

УДК 532.5 : 534.1

© 1990 г.

В. Н. Лихачев

ДИФРАКЦИЯ КОРОТКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ГЛАДКОМ ТЕЛЕ, ИМЕЮЩЕМ РАЗРЫВ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается задача о распространении короткой акустической волны в идеальной жидкости при наличии разрыва радиуса кривизны ее волнового фронта. Такая волна возникает при отражении короткой акустической волны, не имеющей разрывов радиуса кривизны, от гладкого тела, имеющего такие разрывы. Считается, что размеры и радиусы кривизны поверхности тела намного больше длины волны.

В непосредственной близости от тела падающая волна отражается как локально плоская по законам геометрической акустики. По мере удаления от него начинает сказываться геометрическое схождение или расхождение лучей, определяющих динамику волны. Если разрыв одного из радиусов кривизны на теле проходил вдоль некоторой линии, то разрыв радиуса кривизны волнового фронта сохранится и будет лежать на лучах, выходящих из точек линии начального разрыва радиуса кривизны на теле. По разные стороны от этих лучей решение геометрической акустики даст различные значения амплитуды волны, т. е. сильный тангенциальный разрыв, и оказывается непригодным в окрестности лучей, соответствующих разрыву кривизны волнового фронта; в этой области происходит дифракция отраженной волны. Находится решение, описывающее отраженную волну всюду, в том числе и в зоне дифракции. Решение получено методом сращиваемых асимптотических разложений, который ранее применялся к ряду других задач [1, 2]. Поперечный профиль волны берется произвольным, удовлетворяющим единственному условию равенства нулю возмущений на передней характеристике.

Возможны различные варианты геометрии волнового фронта. Если по обе стороны от разрыва фронт выпуклый, то зона дифракции уйдет в бесконечность. Интересное приложение данной задачи — расчет фокусирующего рефлектора, заканчивающегося закругленным краем. В этом случае интенсивность волны, отраженной от вогнутого рефлектора, растет по мере приближения к фокусу, а интенсивность волны, отраженной от выпуклого края, падает. Зона дифракции, в которой сращиваются оба этих решения геометрической акустики, может играть важную роль при расчете течения в фокусной зоне, поскольку угол раствора фокусирующейся волны уменьшается по мере приближения к фокусу, а зона дифракции растет. Полученное решение позволяет описать этот процесс и найти необходимую для построения решения в фокусной зоне асимптотику сходящейся волны с учетом влияния края рефлектора.

Волновой фронт с разрывом радиуса кривизны может образовываться также в результате воздействия на жидкость излучателя аналогичной формы.

Достоинство построенного решения состоит в том, что в нем не нужно раскладывать исходную волну на суперпозицию гармоник. Сведение подобным образом нестационарной задачи к стационарной имеет ряд недостатков. Во-первых, затруднительна операция обратного интегрального преобразования, во-вторых, в окончательном решении практически не проглядывается зона зависимости возмущений, свойственная гиперболическим уравнениям. Это обстоятельство тем более принципиально, когда совершаются всевозможные предельные переходы при отыскании асимптотик. Если профиль исходной волны является, например, финитной функцией, то его можно продолжить любой ненулевой функцией. При этом в линейном приближении это продолжение не затронет решение, распространяющееся вдоль характеристик, выходящих из точек исходного профиля. В то же время коэффициенты разложения в ряд Фурье или Лапласа будут зависеть от полного распределения параметров в исходной волне, включая и ее произвольное продолжение.

1. **Постановка задачи.** Течение жидкости описывается системой уравнений Эйлера. Вводя характерную длину падающей волны \bar{x}_0 , характерное значение скорости \bar{U}_0 , перейдем к безразмерным переменным и введем малый параметр ε :

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}_0}, \quad z = \frac{\bar{z}}{\bar{x}_0}, \quad U = \frac{\bar{U}}{U_0}, \quad t = \frac{\bar{t}U_0}{\bar{x}_0}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_0 U_0^2},$$

$$\rho^0 = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho^0} \right)_0^{-1}$$

где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{U}$ — декартовы координаты и скорость в этой системе координат, t — время, \bar{p} — давление, $\bar{\rho}$ — плотность, $\bar{\rho}_0$ — плотность невозмущенной среды. Введем ρ по формуле $\rho^0 = 1 + \varepsilon\rho$.

После линеаризации по ε для волн малой интенсивности система уравнений Эйлера приведет к виду

$$\partial U / \partial t = -\nabla \rho, \quad \varepsilon \partial \rho / \partial t + \nabla U = 0 \quad (1.1)$$

Будем считать размеры тела намного большими по сравнению с характерной длиной падающей волны. В этом случае в окрестности тела как падающую, так и отраженную волны можно рассматривать как локально плоские, подчиняющиеся закону отражения геометрической оптики: фазовое распределение сохраняется, меняется лишь направление распространения волны.

В окрестности тела волновой фронт отраженной волны приобретает форму некоторой поверхности, имеющей разрыв радиуса кривизны, уравнение которой запишется в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(\beta, \gamma)$ ($\mathbf{r} = (x, y, z)$), где β, γ — поверхностные координаты. Введем лучевые координаты β, γ, σ, t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(\beta, \gamma) + \mathbf{n}^*(\beta, \gamma)\sigma, \quad t = t, \quad \mathbf{n}^* = \frac{[\partial \mathbf{r}^* / \partial \beta \times \partial \mathbf{r}^* / \partial \gamma]}{|[\partial \mathbf{r}^* / \partial \beta \times \partial \mathbf{r}^* / \partial \gamma]|}$$

