Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 532.59 : 534.1

Н. Г. Кузнецов

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Изучаются плоские свободные колебания жидкости в канале постоянного поперечного сечения. Впервые для их исследования используется спектральная задача, собственными функциями которой служат функции тока. Для отыскания собственных значений спектрального параметра, входящего в краевое условие на свободной поверхности, применяется вариационный метод. Выясняются свойства функций тока, на основании которых можно судить о картине движения жидкости. В частности, показано, что узловые линии, на которых собственная функция тока обращается в нуль (ср. с задачей о колебаниях мембраны, рассмотренной, например, в [1]), обязательно соединяют свободную поверхность жидкости с дном. Установлено, что первое, а при некоторых условиях и второе собственное значение является простым. Получены оценки сверху для этих собственных значений. В одной из них фигурируют лишь геометрические характеристики области, в другой — соответствующая собственная функция.

Линейная задача о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью традиционно рассматривалась в терминах потенциала скоростей и формулировалась как смешанная задача Стеклова. Для решения последней чаще других применялись вариационный метод и метод, основанный на теории потенциала. Оба они пригодны для достаточно широких классов областей и удобны для численной реализации. С работами последних десятилетий можно ознакомиться по статье [2], в которой освещены результаты зарубежных авторов, и книге [3], преимущественно отражающей советские исследования.

1. Спектральная задача для функции тока. Пусть в положении равновесия идеальная несжимаемая тяжелая жидкость заполняет канал с поперечным сечением W. Односвязная область $W \subset R_-^2 = \{(x, y) : y < 0\}$ имеет кусочно-гладкую границу без точек возврата, причем $\partial W = F \cup B$, $F \cap B = \varnothing$. Здесь свободная поверхность жидкости $F = (a_-, a_+)$ находится на оси абсцисс, а вся кривая B (дно канала), за исключением ее концов $(a_\pm, 0)$, являющихся угловыми точками ∂W, лежит в R_-^2.

Обычно для описания плоских свободных гармонических по времени колебаний жидкости в канале используется следующая спектральная задача [2—6]:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ в } W, \; u_y - \nu u = 0 \text{ на } F, \quad \partial u/\partial n = 0 \text{ на } B \cap R_-^2 \qquad (1.1)$$

в которой требуется найти собственные значения параметра ν и соответствующие вещественные собственные функции из пространства Соболева $H^1(W)$, удовлетворяющие условию $\int_F u dx = 0$. Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂W; величина νg (g — ускорение свободного падения) равна квадрату частоты свободных колебаний, а фукнция u представляет собой потенциал скоростей колебаний с точностью до гармонического по времени множителя.

Задача (1.1) имеет дискретный спектр $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \ldots$, для отыскания которого применим вариационный метод, а подлежащим минимизации функционалом является отношение

$$\int_W |\nabla u|^2 \, dx\, dy \Big/ \int_F u^2 \, dx$$

Пусть ν — собственное значение задачи (1.1), а u — соответствующая собственная функция. Обозначим через v сопряженную с u гармоническую в W функцию (функцию тока), определенную с точностью до постоянного слагаемого. Последнее выберем так, чтобы $v = 0$ на B. Это возможно, поскольку $v = \text{const}$ на B ввиду условия на B в (1.1) и уравнений Коши—Римана. Если заменить u_y на $-v_x$ в условии на F в (1.1), затем продифференцировать получившееся равенство по x и снова воспользоваться уравнениями Коши — Римана, то придем к соотношению

$$v_{xx} + \nu v_y = 0 \text{ на } F \tag{1.2}$$

Таким образом, ν — собственное значение, а v — отвечающая ему собственная функция задачи

$$\nabla^2 v = 0 \text{ в } W,\ v_{xx} + \nu v_y = 0 \text{ на } F,\ v = 0 \text{ на } B \tag{1.3}$$

Аналогично можно убедиться, что всякое собственное значение задачи (1.3) есть собственное значение задачи (1.1).

Обобщенным решением задачи (1.3) служит функция $v \in H_B^1(W) \cap H_0^1(F)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_F v_x \eta_x \, dx - \nu \int_W \nabla v \cdot \nabla \eta \, dx\, dy = 0 \tag{1.4}$$

для любой функции $\eta \in H_B^1(W) \cap H_0^1(F)$. Здесь $H_B^1(W)$ — подпространство в $H^1(W)$, состоящее из функций, которые обращаются в нуль на $B \cap R_-^2$ ([7], § 7.1.5), а $H_0^1(F)$ — замыкание множества гладких финитных на F функций по норме $H^1(F)$.

В силу соотношения (1.2) задача (1.3) сводится к операторной спектральной задаче $L\varphi - \nu M\varphi = 0$ в пространстве $L_2(F)$. Здесь L — положительно определенный оператор с областью определения $D_L = H^2(F) \cap H_0^1(F)$, действующий по формуле $L\varphi = -d^2\varphi/dx^2$, а оператор M задается следующим образом. Его область определения $D_M = H_0^1(F)$, для $\varphi \in D_M$ строится гармоническое продолжение в область W (обозначаемое также φ), такое, что $\varphi = 0$ на B. Тогда $(M\varphi)(x) = \varphi_y(x, 0)$.

