U_2 при различных d_1 , отыскиваем максимально возможное значение $d_{1\max}$, при котором решение оптимизационной задачи удовлетворяет условию (3.9). Ясно, что для любых $d_1 < d_{1\max}$ нельзя получить экстремальное значение $J(p)$, меньшее чем для $d_1 = d_{1\max}$. Пусть $d_{2,l} = l\eta$, где $l \geq 1$ — целые числа, а η — достаточно

малая постоянная. Для каждого $d_2 = d_{2,l}$ указанным способом находим соответствующее значение $d_{1\max}$. Процесс увеличения d_2 продолжаем до тех пор, пока $d_{1\max}$ будет существовать. Таким образом, найдется набор пар (d_1, d_2) , для каждой из которых точка минимума $J(p)$ принадлежит непустому пересечению U_1 и U_2 . Наименьшее из экстремальных значений $J(p)$, вычисленных для каждой пары, определяет искомое решение. Вычислительный эксперимент показал, что при увеличении d_2 происходит уменьшение соответствующего значения $d_{1\max}$.

Описанный алгоритм при уменьшении η позволяет найти наилучшую аппроксимацию в окрестности экстремальной точки множества U_1 множествами U_2 . Его реализация связана с решением достаточно большого числа оптимизационных задач, но на каждом шаге в силу выпуклости U_2 и строгой выпуклости $J(p)$ гарантируются существование и единственность экстремальной функции.

Расчеты показали, что описанная аппроксимация точная, если отыскивается профиль с монотонным распределением скорости на одной из его поверхностей (т. е. $f_{0j} = 0$ или $d_j = 0$ при $j = 1$ или 2). Результаты, полученные в общем случае и при аппроксимации (3.10), практически совпали.

На фиг. 2 представлены оптимальные профили с монотонным распределением $v(s)$ на нижней поверхности, построенные при $\alpha = 0,1$ (контур 1) и $\alpha = 0,2$ (контур 2) при тех же, что в первом примере, значениях a, b, f_0 . Профиль 1 имеет $C_y = 0,696$ при угле атаки $\beta = 7,6^\circ$ и относительную толщину $t = 0,157$, а для профиля 2 $C_y = 1,448$ при $\beta = 9,6^\circ$ и $t = 0,221$. Соответствующие распределения $v(s)$ представлены линиями 3 и 4.

Рассмотрим теперь случай, когда значение α не фиксировано. В силу (3.3) и (3.4) для максимизации подъемной силы необходимо минимизировать функционал $J_0(p_0) = J(p)/\sin \alpha$ на множестве допустимых решений $p_0 = (p, \alpha)$, где $p \in U_1$, а $\alpha \in [0, \pi/2]$. В результате вычислительного эксперимента установлено, что при увеличении α минимальное значение $J(p)$ возрастает, причем значительно медленнее, чем $\sin \alpha$. Поэтому возникает задача нахождения максимального α , при котором множество допустимых решений не пусто.

Расчеты показали, что при росте α оптимальные безотрывные профили становятся неоднолиственными. Максимальное α , соответствующее однолистному профилю при $f_0 = -6$, получилось равным $0,28$. На фиг. 3 представлены этот профиль и распределение $v(s)$ по нему. Профиль имеет $C_y = 2,017$ при $\beta = 12,8^\circ$ и относительную толщину $t = 0,252$.

4. Минимизация профильного сопротивления. Как известно, в случае безотрывного обтекания коэффициент C_x профильного сопротивления может быть рассчитан по формуле Сквайра — Юнга ([12], с. 691)

$$C_x = 2 \left| v_0/v_\infty \right|^{3,2} c^{-1} \delta_0^{**} \quad (4.1)$$

где $v_0 = v(1)$, а δ_0^{**} — суммарная толщина потери импульса в задней кромке. Используя соотношения (2.3) и (3.8), из (4.1) выводим