Выберем координатные линии $\beta = \text{const}, \gamma = \text{const}$ совпадающими с главными направлениями начального волнового фронта отраженной волны. Тогда главные кривизны этой поверхности будут

$$R_1 = \frac{g_{\beta\beta}^*}{|\partial \mathbf{r}^* / \partial \beta| |\partial \mathbf{n}^* / \partial \beta|}, \quad R_2 = \frac{g_{\gamma\gamma}^*}{|\partial \mathbf{r}^* / \partial \gamma| |\partial \mathbf{n}^* / \partial \gamma|}$$

$$g_{\beta\beta}^* = (\partial \mathbf{r}^* / \partial \beta)^2, \quad g_{\gamma\gamma}^* = (\partial \mathbf{r}^* / \partial \gamma)^2$$

Система уравнений (1.1) в лучевых координатах примет вид

$$\frac{\partial U^1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{1}{g_{\beta\beta}}, \quad \frac{\partial U^2}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial \gamma} \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}, \quad \frac{\partial U^3}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U^1}{\partial \beta} + \frac{\partial U^2}{\partial \gamma} +$$

$$+ \frac{\partial U^3}{\partial \sigma} + U^1(\Gamma_{11} + \Gamma_{21}) + U^2(\Gamma_{12} + \Gamma_{22}) + U^3(\Gamma_{13} + \Gamma_{23}) = 0 \quad (1.2)$$

$$g_{\beta\beta} = \left(1 \pm \frac{\sigma}{R_1}\right)^2, \quad g_{\gamma\gamma} = \left(1 \pm \frac{\sigma}{R_2}\right)^2; \quad \Gamma_{k1} = \pm \left(1 \pm \frac{\sigma}{R_k}\right)^{-1} \frac{\sigma}{R_k^2} \frac{\partial R_k}{\partial \beta}$$

$$\Gamma_{k2} = \pm \left(1 \pm \frac{\sigma}{R_k}\right)^{-1} \frac{\sigma}{R_k^2} \frac{\partial R_k}{\partial \gamma}, \quad \Gamma_{k3} = \pm \left(1 \pm \frac{\sigma}{R_k}\right)^{-1} \frac{1}{R_k}$$

В формулах (1.2) нижний знак берется для вогнутого фронта, верхний — для выпуклого; U^1, U^2, U^3 — контравариантные компоненты скорости в системе координат β, γ, σ .

Профиль отраженной волны в окрестности тела имеет тот же вид, что и профиль падающей волны. Пусть он задается функцией

$$\rho = U^1 \varepsilon^{-1/2} = U \varepsilon^{-1/2} = U_p(\beta, \gamma, \sigma - t\varepsilon^{-1/2}) \quad (1.3)$$

Получим начальный профиль волны, возникающей в результате воздействия на жидкость пространственного излучателя, движущегося по закону

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}^*(\beta, \gamma) + \mathbf{n}^* \sigma_p(\beta, \gamma, t), \quad U_p = \partial \sigma_p / \partial t$$

На границе излучателя ставится обычное кинематическое условие. Построим решение в окрестности излучателя при малых временах (время отсчитываем от начала движения излучателя), считая радиусы кривизны излучателя достаточно большими: $R_k = r_k \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}$ ($k = 1, 2$). Кроме того, будем накладывать на закон движения излучателя условия

$$|\partial \mathbf{n}^* / \partial \beta| \sim \varepsilon^{-1/2}, \quad |\partial \mathbf{n}^* / \partial \gamma| \sim \varepsilon^{-1/2}, \quad \partial \sigma_p / \partial \beta \sim \varepsilon^{1/2}, \\ \partial \sigma_p / \partial \gamma \sim \varepsilon^{1/2}$$

При этих предположениях в главном приближении при $\sigma = \sigma_p(\beta, \gamma, t)$

$$U^3 = U_p$$

Зона малых времен определяется масштабами

$$\sigma \sim 1, \quad t = t_1 \varepsilon^{1/2} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad U^3 = U \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \beta, \gamma \sim 1, \quad U^1, \\ U^2 \sim \varepsilon, \quad \rho \sim 1$$

В системе (1.2) все члены, учитывающие геометрию поверхности, в главном приближении выпадают. Отсюда можно получить волну в виде (1.3).

В зоне геометрической акустики масштабы переменных таковы:

$$\beta, \gamma \sim \varepsilon^{-1/2}, \quad \xi = \sigma - t \varepsilon^{-1/2} \sim 1, \quad t \sim 1, \quad U^1, U^2 \sim \varepsilon \\ U^3 = \varepsilon^{1/2} (U_1 + \varepsilon^{1/2} U_2 + \dots), \quad \rho = \rho_1 + \varepsilon^{1/2} \rho_2 + \dots$$

Из системы (1.2) можно получить уравнение переноса для ρ_1 , используя условие совместности системы для второго приближения. После этого, срастив общее решение переноса с решением (1.3), получим обычное решение геометрической акустики [3]

$$\rho_1 = (r_1 r_2)^{1/2} (r_1 - t)^{-1/2} (r_2 - t)^{-1/2} U_p(\beta, \gamma, \xi) \quad (1.4)$$

Рассмотрим излучатель, у которого при $\beta = 0$ имеется разрыв радиуса кривизны: $\lim_{\beta \rightarrow \pm 0} r_1 = r_1^\pm$. Радиус кривизны r_2 считается всюду непрерывным. Система лучевых координат приобретает особенность при $\beta = 0$. Поэтому будем по-прежнему пользоваться лучевыми координатами, однако отдельно для областей $\beta > 0$ и $\beta < 0$. При $\beta = 0$ решение (1.4) терпит разрыв и в окрестности $\beta = 0$ образуется зона дифракции волны.