Наличие у уравнения $L\varphi - \nu M\varphi = 0$ бесконечной последовательности собственных значений $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \ldots \nu_n \to \infty$ при $n \to \infty$ можно установить, не переходя к задаче (1.1). Действительно, энергетическим пространством оператора L является $H_0^1(F)$ ([8], § 9). Известно также ([7], гл. 7), что $H^{1/2}(F)$ — энергетическое пространство положительно определенного оператора M. Теперь требуемый факт вытекает ([8], § 44) из компактности вложения $H_0^1(F)$ в $H^{1/2}(F)$.

Согласно вариационному методу отыскания собственных значений [8], имеем

$$\begin{gathered}\nu_n = \inf \{\langle L\varphi, \varphi\rangle / \langle M\varphi, \varphi\rangle : \varphi \in H_0^1(F), \\ \langle M\varphi, \varphi_k\rangle = 0,\ k = 1, \ldots, n-1\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

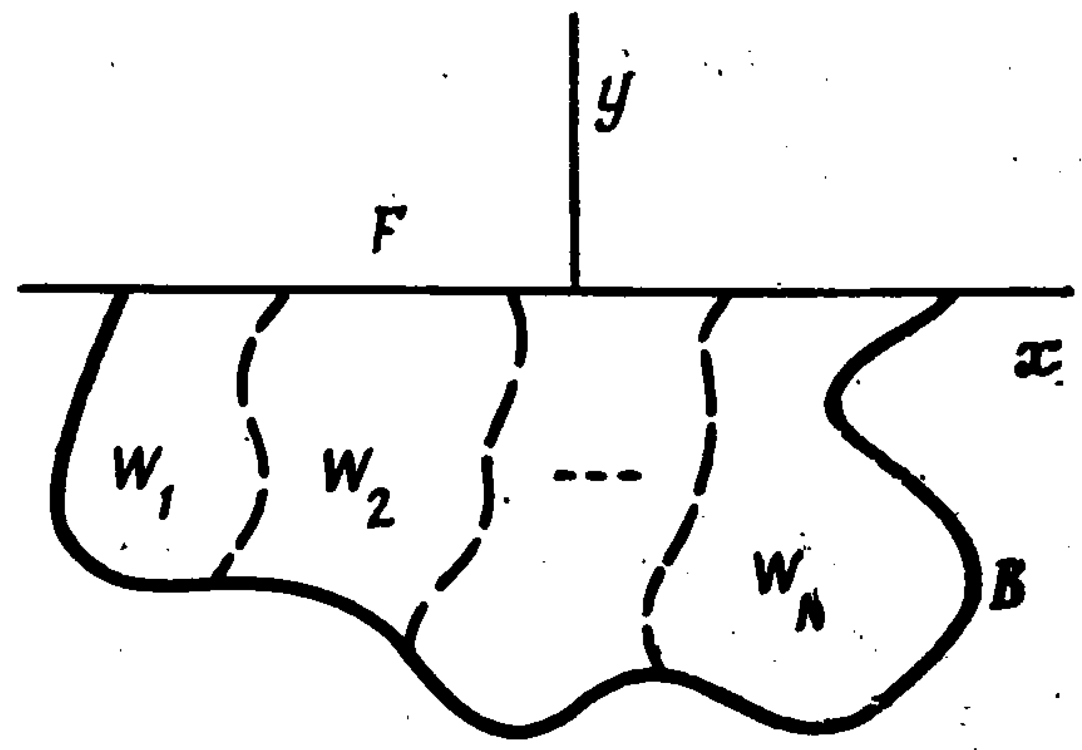
где φ_k — собственный элемент уравнения $L\varphi - \nu M\varphi = 0$, отвечающий собственному значению ν_k, $\langle .,. \rangle$ — отношение двойственности между $H^{-s}(F)$ и $H^s(F)$, расширяющее скалярное произведение в $L_2(F)$. Здесь и ниже величина ν_1 определяется аналогично ν_n без последнего условия под знаком inf.

В соответствии с (1.4) равенство (1.5) эквивалентно следующему:

$$\nu_n = \inf \Big\{ \int\limits_F v_x^2 dx \Big/ \int\limits_W |\nabla v|^2 \, dx\, dy : v \in H_B^1(W) \cap H_0^1(F), \quad \int\limits_W \nabla v \cdot \nabla v_k \, dx\, dy = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1 \Big\} \tag{1.6}$$

где v_k — собственная функция задачи (1.3), отвечающая собственному значению ν_k.

2. Узловые линии (УЛ) собственных функций тока. УЛ собственных функций тока это линии, на которых $v_k = 0$. Из принципа максимума для гармонических функций следует, что собственная функция тока v_k не может иметь изолированных корней в области W. Область $V \subset W$ назовем узловой областью (УО) функции v_k, если $v_k \neq 0$ в V и ∂V состоит из УЛ фукции v_k и, возможно, отрезков свободной поверхности F и дуг кривой B (ср. с аналогичными определениями для задачи о колебаниях мембраны [1]).



Фиг. 1

Очевидно, что УЛ функции v_k не может быть замкнутой, а также не может иметь оба конца на B. В самом деле, в противном случае по теореме единственности задачи Дирихле $v_k \equiv 0$ в области, заключенной внутри УЛ или между B и УЛ, и, следовательно, $v_k \equiv 0$ в W.

