Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 532.525

Н. И. Яворский

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЛАМИНАРНОМ СЛЕДЕ

Развивается обобщенный мультипольный подход, разработанный в теории ламинарных неавтомодельных затопленных струй [1, 2], для задачи о равномерном движении тела в пространстве, затопленном несжимаемой вязкой жидкостью. В качестве нулевого приближения берется точное решение полных уравнений гидродинамики, справедливое в окрестности бесконечно удаленной точки и являющееся точной асимптотикой решения краевой задачи. Для неавтомодельной затопленной струи таким решением является решение Ландау [3]. В случае задачи о ламинарном следе за телом это соответствует постоянным скорости $\mathbf{v}_0$ и давлению p_0, заданным на бесконечности (тело предполагается покоящимся). Согласно мультипольному подходу [1, 2], основой обобщенного мультипольного разложения служит решение линеаризованных на этом точном асимптотическом решении уравнений Навье-Стокса.

Представляя решение полных уравнений Навье-Стокса в окрестности бесконечно удаленной точки в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w},\ p = p_0 + q, \quad \mathbf{w} = o(|\mathbf{v}_0|) \tag{0.1}$$

получим уравнения для возмущений $\mathbf{w}$, q (плотность жидкости принимается равной единице)

$$\begin{gathered}\nu\Delta\mathbf{w} - (\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{w} - \nabla q = (\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{w}, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0\\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_*, \quad \mathbf{x} \in \Sigma\ (\mathbf{w}_* = \mathbf{v}_*(\mathbf{s}) - \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{s} \in \Sigma)\end{gathered} \tag{0.2}$$

где $\mathbf{w}_*$ — заданная скорость на поверхности тела Σ.

В первом приближении, поскольку $\mathbf{w} = O(v_0)$, можно пренебречь нелинейным членом в правой части (0.2), в результате приходим к известным уравнениям Озеена [4]

$$\nu\Delta\mathbf{w}_0 - (\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{w}_0 - \nabla q = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{w}_0 = 0 \tag{0.3}$$

Зная общее решение уравнений (0.3), можно построить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям на поверхности тела. Затем итерациями по нелинейности в (0.2) можно получить соответствующее асимптотическое разложение в бесконечно удаленной точке.

Озееном было построено фундаментальное решение уравнений (0.3) в виде «тензора скорости» $E_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ и вектора давления $e_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ [5]

$$E_{ij} = \delta_{ij}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad e_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}[\nu\Delta\Phi - (\mathbf{v}_0, \nabla\Phi)] \tag{0.4}$$

$$\Phi = -\frac{1}{8\pi\sigma\nu}\int\limits_0^{\sigma s}\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha, \quad 2\nu\sigma = |\mathbf{v}_0|, \quad s = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \mathbf{n}_0\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{v}_0|}$$

Решение задачи Озеена (0.3), когда на поверхности тела задана скорость $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_*(\mathbf{s})$, может быть определено из системы интегральных уравнений Фредгольма [6, 7], полученных при помощи фундаментального решения (0.4).

Для задачи обтекания в рамках полных уравнений Навье-Стокса доказана теорема существования [8, 9] и единственности [8] для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_0 r_0/\nu$ (r_0 — размер тела) в некоторой окрестности нуля: $\mathrm{Re} \in [0, \mathrm{Re}_*]$, $\mathrm{Re}_* > 0$. Доказана теорема существования обобщенного решения без ограничения на число Re для стационарной задачи обтекания n тел при условии равенства нулю суммарного расхода от обтекаемых тел. Представляет интерес поведение решения при $|\mathbf{x}| = r \to \infty$. Было показано [8], что если $|\mathbf{w}(\mathbf{x})| \leqslant Cr^{-\alpha}$, $\alpha > 1/2$, $C > 0$, то вдали от тела

$$\begin{gathered}v_i(\mathbf{x}) = v_{0i} + a_j E_{ij}(\mathbf{x}) + b e_i(\mathbf{x}) + \sigma_i(\mathbf{x})\\ \sigma_i(\mathbf{x}) = O(r^{-3/2}\ln(\sigma r)), \quad a_i, b = \mathrm{const}\end{gathered} \tag{0.5}$$