2. Построение решения в зоне дифракции. Возьмем координаты β, γ такими, что $g_{\beta\beta}^* = g_{\gamma\gamma}^* = 1$. Тогда, поскольку $R_k \sim \varepsilon^{-1/2}$, характерный масштаб изменения β на поверхности излучателя будет $\varepsilon^{-1/2}$. Введем дифракционную зону при помощи масштабов

$$\beta = \beta^* \varepsilon^{-1/4}, \quad \xi \sim 1, \quad t \sim 1, \quad \rho = \rho_1 + \varepsilon^{1/2} \rho_2 + \dots \\ U^3 = \varepsilon^{1/2} u_1 + \varepsilon u_2 + \dots, \quad U^1 = \varepsilon^{3/4} (u_1^* + \varepsilon^{1/2} u_2^* + \dots), \\ U^2 \ll \varepsilon, \quad \gamma \sim \varepsilon^{-1/2} \quad (2.1)$$

Для определенности будем считать волну вогнутой по обоим главным направлениям, причем и при $\beta > 0$, и при $\beta < 0$. Подстановка разложения (2.1) приводит систему (1.2) к уравнению звуковых пучков при учете геометрической сходимости фронта [4]

$$\frac{\partial}{\partial \beta^*} \left[\frac{1}{(1 - t/r_1)^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \beta^*} \right] = -2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t \partial \xi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_1 - t} + \frac{1}{r_2 - t} \right) \quad (2.2)$$

Считая, что $r_k = r_k(\beta, \gamma)$, получим

$$\partial r_1 / \partial \beta^* \sim \varepsilon^{1/4} \ll 1 \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), в главном приближении можно вынести в (2.2) $(1 - t/r_1)^2$ за знак производной, причем в зоне дифракции $r_2(\beta, \gamma) = r_2(0, \gamma)$, $r_1(\beta, \gamma) = r_1^\pm(0, \gamma)$ (индекс плюс при $\beta > 0$, минус — при $\beta < 0$). Поэтому в зоне дифракции в дальнейшем под r_2 будем понимать $r_2(0, \gamma)$.

Вводя новые переменные в областях $\beta > 0$ и $\beta < 0$ по формулам $\rho_1 = \Omega^\pm [(1 - t/r_2)(1 - t/r_1^\pm)]^{-1/2}$, получим уравнение

$$(1 - t/r_1^\pm)^{-2} \partial^2 \Omega^\pm / \partial \beta^{*2} - \partial^2 \Omega^\pm / \partial \xi \partial t = 0 \quad (2.4)$$

Пусть скорость колебаний излучателя или тангенциальное распределение возмущений в исходной отраженной волне (1.3) вдоль поверхности непрерывно. Тогда из сращивания будем иметь условия

$$\lim_{\beta^* \rightarrow \pm\infty} \Omega^\pm = \lim_{t \rightarrow 0} \Omega^\pm = \lim_{\beta \rightarrow 0} U_p(\beta, \gamma, \xi) = U_p(0, \gamma, \xi) \quad (2.5)$$

Для замыкания каждой из задач (2.4), (2.5) необходимо добавить условие при $\beta^* = 0$.

Получим условие при $\beta^* = 0$. Заметим, что непосредственно из системы (1.1) в зоне дифракции можно получить для ρ_1 волновое уравнение. Учитывая, что волна достаточно гладкая, воспользуемся формулой Пуассона для получения решения при $\beta^* = 0$.

Введем декартовы координаты $x_1 = x\varepsilon^{1/2}$, $y_1 = y\varepsilon^{1/2}$, $z_1 = z\varepsilon^{1/2}$, причем направим ось x вдоль β , z вдоль γ в точке ($\beta = 0$, $\gamma, \sigma = 0$), ось y направим в сторону движения волны. Тогда волна в окрестности излучателя будет иметь вид

$$\rho_1^\pm |_{t=0} = U_p(0, \gamma, \xi^\pm), \quad \xi^\pm = y - 1/2 x_1^2 / r_1^\pm - 1/2 z_1^2 / r_2$$

При вычислении решения в точке $(0, y_1, 0, t)$ необходимо интегрировать в формуле Пуассона по сфере $(y_1 - y_2)^2 + x_2^2 + z_2^2 = t^2$. Вводя полярные координаты $x_2 = \mu \cos \varphi$, $z_2 = \mu \sin \varphi$, найдем

$$\begin{aligned} \rho_1(0, y_1, 0, t) = \frac{A^+ + A^-}{4\pi t}, \quad A^\pm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\varphi_1^\pm}^{\varphi_2^\pm} d\varphi \int_0^{\mu^\pm} \frac{U_p(0, \gamma, \xi^\pm)}{t} \mu d\mu + \\ + \frac{1}{t} \int_{\varphi_1^\pm}^{\varphi_2^\pm} d\varphi \int_0^{\mu^\pm} \frac{\partial U_p(0, \gamma, \xi^\pm)}{\partial \xi} \mu d\mu \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ = -\pi/2, \quad \varphi_2^+ = \varphi_1^- = \pi/2, \quad \varphi_2^- = 3\pi/2, \quad \mu^{\pm 2} = (t - y_1) / \Delta^\pm \\ \Delta^\pm = 1/2 [\cos^2 \varphi (1/t - 1/r_1^\pm) + \sin^2 \varphi (1/t - 1/r_2)] \end{aligned}$$

При получении формулы (2.6) использовался тот факт, что короткая волна локально плоская, поэтому во втором интеграле берется производная по ξ .

Учитывая коротковолновый характер импульса ($\mu/t \ll \mu/r_1^\pm \ll 0$), получим для фазы первые члены разложения в виде

$$\xi^\pm(\mu, \varphi) = y_1 - t + \mu^2 \Delta^\pm \quad (2.7)$$

Из (2.6) получим при учете (2.7)

$$A^\pm = \int_{\varphi_1^\pm}^{\varphi_2^\pm} d\varphi \int_0^{\mu^\pm} U_p \mu d\mu + U_p(0, \gamma, \xi^\pm) \int_{\varphi_1^\pm}^{\varphi_2^\pm} \frac{d\varphi}{\Delta^\pm} \quad (2.8)$$

$$\xi^+ = \xi^- = \xi |_{\mu=0} = y_1 - t$$

Отбрасывая в главном приближении в (2.8) первый интеграл, найдем окончательное условие при $\beta^* = 0$

$$\rho_1(0, \gamma, \sigma, t) = \frac{1}{2} U_p(0, \gamma, \xi) (1 - t/r_2)^{-1/2} [(1 - t/r_1^{\pm})^{-1/2} + (1 - t/r_1^{\mp})^{-1/2}] \quad (2.9)$$

Формула (2.9) выражает простой геометрический факт: на лучах, соответствующих разрыву геометрического фронта, амплитуда волны равна полусумме амплитуд, получающихся из предельных значений решений геометрической акустики по обеим сторонам разрыва.