Лемма 1. Всякая УЛ функции тока собственных колебаний жидкости имеет один конец на F, а другой на B, и УЛ не пересекаются (фиг. 1).

Доказательство. Покажем, что УЛ функции v_k не может соединять две точки свободной поверхности F. Действительно, в противном случае положим

$$\varphi_1 = \begin{cases} v_k & \text{в } W' \\ 0 & \text{в } W \setminus W' \end{cases}$$

Здесь W' — УО, заключенная между F и УЛ, имеющей оба конца на F. Введем функции $\varphi_i(x, y) = \varphi_1(x + t_i, y)$ $(i = 2, \ldots, k)$, где $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ и все t_i таковы, что при сдвиге на t_i вдоль оси абсцисс область W' переходит в область, содержащуюся в W. Доопределим функции φ_i $(i = 2, \ldots, k)$ нулем, так, чтобы они были заданы всюду в W. Так как функции φ_i $(i = 1, \ldots, k)$ линейно независимы, то найдется нетривиальная линейная комбинация $\Phi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_k\varphi_k$, для которой выполняются соотношения

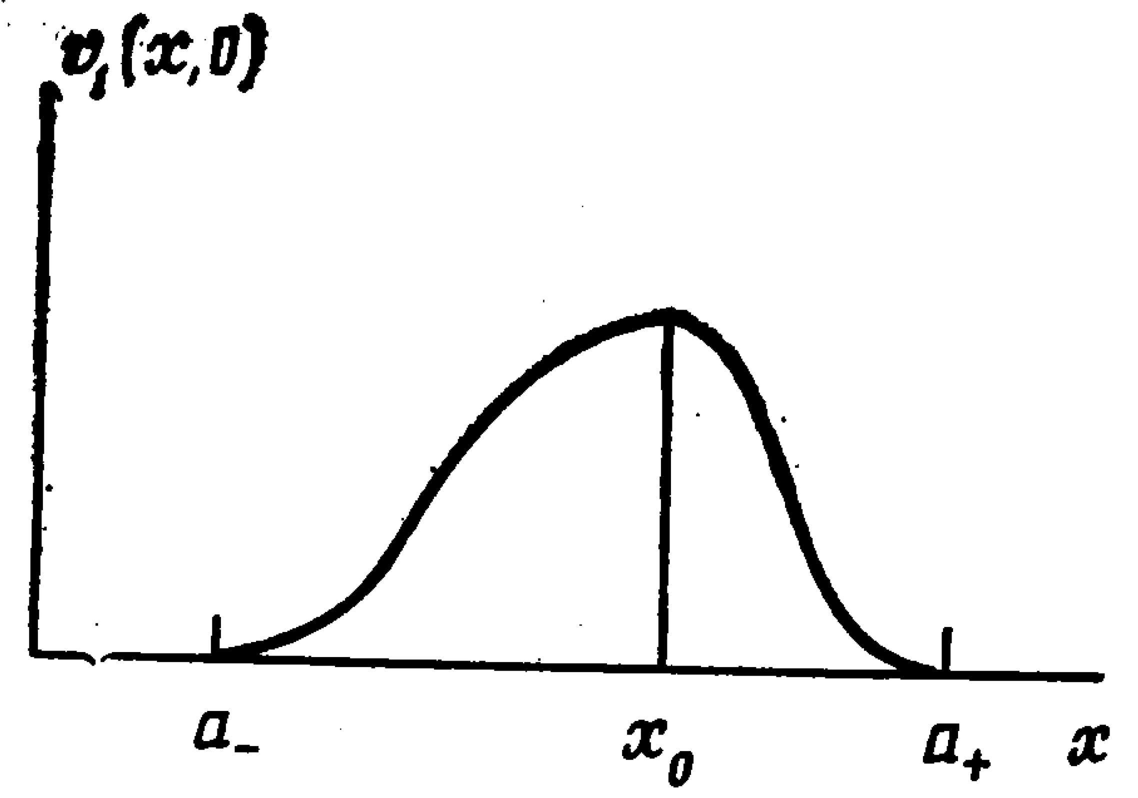
$$\int\limits_F \Phi\, (\partial v_j / \partial y)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1$$