$$C_x = 2^{3,2} (2Aa)^{m/(m+1)} \frac{L}{c} \text{Re}^{-1/(m+1)} D(p)$$

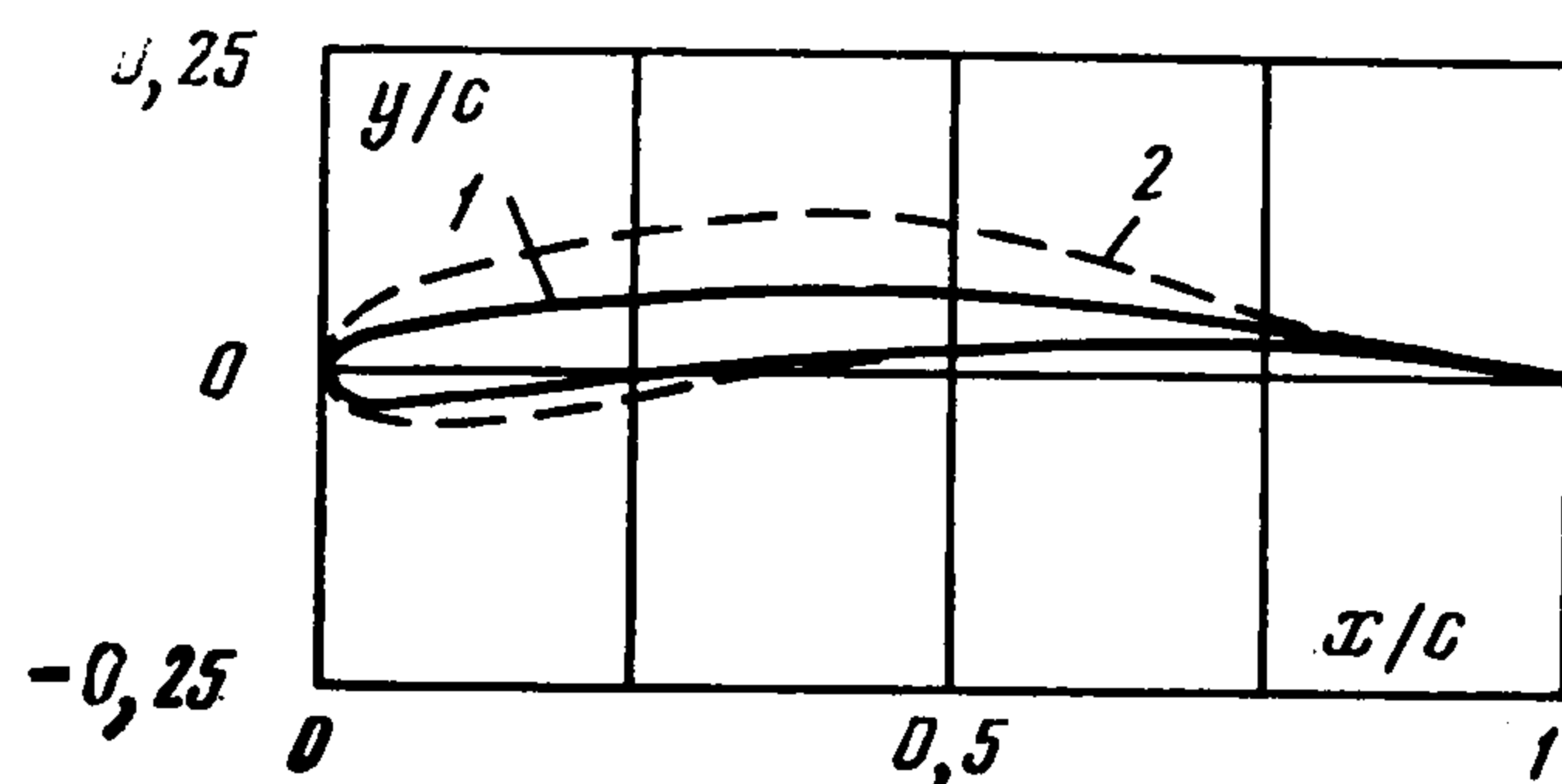
$$D(p) = B(p) [J(p)]^{-m/(m+1)}, \quad \text{Re} = \frac{v_\infty L}{\nu}$$