Имея дополнительное условие (2.9), можно свести расчет течения в зоне дифракции при $\beta^* > 0$ к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \partial^2 \Omega_1^0 / \partial \beta^{*2} + \partial^2 \Omega_1^0 / \partial \xi^0 \partial T &= 0 \quad (\xi^0 = -\xi > 0) \\ \Omega_1^0 |_{\beta^* \rightarrow +\infty} &= 0, \quad \Omega_1^0 |_{T=0} = 0, \quad \Omega_1^0 |_{\beta^*=0} = f(\xi^0, T) \\ \Omega_1^0 &= \Omega^+ - U_p(0, \gamma, \xi), \quad T = t(1 - t/r_1^+)^{-1} \\ f(\xi^0, T) &= \frac{1}{2} U_p(0, \gamma, -\xi^0) \{ [(1 - t/r_1^+)(1 - t/r_1^-)^{-1}]^{1/2} - 1 \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Делая синус-преобразование Фурье по β^* , получим для образа задачу Гурса с данными на характеристиках

$$\begin{aligned} \partial^2 \Omega_1^s / \partial \xi^0 \partial T + \lambda^2 \Omega_1^s + \lambda f(\xi^0, T) &= 0 \\ \Omega_1^s |_{T=0} &= 0, \quad \Omega_1^s |_{\xi^0=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Функция Римана уравнения (2.11)

$$v(\xi_1^0, T_1; \xi^0, T) = J_0 [2\lambda \sqrt{(T - T_1)(-\xi_1^0 + \xi^0)}]$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Интегрируя (2.11) по прямоугольнику с вершинами $(0, 0)$, $(\xi^0, 0)$, (T, ξ^0) , $(0, T)$, получим

$$\Omega_1^s(\xi^0, T) = \lambda \int \int v(\xi_1^0, T_1; \xi^0, T) f(\xi_1^0, T_1) d\xi_1 dT_1$$

Делая замену $\lambda(T - T_1) = T_2$, $\lambda(-\xi_1^0 + \xi^0) = \xi_2$ и обратное преобразование Фурье, получим решение в зоне дифракции при $\beta^* > 0$

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \beta^*}{\lambda} d\lambda \int_0^{\xi^0} U_p\left(0, \gamma, \xi + \frac{\xi_2}{\lambda}\right) d\xi_2 \int_0^{\lambda T} J_0(2\sqrt{\xi_2 T_2}) \times \\ &\times \left\{ \left[1 - \left(T - \frac{T_2}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{r_1^+} - \frac{1}{r_1^-}\right) \right]^{-1/2} - 1 \right\} dT_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для получения решения при $\beta^* < 0$ достаточно заметить, что заменой $\beta_1^* = -\beta^*$ для Ω_1^0 получится в точности та же задача (2.10) в переменных β_1^* , ξ^0 , T с той лишь разницей, что всюду надо поменять местами r_1^+ и r_1^- . Поэтому решение при $\beta^* < 0$ отличается от (2.12) знаком и перестановкой r_1^+ и r_1^- .

Решение (2.12) и аналогичное при $\beta^* < 0$ имеет устранимый разрыв. Действительно, $\Omega_1^0 |_{\beta^*=0} = 0$. Однако последнее условие в (2.10) выполняется, если иметь в виду предел при $\beta^* \rightarrow +0$. Это проверяется непосредственно.

Решение задачи в дифракционной зоне непрерывно при $\beta^* = 0$, но его тангенциальная производная по β^* не является непрерывной при $\beta^* = 0$. Возникает вопрос о том, будет ли данный слабый разрыв следствием разрывных начальных условий или же он является дефектом асимптотического решения. Параллельно возникает вопрос о возможности использования формулы Пуассона при выводе условия при $\beta^* = 0$.

Начальные данные в формуле Пуассона имеют вид

$$U|_{t=0} = U_p\left(0, \gamma, y_1 - \frac{x_1^2}{2r_1^{\pm}} - \frac{z_1^2}{2r_2}\right), \quad U'_t|_{t=0} = U'_p\left(0, \gamma, y_1 - \frac{x_1^2}{2r_1^{\pm}} - \frac{z_1^2}{2r_2}\right) \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что при $\beta^* = 0$ (или $x_1 = 0$) непрерывны функции (2.13) и их первые пространственные производные, а производная

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=0} \Big|_{t=0} = -^{1/2} U_p' \left(0, \gamma, y_1 - \frac{z_1^2}{2r_1} \right) \frac{1}{r_1^\pm}$$

терпит разрыв. В то же время для использования формулы Пуассона необходима непрерывность первых трех производных от указанных функций. Поэтому использованные данные (2.13) для получения условия (2.9) являются недостаточно гладкими.

Однако можно так сгладить начальные данные (2.13), изменив их в сколь угодно малой окрестности $x_1 = 0$, что сглаженные данные будут трижды дифференцируемы, а первые производные будут сколь угодно близки к непрерывным первым производным (2.13). Для таких гладких начальных условий формула Пуассона дает классическое решение волнового уравнения.

Данное рассуждение приводит к выводу о том, что условие (2.9) на лучах, соответствующих разрыву волнового фронта, может быть получено предельным переходом равномерно близких к (2.13) сглаженных начальных условий к своему пределу.

Таким образом, условие (2.9) действительно соответствует разрывному волновому фронту. Кроме того, слабый разрыв в построенном решении находится на бихарактеристике системы (1.1).