Следует отметить, что разложение (0.5) формально не имеет ограничения по числу Рейнольдса, существенно лишь, что $r \gg r_0$. Было показано [10], что представление (0.5) имеет место для любой задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле от полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$. Учитывая, что теоремы существования обеспечивают ограниченность интеграла Дирихле, можно считать, что разложение (0.5) справедливо для любой стационарной задачи обтекания. Были получены [11] дальнейшие оценки:

$$\sigma_i(\mathbf{x}) = v_i^{3/2}(\mathbf{x}) + O(r^{-2}\ln^3(\sigma r)), \quad v_i^{3/2} = O(r^{-3/2}\ln(\sigma r)) \tag{0.6}$$

В настоящей работе показано, что первые члены асимптотического разложения поля скорости и давления выражаются через точные интегралы сохранения: потоки импульса, массы, момента количества движения и высшие моменты этих величин. Получены в явном виде второй и третий члены разложения, определяемые этими интегралами. Дальнейшие члены разложения не являются столь универсальными и зависят от конкретной постановки краевой задачи обтекания. Уточнены асимптотическое разложение для завихренности, полученное в [11], и оценка остаточного члена.

1. Будем исходить из интегральных соотношений, которые можно получить из уравнений Навье-Стокса (0.1), (0.2), обращая оператор Озеена (0.3), которые запишем в виде

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_E w_i w_j \frac{\partial}{\partial x_k} E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y + \\ + \int_\Sigma \{E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})(v_{0j}v_k - \Pi_{jk}) + w_j T_{ijk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}\, n_k dS \tag{1.1}$$

$$q(\mathbf{x}) = \int_E w_i w_j \frac{\partial}{\partial x_k} e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y + \\ + \int_\Sigma \{e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})(v_{0j}v_k - \Pi_{jk}) + w_j T_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}\, n_k dS \tag{1.2}$$

$$T_{ijk} = \nu\left(\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j}\right) - e_i\delta_{jk}, \quad T_{jk} = \nu\left(\frac{\partial e_j}{\partial x_k} + \frac{\partial e_k}{\partial x_j}\right) - e^*\delta_{jk} \\ \Pi_{ij} = v_i v_j + p\delta_{ij} - \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{1.3}$$

где Π_{ij} — тензор потока импульса, E — объем, занимаемой жидкостью, Σ — поверхность тела, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль, $E_{ij}(\mathbf{x})$, $e_i(\mathbf{x})$, $e^*(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}_0, \nabla(1/r))$ — фундаментальное решение задачи Озеена (0.4).

Интегральное представление (1.1)—(1.3) составляет основу предлагаемого мультипольного разложения.

Объемные интегралы в (1.1), (1.2) при $r \to \infty$ имеют асимптотику [8]

$$I_i(\mathbf{x}) = \int_E w_i w_j \frac{\partial}{\partial x_k} E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y = O(r^{-3/2}\ln(\sigma r)) \\ I(\mathbf{x}) = \int_E w_i w_k \frac{\partial}{\partial x_k} e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y = O(r^{-3}\ln(\sigma r)) \tag{1.4}$$

в то время как поверхностные интегралы

$$K_i(\mathbf{x}) = \int_\Sigma \{E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})(v_{0j}v_k - \Pi_{jk}) + w_j T_{ijk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}\, n_k dS = O(1/r) \\ K(\mathbf{x}) = \int_\Sigma \{e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})(v_{0j}v_k - \Pi_{jk}) + w_j T_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}\, n_k dS = O(1/r^2) \tag{1.5}$$