эквивалентные равенствам

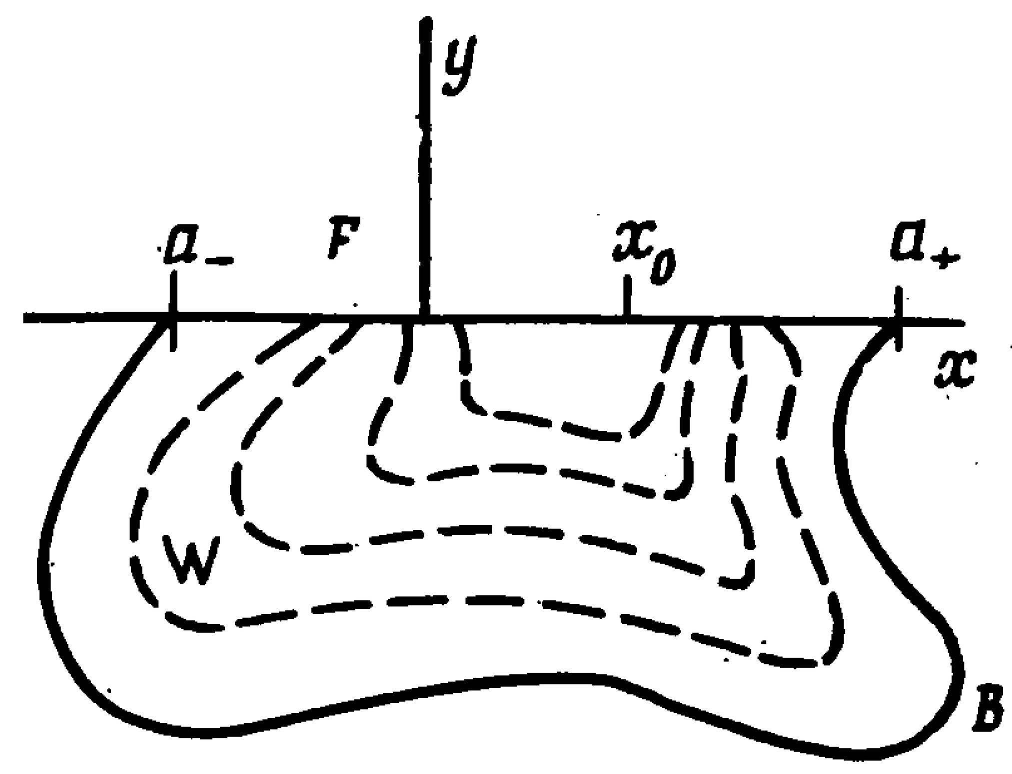
$$\int\limits_W \nabla \Phi \cdot \nabla v_j \, dx\, dy = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1$$

Функция Φ принадлежит классу $H_B^1(W) \cap H_0^1(F)$ и удовлетворяет условию $\Phi_{xx} + \nu_k \Phi_y = 0$ на F. Поэтому она доставляет минимум функционалу (1.6). Отсюда вытекает, что Φ — собственная функция, а значит, гармонична в W. Так как Φ тождественно равна нулю в некоторой подобласти, содержащейся в W, то $\Phi \equiv 0$ в W, и получено противоречие.

Теорема 1. Собственная функция тока v_n, отвечающая собственному значению ν_n, может изменять знак на F не более чем $n - 1$ раз. Ее УЛ разбивают W не более чем на n подобластей.



Фиг. 2



Фиг. 3

Доказательство. Согласно лемме УЛ функции v_n разбивают W на некоторое число N подобластей (фиг. 1). Предположим, что $N > n$ и введем функции

$$\psi_i = \begin{cases} v_n & \text{в } W_i \\ 0 & \text{в } W \setminus W_i \end{cases}$$

которые принадлежат классу $H_B{}^1(W) \cap H_0{}^1(F)$. Эти функции линейно независимы, и существует нетривиальная линейная комбинация $\Psi = b_1\psi_1 + \ldots + b_n\psi_n$, удовлетворяющая условиям ортогональности $\int\limits_W \nabla\Psi \cdot \nabla v_j dxdy = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$ (ср. с доказательством леммы). Так как $\Psi_{xx} + \nu_n\Psi_y = 0$ на F, то Ψ доставляет минимум функционалу (1.6), откуда вытекает гармоничность Ψ в W. Поскольку $N > n$, то $\Psi \equiv 0$ в некоторой подобласти, содержащейся в W. Тем самым получено противоречие, доказывающее теорему.

Замечание 1. Доказательство теоремы 1 основано на идее использованной в теореме Куранта об УЛ колеблющейся мембраны (см., например, [1]). Также было показано [1], что для мембраны имеет место неравенство $N_n < n$ при достаточно больших n, где N_n — количество УО n-й собственной функции. Пример прямоугольного канала, для которого

$$v_n = \sin\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi n(y+d)}{l}, \quad \nu_n = \frac{\pi n}{l}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi nd}{l} \tag{2.1}$$

где $(0, l)$ — свободная поверхность, а $(-d, 0)$ — боковая стенка канала, показывает, что количество УО функции v_n в задаче о колебаниях жидкости может быть равно n для всех $n = 1, 2, \ldots$

Следствие 1. След на F собственной функции v_n, отвечающей собственному значению ν_n, имеет не более n точек экстремумов. В частности, v_1 (будем считать ее положительной в W) имеет ровно один максимум на F (фиг. 2), который совпадает с $\max\{v_1(x, y) \colon (x, y) \in \overline{W}\}$.

Доказательство. В точке экстремума производная $(\partial v_n/\partial x)(x, 0)$ меняет знак. Перейдем к сопряженной гармонической в W функции u_n. В силу уравнений Коши — Римана и условия на F из (1.1) $u_n(x, 0)$ также меняет знак в точке экстремума функции $v_n(x, 0)$. Было показано [9], что u_n (u_1) меняет знак на F не более n (в точности один) раз. Следовательно, $v_n(x, 0)$ имеет не более n точек экстремума ($v_1(x, 0)$ имеет ровно один максимум) на F (хотя бы один максимум у $v_1(x, 0)$ должен существовать, так как $v_1(a_\pm, 0) = 0$). Равенство $\max\{v_1(x, 0) \colon x \in (a_-, a_+)\} = \max\{v_1(x, y) \colon (x, y) \in \overline{W}\}$ справедливо ввиду принципа максимума для гармонической функции и краевых условий в (1.3).