3. Составное разложение. Составное разложение, описывающее как зону геометрической акустики, так и зону дифракции, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \left[\left(1 - \frac{t}{r_1^\pm} \right) \left(1 - \frac{t}{r_2} \right) \right]^{-1/2} \left\{ U_p(\beta, \gamma, \xi) \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda \beta \varepsilon^{1/4})}{\lambda} d\lambda \times \right. \\ & \times \int_0^{-\lambda \xi} U_p \left(0, \gamma, \xi + \frac{\xi_2}{\lambda} \right) d\xi_2 \int_0^{\lambda T^\pm} J_0(2\sqrt{\xi_2 T_2}) A^\pm dT_2 \left. \right\} \\ & A^\pm = [1 + (T^\pm - T_2/\lambda)(1/r_1^+ - 1/r_1^-)]^{-1/2} - 1 \\ & T^\pm = tr_1^\pm / (r_1^\pm - t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Знак плюс для $\beta > 0$, минус — для $\beta < 0$.

Полученное решение можно обобщить на случай любых комбинаций выпуклости и вогнутости по любой координате; например, при $\beta < 0$ волна может быть вогнутой, при $\beta > 0$ — выпуклой, по γ — вогнутой. При этом принцип построения решения может быть сформулирован геометрически: задача (2.10) остается прежней, амплитуда волны при $\beta^* = 0$ равна полусумме предельных значений решений геометрической акустики для любой геометрии тела.

4. Исследование решения в окрестности зоны фокусирования. Рассмотрим случай, когда и при $\beta > 0$, и при $\beta < 0$ волна вогнута, но $r_1^- > r_1^+$. Пусть $r_2 > r_1^+$, т. е. прежде всего фокусирование происходит за счет направления β при $\beta > 0$.

При $t \rightarrow r_1^+$ имеем $T^+ \rightarrow \infty$ и, делая ряд замен в (3.1), найдем асимптотику ρ_1 около зоны фокусирования в виде

$$\rho_1 = [\Delta t (1/r_1^+ - 1/r_2)]^{-1/2} \left\{ U_p(0, \gamma, \xi) - [(\Delta t/r_1^+)^{1/2} (1 - r_1^+/r_1^-)^{-1/2} - 1] G(R, \xi) \right\} \quad (4.1)$$

$$G(R, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \int_0^D U_p \left(0, \gamma, \xi + \frac{\xi_1^2 R^2}{4\omega^2} \right) \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_0^{\xi_1} J_0(v) v dv$$

$$R = \beta^* T^{+1/2}, \quad \Delta t = r_1^+ - t, \quad D = 2\omega \sqrt{-\xi}/R$$

Решение (4.1) справедливо при $\beta^* \ll \varepsilon^{-1/4}$. В главном приближении $R = \beta^* \Delta t^{1/2} / r_1^+$. Поэтому решение (4.1) описывает поперечную волну, распространяющуюся вдоль волнового фронта. Поскольку G зависит от

времени и продольной координаты β^* лишь в комбинации $\beta^* \Delta t^{1/2}$, то зона дифракции при $\Delta t \rightarrow 0$ расширяется пропорционально $\Delta t^{-1/2}$. Имеет место аналогия с тем, как расплывается зона мгновенного выделения тепла в точке. Разница лишь в том, что там амплитуда падает, а при фокусировании растет, там время стремится к бесконечности, а здесь $\Delta t \rightarrow 0$. Однако в обоих случаях имеет место подобие волн по мере изменения времени, причем одинакова параболическая зависимость параметра подобия: $\beta^* \Delta t^{1/2} = \text{const}$. Другими словами, решение (4.1) автомодельно: при фокусировании волны в окрестности фокуса (но не в самой фокусной зоне) поперечный профиль волны может быть построен простым изменением коэффициентов, зависящих от времени, функция G автомодельна.

5. Влияние узкой зоны больших градиентов в профиле волны на ее дифракцию. Профиль волны $U_p(\beta, \gamma, \xi)$ может иметь в окрестности некоторого ξ зону больших градиентов. Например, если распространяется ударная волна в слабовязкой среде, то в окрестности $\xi = 0$ будет зона больших градиентов, описывающая структуру ударной волны. Конечно, учет такого пограничного слоя требует исследования уравнений с учетом вязкости. Однако представляет интерес выяснить, как скажется наличие такой зоны в рамках идеальной жидкости.

Построенное решение (3.1) описывает волну ширины порядка единицы. Пусть для определенности тонкий слой находится в окрестности $\xi = 0$ и имеет ширину порядка $\varepsilon_1 \ll 1$. Гладкий профиль волны имеет вид

$$U_p(\beta, \gamma, \xi) = U_p^1(\beta, \gamma, \xi) + U_p^2(\beta, \gamma, \xi/\varepsilon_1)$$

где $U_p^1(\beta, \gamma, 0) = -U_p^2(\beta, \gamma, 0) \neq 0$, $U_p^2 = 0$ при $\xi/\varepsilon_1 < \xi_f < 0$. Функция U_p^1 имеет разрыв при $\xi = 0$.

При удалении от $\xi = 0$ на расстояние, много большее ε_1 , можно пользоваться в главном приближении предельной функцией в формулах (3.1).