Поскольку тело ограничено и может быть заключено в шар Ω_0 радиуса r_0, то при достаточно больших $r = |\mathbf{x}|$ и условии $|\mathbf{y}| \leqslant r_0$ функции E_{ij}, e_j в подынтегральных выражениях (1.5) можно разложить в абсолютно сходящееся ряды Тейлора. Подставляя эти ряды в (1.5), получим

(суммирование по n от 1 до ∞)

$$K_i(\mathbf{x}) = a_j E_{ij}(\mathbf{x}) + \Sigma a_{jk_1\ldots k_n} \frac{\partial^n E_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_n}} + b e_i(\mathbf{x}) + \Sigma b_{k_1\ldots k_n} \frac{\partial^n e_i(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_n}} \tag{1.6}$$

$$K(\mathbf{x}) = a_j e_j(\mathbf{x}) + \sum a_{jk_1\ldots k_n} \frac{\partial^n e_j(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_n}} + \\ + b e^*(\mathbf{x}) + \sum b_{k_1\ldots k_n} \frac{\partial^n e^*(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_n}} \tag{1.7}$$

$$a_{jk_1\ldots k_n} = \frac{(-1)^n}{n!} \oint_\Sigma [(v_{0j}v_l - \Pi_{jl}) n_l y_{k_1} - nv(w_j n_{k_1} + w_{k_1} n_j)] y_{k_2}\ldots y_{k_n} dS \tag{1.8}$$

$$b_{k_1\ldots k_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \oint_\Sigma w_l n_l y_{k_1}\ldots y_{k_n} dS$$

Величины a_i, b можно представить в виде

$$\mathbf{a} = Q\mathbf{v}_0 - \mathbf{J}, \quad b = -Q \tag{1.9}$$

где $\mathbf{J}$ — полный поток импульса от тела, Q — расход жидкости, выбрасываемой телом.

Можно показать, что полученные разложения (1.6), (1.7) сходятся в силу ограниченности w_i и Π_{ij} на поверхности тела. Отметим, что ряды (1.6), (1.7) построены так, что в суммах каждый последующий член — величина более высокого порядка малости по $1/r$, чем предыдущий. Это можно получить из асимптотических оценок $\nabla^n E_{ij} = O(r^{-1-n/2})$, $\nabla e_i = O(r^{-n-2})$.

Ряды (1.6) по аналогии с уравнением Лапласа можно назвать мультипольным разложением решения задачи о стационарном обтекании тела. В таком случае величины $a_{jk_1\ldots k_n}$, $b_{k_1\ldots k_n}$ — интенсивности соответствующих мультиполей n-го порядка. Следует отметить, что построенное разложение не есть простое следствие решения уравнений Озеена, как это можно было бы ожидать для решения уравнений Навье-Стокса при $r \gg r_0$. Коэффициенты разложений (1.8) зависят от скорости нелинейным образом. Поэтому, чтобы определить $a_{jk_1\ldots k_n}$, необходимо знать решение всей нелинейной краевой задачи обтекания.

Учитывая асимптотическую малость объемных интегралов (1.4) при $r \to \infty$ относительно поверхностных интегралов (1.5), можно построить полное разложение решения задачи интерациями по нелинейности, содержащейся в объемных интегралах $I_i(\mathbf{x})$, $I(\mathbf{x})$. За нулевое приближение естественно принять

$$\mathbf{w}^\circ(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}), \quad q^\circ(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}) \tag{1.10}$$

т. е. аддитивную часть полного решения (1.1), (1.2), отвечающую поверхностным интегралам. На таком подходе основано доказательство существования и единственности в работе [8], в которой показано, что аналогичные итерации сходятся к решению краевой задачи, если число Рейнольдса Re достаточно мало. Таким образом, этот путь приводит к построению точного решения уравнений Навье-Стокса для задачи обтекания в виде мультипольного разложения в бесконечно удаленной точке.