Замечание 2. Из следствия 1 вытекает, что линии уровня функции v_1 (линии тока волнового движения жидкости при основной собственной частоте) имеют вид, показанный на фиг. 3. Разность значений функции v_1, отвечающих соседним линиям, постоянна (ср. с фиг. 2).

Следствие 2. Собственное значение ν_1 является простым.

Доказательство. Предположим, что собственному значению ν_1 соответствуют две линейно независимые собственные функции v' и v''. Согласно теореме 1 их можно считать положительными. Обозначим M' и M'' максимумы функций v' и v'', которые достигаются в точках $(x', 0)$ и $(x'', 0)$ соответственно (см. следствие 1). Если $x' \neq x''$, то функция $M''v' - M'v''$ меняет знак на F, что противоречит теореме 1. Если $x' = x''$, то функция $M''v' - M'v''$ либо тождественно равна нулю, что противоречит линейной независимости v' и v'', либо имеет три нуля на F и, следовательно, не менее двух экстремумов на F, что противоречит следствию 1.

Следствие 3. Если след $v_1(x, 0)$ не имеет точек перегиба на F, то v_1 — единственная сохраняющая знак на W собственная функция тока. При этом функция v_2 имеет ровно одну УЛ.

Доказательство. Согласно условию производная $\partial^2 v_1/\partial x^2$, а значит, и $\partial v_1/\partial y$ (см. краевое условие на F в (1.3)) сохраняют знак на F. В силу формулы (1.6) собственные функции $v_2, \ldots, v_n, \ldots$ должны удовлетворять условию ортогональности

$$\int\limits_W \nabla v_n \cdot \nabla v_1 \, dx\, dy = \int\limits_F v_n (\partial v_1/\partial y)\, dx = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Ввиду постоянства знака производной $\partial v_1/\partial y$ функции $v_2, \ldots, v_n, \ldots$ должны менять знак. Так как по теореме 1 функция v_2 может иметь не более одной УЛ, то у нее такая линия в точности одна.

Замечание 3. Если собственная функция, отвечающая значению ν_2, имеет УЛ, то в силу следствия 1 в каждой из двух УО линии тока имеют вид, показанный на фиг. 3.

Следствие 4. Если собственному значению ν_2 отвечают лишь собственные функции тока, обладающие УЛ, то значение ν_2 — простое.

Доказательство. Предположим, что собственному значению ν_2 отвечают две линейно независимые собственные функции v' и v'', обладающие УЛ. Вследствие теоремы 1 каждая из них меняет знак на F ровно один раз, и их можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $\int\limits_F v'v''dx = 0$. Поэтому точки, в которых v' и v'' меняют знак, не совпадают. Не ограничивая общности, будем считать, что $v'(x, 0) \gtrless 0$ при $x \gtrless x'$ и $v''(x, 0) \lessgtr 0$ при $x \gtrless x''$, где $x' < x''$.

Рассмотрим выражение $w(x, t) = (1 - t)\, v'(x, 0) + tv''(x, 0)$, где $t \in [0, 1]$. Ясно, что при любых $t \in [0, 1]$ и $x \in (x', x'')$ справедливо неравенство $w(x, t) > 0$. Введем множества:

$$T' = \{t \in [0, 1]: w(x, t) < 0 \text{ при некотором } x < x'\},$$
$$T'' = \{t \in [0, 1]: w(x, t) < 0 \text{ при некотором } x > x''\}.$$

Видно, что $T' = [0, t')$, а $T'' = (t'', 1]$ при некоторых t' и t''. Если $t'' < t'$, то при $t \in (t'', t')$ функция $w(x, t)$ меняет знак на F не менее двух раз, что противоречит теореме 1. Если $t' \leqslant t''$, то при $t \in [t', t'']$ и всех $x \in (a_-, a_+)$ выполняется неравенство $w(x, t) \geqslant 0$, что противоречит условию.

Замечание 4. Метод доказательства следствия 4 был применен [9] для доказательства простоты собственного значения ν_1. Кроме того, для потенциалов скоростей плоских собственных колебаний жидкости в канале были установлены [9] утверждения, аналогичные лемме 1 и теореме 1.

Рассмотрим вопрос о наличии точек перегиба у следа на F собственной функции v_1. Потребуется следующая, вытекающая из результатов статьи [10]

Лемма 2. Пусть β — величина угла между F и односторонней касательной к B в точке $(a_-, 0)$; $\beta \in (0, \pi)$. Тогда при $\beta \neq \pi/2$ в окрестности точки $(a_-, 0)$ асимптотика собственной функции имеет вид

$$v_n = C_1^{(n)} \{\rho^{\pi/\beta} \sin(\pi\theta/\beta) - \nu_n \beta (\pi + \beta)^{-1} \rho^{1+\pi/\beta} [\cos(1 + \pi/\beta)\theta + \operatorname{ctg}\beta \sin(1 + \pi/\beta)\theta]\} + C_2^{(n)} \rho^{2\pi/\beta} \sin(2\pi\theta/\beta) + v_n^* \quad (2.2$$

Здесь v_n^* — функция класса $C^2(\overline{W})$, для которой соотношение $v_n^* = o(\rho^{2+\delta})$ выполняется при всяком $\delta \in [0, 1)$; ρ, θ — полярные координаты с началом $(a_-, 0)$ и осью, направленной вдоль F, при этом $\theta \in (-\beta, 0)$.