Для этого нужно показать, что данное утверждение справедливо для интегрального члена в фигурных скобках (3.1). Оценим интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda \beta \varepsilon^{1/4})}{\lambda} d\lambda \int_0^{-\lambda \xi} U_p^2\left(0, \gamma, \frac{\xi + \xi_2/\lambda}{\varepsilon_1}\right) d\xi_2 \int_0^{\lambda T^\pm} J_0(2\sqrt{\xi_2 T_2}) A^\pm dT_2 \quad (5.1)$$

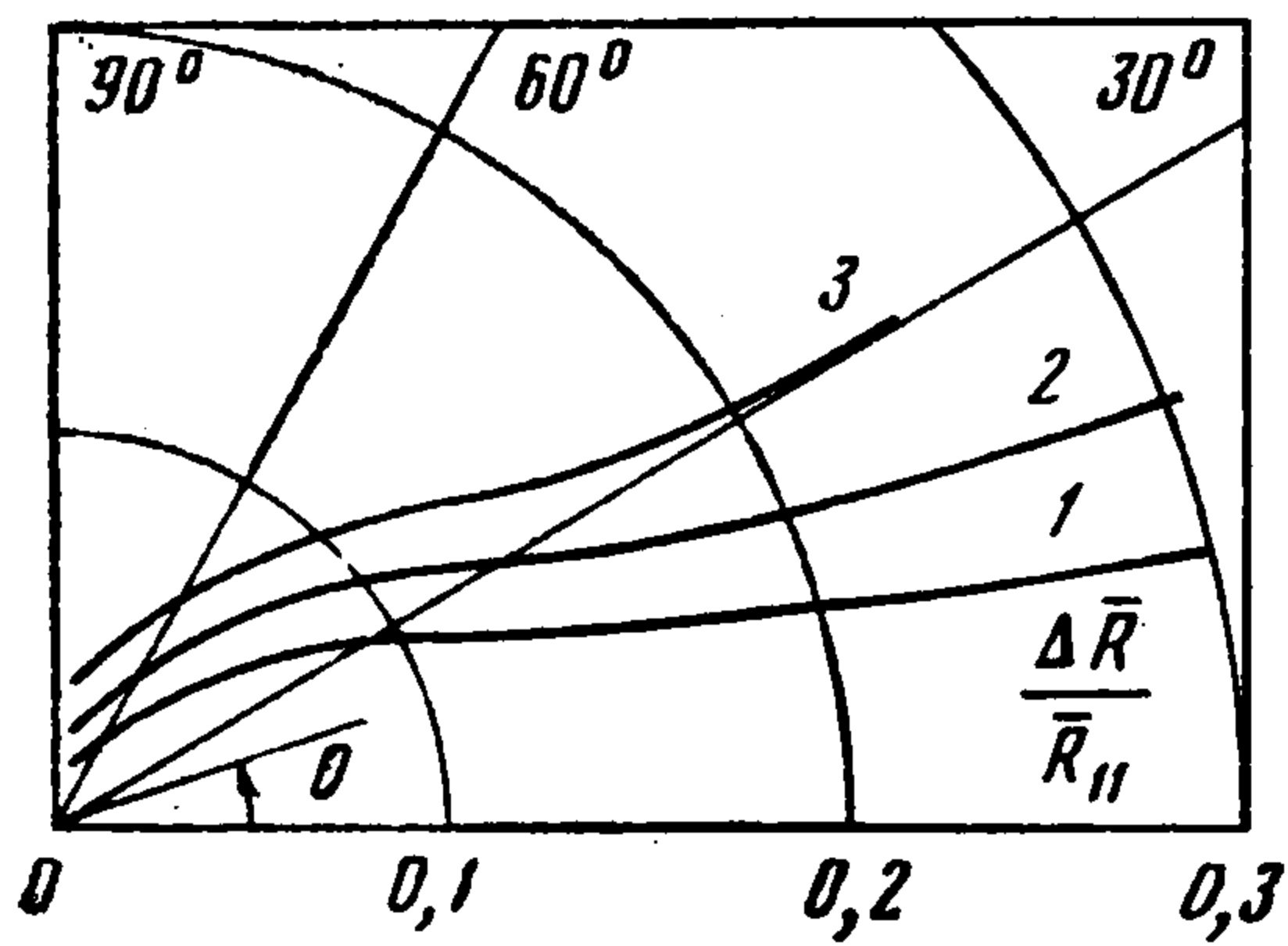
После замены переменных $(\xi + \xi_2/\lambda)/\varepsilon_1 = \xi_1$, $\lambda T_2 = T_1$ можно показать, что при $\xi > \xi_f \varepsilon_1$ в силу финитности функции U_p^2 в интеграле по ξ_1 в полученном из (5.1) интеграле нужно интегрировать от ξ_f до нуля. Поэтому при $\xi \gg \varepsilon_1 \xi_1$ под интегралом по T_1 можно перейти к пределу при $\varepsilon_1 \xi_1 \rightarrow 0$. В результате получим

$$I_1 \sim \varepsilon_1 \int_{\xi_f}^0 U_p^2(0, \gamma, \xi_1) d\xi_1 \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda \beta \varepsilon^{1/4})}{\lambda} d\lambda \int_0^{\lambda^2 T^\pm} J_0[2\sqrt{(\varepsilon_1 \xi_1 - \xi) T_1}] A^\pm dT_1$$