$$B(p) = [\cos \alpha e^{-p(0)}]^\mu \left\{ \left[\int_0^{\pi+2\alpha} G_2(p; \theta) d\theta \right]^{m/(m+1)} + \left[\int_{\pi+2\alpha}^{2\pi} G_2(p; \theta) d\theta \right]^{m/(m+1)} \right\}$$

$$\mu = 3,2 - \frac{6m-1}{2m-1}$$

Таким образом, задача минимизации профильного сопротивления (задача 2) эквивалентна минимизации функционала $D(p)$ на множестве U_1 . Решение ее строилось численно, величина α считалась фиксированной. Отметим, что функционал $D(p)$ не является, вообще говоря, строго выпуклым, поэтому в процессе оптимизации не исключена возможность получения локальных минимумов.

На фиг. 4 представлены однолистные профили минимального сопротивления, построенные для $\alpha = 0,1$ (контур 1) и $\alpha = 0,2$ (контур 2) при $Re = 2 \cdot 10^6$. Профиль 1 имеет $t = 0,07$ и $C_x = 0,0117$, $C_y = 0,655$ при $\beta = 2,46^\circ$, а для профиля 2 $t = 0,127$,



Фиг. 4

$C_x = 0,0174$ и $C_y = 1,383$ при $\beta = 6,67^\circ$. Для сравнения укажем, что для профилей 1 и 2 на фиг. 2 соответственно $C_x = 0,0153$ и $C_x = 0,0216$ для приведенных выше значений β .

Вычислительный эксперимент показал, что при $\alpha \rightarrow 0$ величина C_x для оптимизированных профилей уменьшается, а сами профили утоньшаются, приближаясь по форме к пластинке, обтекаемой под нулевым углом атаки.

5. Максимизация аэродинамического качества. Из результатов разд. 2, 4 следует, что максимизация $K = C_y/C_x$ эквивалентна минимизации на U_1 функционала $E(p) = B(p) [J(p)]^{1/(m+1)} = D(p) J(p)$, который по своему поведению, как выяснилось в результате расчетов, незначительно отличается от $D(p)$. Этим, по-видимому, объясняется то, что полученные при $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,2$ в результате решения задачи 3 профили максимального аэродинамического качества практически совпали с профилями 1 и 2 на фиг. 4 (они имеют соответственно $K = 56,9$ и $K = 79,2$).

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова и Н. Б. Ильинского за советы и замечания, использованные при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана. // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 155. 40 с.
2. Боллхауз У. Ф. Некоторые новейшие достижения в численном исследовании трансзвуковых течений. // Численные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1981. С. 152—242.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
5. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 18. С. 67—124.
6. Mangler W. Die Berechnung eines Tragflügelprofilen mit vorgeschriebener Druckverteilung // Jahrb. Deutschen Luftfahrtforschung. 1938. Bd. 1. S. 46—53.
7. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 336 с.
8. Liebeck R. H. Design of subsonic airfoil for high lift // J. Aircraft. 1978. V. 15. № 9. P. 547—561.
9. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 5—13.

10. *Зубов В. И.* К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1980. Т. 20. № 1. С. 241—245.
11. *Степанов Г. Ю.* Об основных модельных представлениях механики жидкости и газа в теории крыла // *Некоторые вопросы механики сплошной среды.* М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 5—28.
12. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
13. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976. 320 с.
14. *Габдулхаев Б. Г.* Аппроксимация в H -пространствах и приложения // *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 223. № 6. С. 1293—1296.
15. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М.* Достаточные условия конечности аналитических функций и их приложения // *Итоги науки и техники. Мат. анализ.* М.: ВИНТИ, 1987. Т. 25. С. 3—121.
16. *Елизаров А. М.* О квазирешениях внешней обратной краевой задачи // *Изв. вузов. Математика.* 1984. № 10. С. 42—50.
17. *Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования. // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1977. Т. 17. № 4. С. 890—904.

Казань

Поступила в редакцию
17.V.1989