2. Предполагаем, что решение $\mathbf{w}^\circ(\mathbf{x})$, $q^\circ(\mathbf{x})$ известно. Это эквивалентно заданию всех интенсивностей мультиполей $a_{jk_1\ldots k_n}$, $b_{k_1\ldots k_n}$ (счетного

числа постоянных). Уравнения (1.3), (1.4) при учете (1.7), (1.9) имеют вид

$$
\begin{gathered}
w_i(\mathbf{x}) = w_i^\circ(\mathbf{x}) + \int\limits_E w_i w_j \frac{\partial}{\partial x_k} E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y \\
q(\mathbf{x}) = q^\circ(\mathbf{x}) + \int\limits_E w_i w_k \frac{\partial}{\partial x_k} e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Первое уравнение (2.1) автономно, поэтому метод последовательных приближений достаточно применить лишь к этому уравнению, что приводит к рекуррентной системе уравнений

$$
w_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} W_i^n(\mathbf{x}) \tag{2.2}
$$

$$
w_i^{n+1}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_E w_j^l w_k^{n-l} \frac{\partial}{\partial x_k} E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
$$

Следует отметить, что построение решения в виде (2.2) уже не дает последовательность членов все более высокого по $1/r$ порядка малости, поэтому для построения разложения в бесконечно удаленной точке в замкнутой форме необходим иной подход.

Учитывая, что интегральные операторы в (2.1) имеют вид свертки, удобно сделать преобразование Фурье. Обозначим $W_i(\mathbf{k})$, $P(\mathbf{k})$, $A_{ij}(\mathbf{k})$ фурье-образы величин $w_l(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$, $E_{ij}(\mathbf{x})$. Полагая $w_i(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $\mathbf{x} \in B^0$, где B — область, занимаемая телом, B^0 — ее внутренность, имеем

$$
W_i(\mathbf{k}) = \int\limits_{E^3\setminus B^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} w_i(\mathbf{x})\, d^3x, \quad E^3\setminus B^\circ = E
$$

$$
A_{ij}(\mathbf{k}) = \int\limits_{E^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} E_{ij}(x)\, d^3x = \frac{k_i k_j - k^2\delta_{ij}}{\nu k^2 [k^2 - 2i\sigma(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_0)]}
$$

Преобразование Фурье уравнений (2.1) дает

$$
\begin{gathered}
W_l(\mathbf{k}) = W_l^0(\mathbf{k}) - iA_{lm}(\mathbf{k}) k_n B_{mn}(\mathbf{k}) \\
P(\mathbf{k}) = P^0(\mathbf{k}) - k_n k_m k^{-2} B_{mn}(\mathbf{k})
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

$$
B_{ij}(\mathbf{k}) = \int\limits_{E^3\setminus B^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} w_i(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{x})\, d^3x = (2\pi)^{-3} \int\limits_{K^3} W_i(\mathbf{p}) W_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\, d^3p
$$

Система уравнений (2.3) значительно проще исходной (2.1), хотя уравнения (2.3) остаются интегральными. Величины $W_i^\circ(\mathbf{k})$, $P^\circ(\mathbf{k})$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
W_l^\circ(\mathbf{k}) = A_{lj}(\mathbf{k}) M_k(\mathbf{k}) - ik_l k^{-2} M(\mathbf{k}) \\
P^\circ(\mathbf{k}) = -ik_l k^{-2} M_l(\mathbf{k}) - ik_l v_{0l} \mathbf{k}^{-2} M(\mathbf{k})
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где $M_j(\mathbf{k})$, $M(\mathbf{k})$ — аналитические в окрестности $k = 0$ функции

$$
\begin{gathered}
M_j(\mathbf{k}) = a_j + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n a_{jl_1\ldots l_n} k_{l_1} \ldots k_{l_n} \\
M(\mathbf{k}) = b + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n b_{l_1\ldots l_n} k_{l_1} \ldots k_{l_n}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Сравнивая структуру разложений (1.3), (1.7) с (2.4), (2.5), отметим соответствие по порядку малости членов при $r \to \infty$ и при $\mathbf{k} \to 0$. Таким образом, разлагая тензор $B_{ij}(k)$ в ряд при $\mathbf{k} \to 0$ в (2.3) можно получить нужное полное мультипольное разложение решения в фурье-пространстве.