При $\beta = \pi/2$ вместо (2.2) имеем асимптотическую формулу $v_n = C_1^{(n)}\rho\cos\theta + v_n^*$, где $v_n^* \in C^1(\overline{W})$ и соотношение $v_n^* = o(\rho^{1+\delta})$ выполняется при всяком $\delta \in [0, 1)$.

Аналогичное утверждение справедливо для точки $(a_+, 0)$.

Замечание 5. В формуле (2.2) хотя бы одна из постоянных $C_k^{(n)}$ (при $k > 2$ они входят в разложение функции v_n^*) должна быть отлична от нуля, так как в противном случае согласно теореме о «сильном» нуле [11] в окрестности точки $(a_-, 0)$ функция v_n тождественно равна нулю, что невозможно.

При этом для положительной в W функции v_1 имеем неравенство $C_1^{(1)} < 0$. Действительно, если предположить противное, то в окрестности точки $(a_-, 0)$ будет нарушаться неравенство $v_1 > 0$.

Теперь из формулы (2.2) немедленно вытекает

Следствие 5. Если $\beta \neq \pi/2$, то справедливы равенства $(\partial v_n/\partial x)(a_-, 0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Аналогичное предложение выполняется и для точки $(a_+, 0)$.

Теорема 2. Пусть величина хотя бы одного из углов между F и односторонними касательными к B в точках $(a_\pm, 0)$ отлична от $\pi/2$. Тогда у функции $v_1(x, 0)$ имеется хотя бы одна точка перегиба.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что отлична от $\pi/2$ величина угла с вершиной в точке $(a_-, 0)$. При этом согласно следствию 5 выполняется равенство $(\partial v_1/\partial x)(a_-, 0) = 0$, а значит, вблизи точки $(a_-, 0)$ положительная функция $v_1(x, 0)$ выпукла вниз. В окрестности точки максимума (см. следствие 1) она выпукла вверх, откуда и вытекает наличие точки перегиба у $v_1(x, 0)$.

Замечание 6. Пример (2.1) показывает, что условие $\beta \neq \pi/2$ в следствии 5 существенно; у функции $v_1(x, 0)$ могут отсутствовать точки перегиба, если величина обоих углов между F и B равна $\pi/2$.

3. Оценки собственных значений. Для всякого $x \in (a_-, a_+)$ положим $d(x) = \min\{|y| : (x, y) \in B\}$, $d = \sup\{d(x) : x \in (a_-, a_+)\}$. Пусть $v \in H_B^1(W)$ и, следовательно, функция $v(x, y)$ абсолютно непрерывна по y для почти всех $x \in (a_-, a_+)$, и поэтому для них имеем

$$|v(x, 0)| = \left|\int_{-d(x)}^{0} v_y(x, y)\,dy\right| \leqslant \left(d \int_{-d(x)}^{0} |v_y(x, y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

Интегрируя по F, в силу соотношения (1.6) находим, что

$$\nu_1 \leqslant d\inf\left\{\int_F v_x^2\,dx \Big/ \int_F v^2\,dx : v \in H_B^1(W) \cap H_0^1(F)\right\} \tag{3.1}$$

Ясно, что любая функция из $H_0^1(F)$ может быть продолжена в область W так, что продолжение будет принадлежать $H_B^1(W)$. Поэтому из (3.1) следует, что