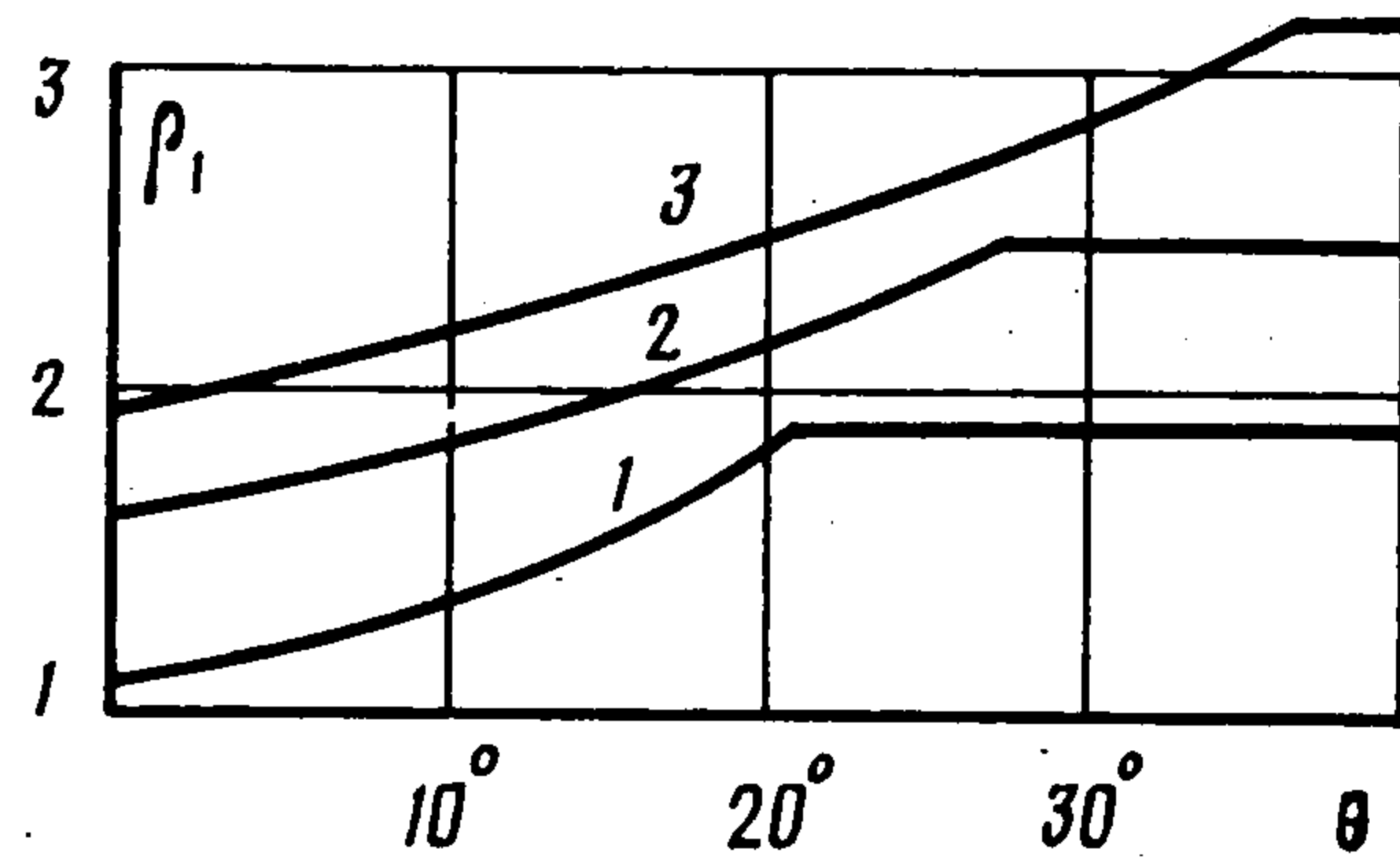
В силу сходимости интеграла по λ получим, что $I_1 \sim \varepsilon_1$, т. е. при $\xi \gg \xi_f \varepsilon_1$ в интеграле, а тем более во внеинтегральном члене в (3.1), в главном приближении можно пользоваться предельной разрывной функцией.

6. Фокусирование волны со ступенчатым профилем. Рассмотрим фокусирование волны, имеющей ступенчатый профиль: $U_p = 1$ при $\xi < 0$, $U_p = 0$ при $\xi > 0$. Пусть разрыв сглажен в некотором тонком слое в окрестности $\xi = 0$. Как показано в разд. 5, на расстояниях от зоны сглаживания, много больших ширины этой зоны, в построенном решении можно пользоваться предельной разрывной функцией.

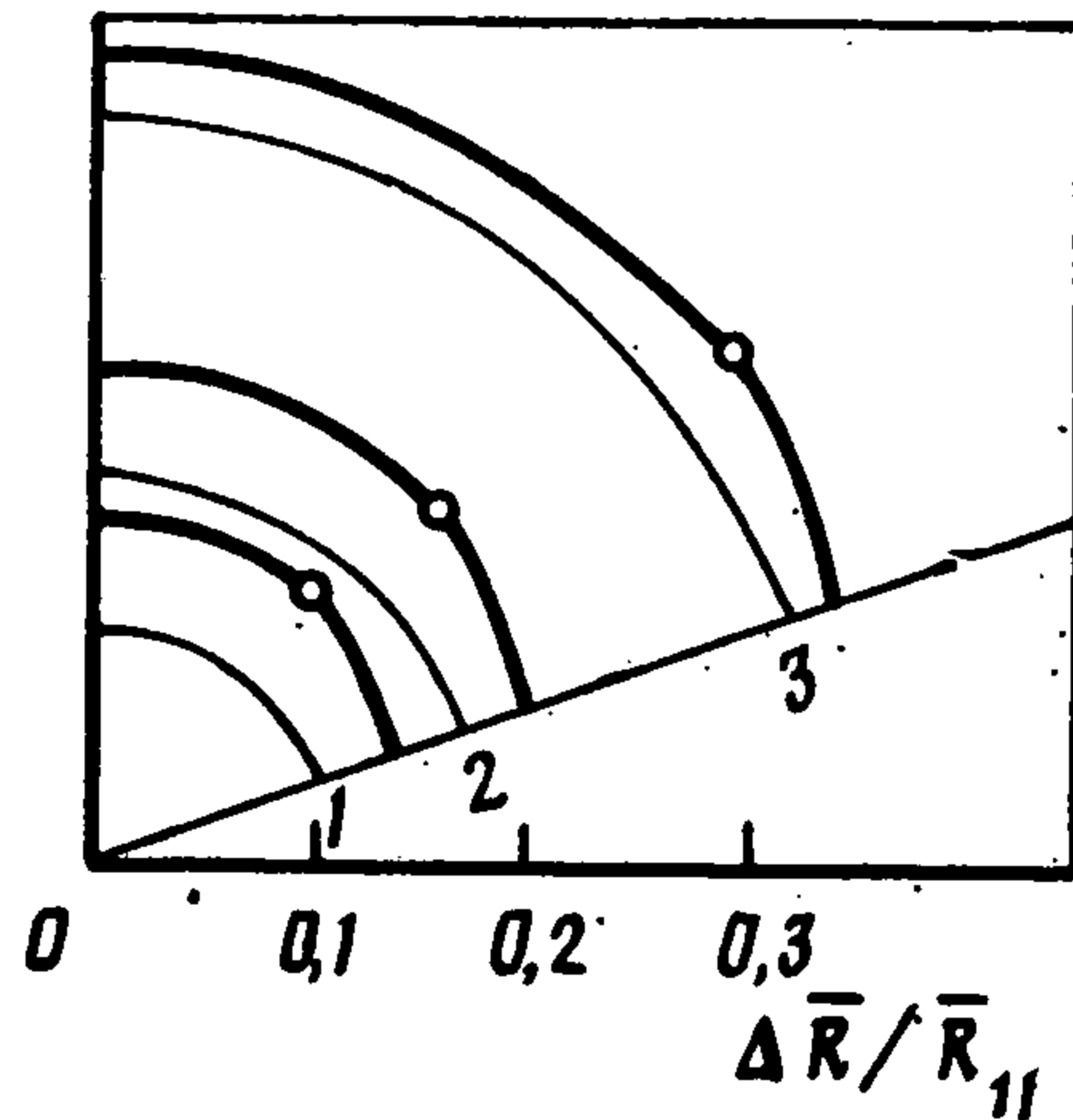
Используя (4.1) и вычисляя повторные интегралы, подобно тому как это сделано в конце разд. 2, сделав замену $-2\lambda\sqrt{-\xi T}/\beta^* = \lambda_1$ и воспользовавшись таблицей