Согласно теореме Финна [12], кинетическая энергия возмущенного движения, т. е. определенная при помощи $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, бесконечна. Это означает, что $B_{ll}(0) = \infty$. Следовательно, тензор $B_{ij}(\mathbf{k})$ — неаналитическая функция при $\mathbf{k} = 0$. Тем не менее можно построить необходимое разложение $B_{ij}(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to \infty$, выделив соответствующую особенность у этого тензора. Для выявления характера этой особенности можно воспользоваться методом последовательных приближений (2.2), совершив над уравнениями (2.2) преобразование Фурье

$$W_j^{n+1}(\mathbf{k}) = -iA_{jl}(\mathbf{k})\, k_m B_{lm}^n(\mathbf{k})$$

$$B_{ij}^n(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \sum_{l=0}^{n} \int_{K^3} W_i^{n-l}(\mathbf{p})\, W_j{}^l(\mathbf{k}-\mathbf{p})\, d^3p$$

3. Ответственными за расходимость интеграла кинетической энергии являются главные члены разложения при $r \to \infty$ (0.5), поскольку расходимость в силу ограниченности поля скорости $w_i(\mathbf{x})$ может наблюдаться только на верхнем пределе интеграла при $r = \infty$. Учитывая это, рассмотрим интеграл

$$B_{ij}^{\circ\circ}(k) = a_k a_l \int_{K^3} A_{ij}(\mathbf{p})\, A_{jl}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\, d^3p \tag{3.1}$$

где в качестве нулевого приближения принят фурье-образ главного члена разложения $a_j E_{ij}(\mathbf{x})$.

Определим тензор

$$R_{ijkl}(\mathbf{k}) = \int_{K^3} A_{ij}(\mathbf{p})\, A_{kl}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\, d^3p = \int_{K^3} \frac{(\delta_{ij} - m_i m_j)(\delta_{kl} - \tau_k \tau_l)}{(p^2 - 2i\sigma p_3)[(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 - 2i\sigma(k_3 - p_3)]}\, d^3p$$

$$m_i = \frac{p_i}{p}, \quad \tau_i = \frac{k_i - p_i}{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|}, \quad n_i = \frac{k_i}{k}, \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0) \tag{3.2}$$

Ось координат p_3 направлена вдоль скорости $\mathbf{v}_0$. Поскольку

$$|\delta_{ij} - m_i m_j|, \quad |\delta_{kl} - m_k m_l| \leqslant 1$$

то для выяснения характера расходимости $R_{ijkl}(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to 0$ достаточно рассмотреть интеграл

$$\alpha(\mathbf{k}) = \int_{K^3} \{(p^2 - 2i\sigma p_3)[(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 - 2i\sigma p(k_3 - p_3)]\}\, d^3p \tag{3.3}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (\sin\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta) \\ \mathbf{n} &= (\sin\theta_0\cos\varphi_0, \quad \sin\theta_0\sin\varphi_0, \ \cos\theta_0) \\ p_3 &= p\cos\theta, \quad k_3 = k\cos\theta_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тогда (3.3) можно представить в виде

$$\alpha(\mathbf{k}) = \int_0^\infty p\,dp \int_{-1}^{1} \frac{dx}{p - 2i\sigma x} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c_1 + c_2\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= p^2 + k^2 - 2i\sigma k x_0 + 2p(i\sigma - kx_0)\,x \\ c_2 &= -2kp\sqrt{(1 - x_0^2)(1 - x^2)}, \quad x = \cos\theta, \quad x_0 = \cos\theta_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