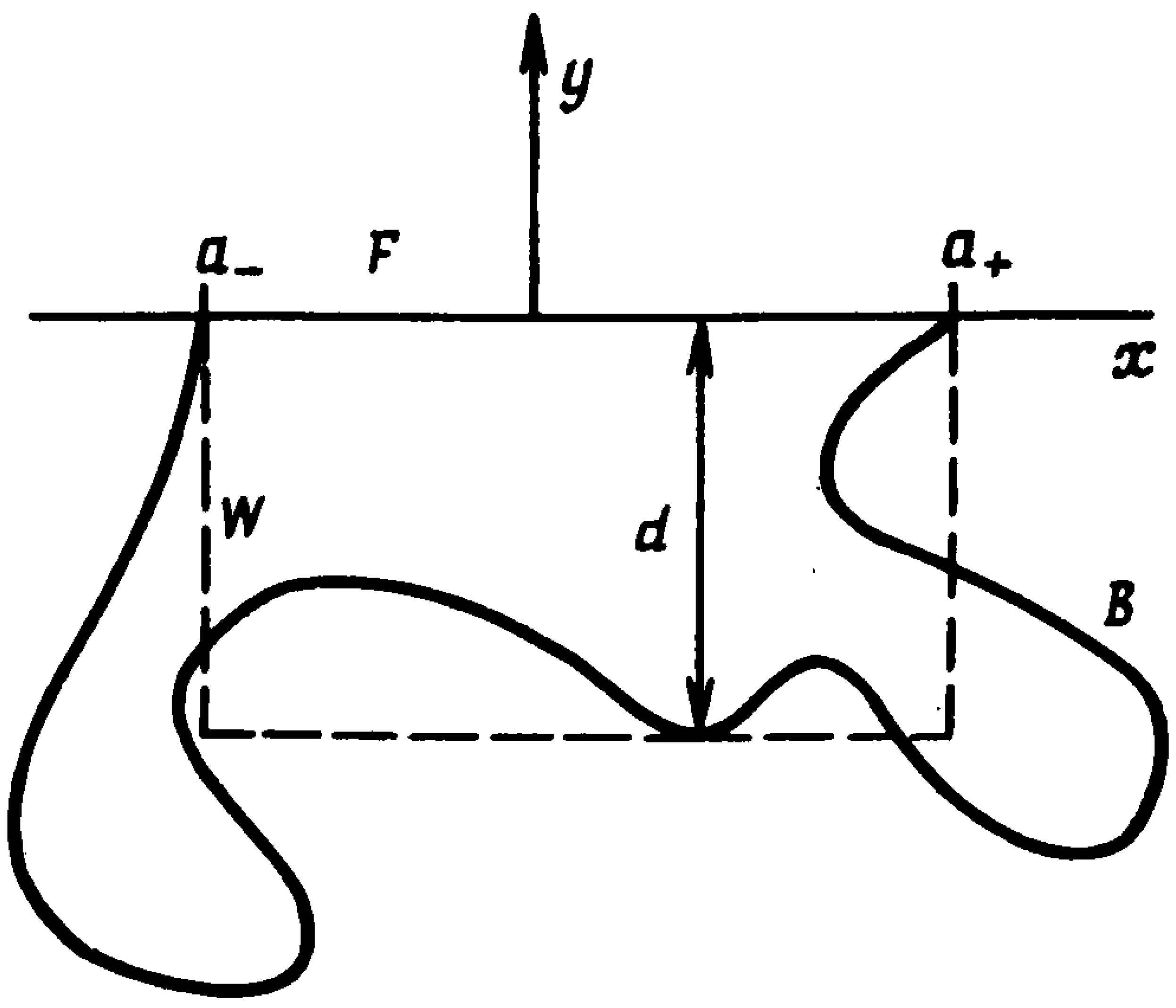
$$\nu_1 \leqslant d\inf\left\{\int_F v_x^2\,dx \Big/ \int_F v^2\,dx : v \in H_0^1(F)\right\}$$

Последний inf дает первое собственное число оператора L, равное $(\pi/l)^2$, где $l = a_+ - a_-$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Справедлива оценка $\nu_1 \leqslant d(\pi/l)^2$.

Замечание 7. Неравенство из теоремы 3 является точным в следующем смысле (изопериметрическим). Для канала, поперечным сечением которого служит прямоугольник ширины l и глубины d, первое собственное число (см. (2.1)) эквивалентно $d(\pi/l)^2$, когда $d/l \to 0$. Тем самым отношение левой и правой частей неравенства из теоремы 3 стремится к единице для прямоугольных каналов, у которых отношение глубины к ширине стремится к нулю.

Замечание 8. Если область W содержится в прямоугольнике с той же свободной поверхностью, то теорема 3 вытекает из (2.1) и следующего факта (см., например, [4, 6]). Если у двух областей свободная поверхность одинакова и одна из областей содержится в другой, то большее первое собственное значение имеет большая область. В то же время теорема 3 имеет универсальный характер, что демонстрирует, например, область, изображенная на фиг. 4.



Фиг. 4

Замечание 9. Метод получения неравенства (3.1) был использован [12] при рассмотрении некоторой вспомогательной задачи, не имеющей физического содержания.

Теорема 4. Справедливо неравенство

$$\frac{\pi}{4}\nu_1 \int\limits_W v_1^2\,dx\,dy \leqslant \max\left\{\left|\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,0)\right| : x\in[a_-, a_+]\right\}\int\limits_W v_1\,dx\,dy \qquad (3.2)$$

Доказательство. Тождество

$$\int\limits_W v^2\,dx\,dy = -\int\limits_W v[xv_x + yv_y]\,dx\,dy$$

непосредственно получается интегрированием по частям. Здесь и далее индекс 1 опущен для простоты записи.

Введем криволинейную систему координат (σ, ζ), где σ — длина дуги вдоль линии уровня функции v, а ζ — длина перпендикуляра к линии уровня (детали см. в [13], с. 413). Пусть $W(v^*)$ — подобласть, содержащаяся в W, в которой $v > v^*$. Положим

$$H_0(v^*) = \int\limits_{W(v^*)} v\,dx\,dy;\qquad H_1(v^*) = -\int\limits_{W(v^*)} v[xv_x + yv_y]\,dx\,dy$$

Благодаря виду линий уровня функции v (фиг. 3) эти величины можно выразить следующим образом:

$$H_0(v^*) = \int\limits_{v^*}^{v_m} v\,dv \int\limits_{B(v)} |\nabla v|^{-1}\,d\sigma$$

$$H_1(v^*) = \int\limits_{v^*}^{v_m} v\,dv \int\limits_{B(v)} (xn_x + yn_y)\,d\sigma;\quad B(v) = \partial W(v)\setminus \overline{F}$$

Здесь v_m — максимальное значение функции v в $\overline{W}$, (n_x, n_y) — внешняя нормаль к $\partial W(v)$. Ясно, что

$$\int\limits_{B(v)} (xn_x + yn_y)\, d\sigma = 2A(v)$$

где $A(v)$ — площадь области $W(v)$.