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

преобразований Фурье от бесселевых функций, получим

$$\begin{aligned} \rho_1 &= [\Delta t (1/r_1^+ - 1/r_2)]^{-1/2} \Lambda \\ \Lambda &= 1 + [(r_1^- \Delta t)^{1/2} r_1^{+1/2} (r_1^- - r_1^+)^{-1/2} - 1] \times (1/2 - 1/\pi^{-1} \arcsin \psi), \\ &0 < \psi < 1, \beta > 0 \quad (6.1) \\ &\Lambda = 1, \psi > 1, \beta > 0 \\ &\psi = (-\Delta t/\xi)^{1/2} \beta^*/(2r_1^+) \end{aligned}$$

Решение (6.1) хорошо иллюстрирует следующее свойство волн с узкими зонами больших градиентов: чем ближе фаза ξ подходит к этой зоне, тем меньшей оказывается размер зоны дифракции. В пределе бесконечно узкого слоя больших градиентов решение в окрестности слоя подчиняется закону геометрической акустики, дающем в данном случае сильный тангенциальный разрыв.

Рассмотрим начальную цилиндрическую сходящуюся волну с $R_2 = \infty$, $\bar{R}_{11} = 0,5$ м; с ней стыкуется волна с $\bar{R}_{12} = 0,8$ м, ширина волны $x_0 = 10^{-2}$ м. Введем угол $\theta = \beta^*/(R_{11}\epsilon^{1/4})$, как показано на фиг. 1. Тогда $\theta = 0$ дает луч, где стыкуются две части волны с разными радиусами.

На фиг. 1 представлена граница зоны дифракции $\theta_l = 2\sqrt{-\xi\epsilon^{1/4}/\sqrt{\Delta t}}$ в полярных координатах для случая $\epsilon = 10^{-4}$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям фазы $\xi = -0,3; -0,5; -0,8$. При уменьшении $|\xi|$ до нуля зоны дифракции (ниже кривых 1, 2, 3) также уменьшается и стремится к $\theta = 0$, однако неравномерно: при любом ξ около фокуса угол дифракции θ_l может стать максимальным (зависит от угла раствора начальной волны). На фиг. 1 графики доведены до угла $\theta_l = 80^\circ$.

Наличие конечной границы θ_l , где решение переходит в решение геометрической акустики, является следствием предельного перехода к (6.1). Неравномерное поведение границы зоны дифракции в зависимости от значения фазы является следствием зоны больших градиентов. Естественно ожидать, что для плавных волн с градиентами одного порядка граница зоны дифракции будет зависеть от ξ равномерно.

Обозначим $\Delta\bar{R}$ расстояние от волны до фокуса. На фиг. 2 изображены профили волны при $\Delta t = 0,15$ ($\Delta\bar{R} = 1/3\bar{R}_{11}$), кривая 1), при $\Delta t = 0,08$ ($\Delta\bar{R} = 0,16\bar{R}_{11}$, кривая 2), при $\Delta t = 0,05$ ($\Delta\bar{R} = 0,1\bar{R}_{11}$, кривая 3). Значение фазы во всех случаях $\xi = -0,5$. По мере приближения волны к фокусу волна становится менее крутой. Дифракционная волна выходит на свое предельное значение, соответствующее геометрической акустике, с изломом графика. Этот недостаток является результатом предельного перехода к (6.1).

На фиг. 3 изображена половина той же (симметричной) цилиндрической волны что и в предыдущем случае, в полярных координатах. Величина давления ρ_1 откладывается от соответствующих окружностей 1, 2, 3 по нормали от этих окружностей. В безразмерных единицах интенсивность недифрагированной части волны в положении 1 на фиг. 3 соответствует трем. Окружности 1, 2, 3 представляют передние фронты волны на различных расстояниях до фокуса. Фаза $\xi = -0,5$. Видно, как фокусирующаяся волна заменяется дифракционной волной за счет волны, распространяющейся вдоль волнового фронта. Размер зоны дифракции не зависит от геометрии волны, т. е. от радиусов \bar{R}_{11} , \bar{R}_{12} , а определяется лишь фазой и моментом времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Распространение ударной волны на большие расстояния // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 567—569.
2. Лихачев В. Н. Влияние диссипации на распространение сферической взрывной ударной волны // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 384—393.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Базвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 174 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1988