Согласно классическому изопериметрическому неравенству имеем

$$-\frac{dH_1}{dv^*} = 2v^* A(v^*) \leqslant \frac{v^*}{2\pi} |\partial W(v^*)|^2 \leqslant \frac{2v^*}{\pi} |B(v^*)|^2 \tag{3.3}$$

($|\cdot|$ — длина линии). В то же время в силу неравенства Коши — Буняковского — Шварца можно написать

$$-dH_0/dv^* = v^* \int\limits_{B(v^*)} |\nabla v|^{-1} d\sigma \geqslant v^* \Big[\int\limits_{B(v^*)} d\sigma \Big]^2 \Big/ \int\limits_{B(v^*)} |\nabla v|\, d\sigma =$$
$$= v^* |B(v^*)|^2 \Big/ \Big[- \int\limits_{B(v^*)} \partial v/\partial n\, d\sigma \Big]$$

Вследствие формулы Грина и условия на F из (1.3) знаменатель последнего выражения равен

$$\int\limits_{a_-(v^*)}^{a_+(v^*)} v_y\, dx = -\nu_1^{-1} [v_x(x, 0)]_{x=a_-(v^*)}^{x=a_+(v^*)}$$

где $(a_\pm(v^*), 0)$ — расположенные на F концы линии уровня $B(v^*)$. Благодаря следствию 1 правая часть последнего равенства положительна и не превосходит величины

$$K = 2\nu_1^{-1} \max \{ |v_x(x, 0)| : x \in [a_-, a_+] \}$$

которая конечна согласно лемме 2. Поэтому

$$-dH_0/dv^* \geqslant v^* \, |B(v^*)|_l^2 / K$$

Сопоставляя это неравенство с (3.3), находим, что

$$d\,[H_1 - 2\pi^{-1} K H_0]/dv^* \geqslant 0$$

Интегрирование этого неравенства дает

$$H_1(v_m) - 2\pi^{-1} K H_0(v_m) \geqslant H_1(0) - 2\pi^{-1} K H_0(0)$$

Отсюда, пользуясь определением H_0 и H_1, получаем требуемое неравенство, поскольку $H_0(v_m) = H_1(v_m) = 0$.

Замечание 10. Идея, на которой основано доказательство теоремы 4, использована [14] для оценки снизу первого собственного числа в задаче о колебаниях закрепленной мембраны.

Следствие 6. Пусть v_2 — собственная функция тока, соответствующая собственному значению ν_2. Тогда имеет место неравенство, аналогичное (3.2) при замене ν_1 на ν_2 и v_1 на $|v_2|$.

Доказательство. Если функция v_2 сохраняет знак (положительна), то в силу следствия 1 она имеет единственный максимум, который лежит на F. При этом ее линии уровня имеют вид, показанный на фиг. 3. Тогда для получения требуемого неравенства достаточно дословно повторить доказательство теоремы 4.

Если функция v_2 имеет УЛ (ровно одну согласно теореме 1), то в каждой из УО ее линии уровня имеют вид, показанный на фиг. 3. Тогда в силу доказательства теоремы 4 для каждой из УО W_i $(i = 1, 2)$ получаем неравенство требуемого вида с W_i вместо W. Суммирование этих двух неравенств завершает доказательство следствия 6.

Замечание 11. Использование неравенства $\Sigma a_i^2 \leqslant (\Sigma a_i)^2$, где $a_i \geqslant 0$, и приема, примененного при доказательстве следствия 6 в случае, когда v_2 имеет УЛ, позволяет обобщить неравенство из работы [14] следующим образом. Пусть λ_n — собственное значение, а w_n — отвечающая ему собственная функция задачи о свободных колебаниях закрепленной мембраны. Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\int\limits_D w_n^2\,dx\,dy \leqslant \lambda_n (4\pi)^{-1} \Bigl(\int\limits_D |w_n|\,dx\,dy\Bigr)^2$$

Здесь D — область, которую занимает мембрана в положении равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pleijel A.* Remarks on Courant's nodal line theorem // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. № 3. P. 543—550.
2. *Fox D. W., Kuttler J. R.* Sloshing frequencies // Z. angew. Math. Phys. 1983. V. 34. № 5. P. 668—696.
3. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. *Moisseev N. N.* Introduction to the theory of oscillations of liquid-containing bodies // Advances in Applied Mechanics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1964. V. 8. P. 233—289.
6. *Moisseev N. N., Petrov A. A.* The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container // Advances in Applied Mechanics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1968. V. 9. P. 91—154.
7. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Kuttler J. R.* A nodal line theorem for the sloshing problem // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 6. P. 1234—1237.
10. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
11. *Козлов В. А., Кондратьев В. А., Мазья В. Г.* О знакопеременности и отсутствии «сильных» нулей решений эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1989. Т. 53. № 2. С. 328—344.
12. *John F.* On the motion of floating bodies. II // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. № 1. P. 45—101.
13. *Garabedian P. R.* Partial differential equations. N. Y. et al.: Wiley, 1964. 672 p.
14. *Payne L. E., Rayner M. E.* An isoperimetric inequality for the first eigenfunction in the fixed membrane problem // Z. angew. Math. Phys. 1972. V. 23. № 1. P. 13—15.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.VII.1989