При условии $k \ll \sigma$, $x_0 \neq 0$ или $1 - x_0^2 \ll 1$, это имеет место в области дальнего следа, поскольку он имеет параболоидальную форму, выражение (3.5) после интегрирования по частям можно представить в виде

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= -\frac{\pi^2}{4\sigma} \ln\frac{k^2 - 2i\sigma k x_0}{8\sigma^2} + \frac{\pi c_0}{2\sigma}\sqrt{\frac{k^2 - 2i\sigma k x_0}{8\sigma^2}} + O(k) \\ c_0 &= \int_0^\infty \frac{\ln(1 + y^2)}{y^2}\, dy \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, установлена логарифмическая расходимость тензора $B_{ij}(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to \infty$. Это утверждение уточняет теорему Финна о расходимости интеграла от кинетической энергии возмущенного движения, получаемую здесь как следствие соотношения (3.7). Отметим, что разложение (3.7) содержит не только логарифмический член, но и дробные (полуцелые) степени k, что существенным образом должно сказаться на разложении решения в ряд по производным типа (1.6), (1.7). Такое разложение потребует применения аппарата дробного дифференцирования [13].

Уточним поведение тензора R_{ijkl} (k) при $\mathbf{k} \to \infty$, для чего запишем его в виде

$$R_{ijkl}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})\,\delta_{ij}\delta_{kl} - \alpha_{ij}(\mathbf{k})\,\delta_{kl} - \alpha_{kl}(\mathbf{k})\,\delta_{ij} - \alpha_{ijkl}(\mathbf{k}) \qquad (3.8)$$

$$\alpha(\mathbf{k}) = \int\limits_{K^3} \frac{d^3p}{F(\mathbf{k},\mathbf{p})}, \quad \alpha_{ij}(\mathbf{k}) = \int\limits_{K^3} \frac{m_i m_j}{F(\mathbf{k},\mathbf{p})}\, d^3p$$

$$\alpha_{ijkl}(\mathbf{k}) = \frac{m_i m_j \tau_k \tau_l}{F(\mathbf{k},\mathbf{p})}\, d^3p, \quad \alpha_{ijkl} = \alpha_{klij} \qquad (3.9)$$

$$F(\mathbf{k},\mathbf{p}) = (p^2 - 2i\sigma p_3)\,[(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 - 2i\sigma\,(k_3 - p_3)]$$

Величина α (k) совпадает с (3.3) и была уже исследована ранее. Представление (3.8), (3.9) получено из (3.2) с использованием свойств свертки.

Рассмотрим тензор

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}) = \int\limits_0^\infty p\,dp \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{p - 2i\sigma} \int\limits_0^{2\pi} \frac{m_i m_j\, d\varphi}{c_1 + c_2\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (x = \cos\theta) \qquad (3.10)$$

В случае $k \ll \sigma$, $x_0 \neq 0$ из (3.6) следует, что в знаменателе подынтегрального выражения (3.10) можно пренебречь величиной c_2. После интегрирования по φ и x приходим к выражению

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})\,\delta_{ij}\lambda_{(j)} + \frac{\pi^2}{4\sigma}\,\delta_{ij}\nu_{(j)} + O(k^{1/2})$$
$$\lambda = (1/2,\ 1/2,\ 0), \quad \nu = (-1,\ -1,\ 2) \qquad (3.11)$$

Рассмотрим тензор α_{ijkl} (k). Можно показать, используя определение α_{ijkl} в (3.9), что

$$\alpha_{ijkl}(\mathbf{k}) = \mathring{\alpha}_{ijkl}(\mathbf{k}) + O(k), \quad \mathring{\alpha}_{ijkl}(\mathbf{k}) = \int\limits_{K^3} \frac{m_i m_j m_k m_l}{F(\mathbf{k},\mathbf{p})}\, d^3p \qquad (3.12)$$

Подобно тому, как это было сделано при вычислении α_{ij} (k), при $k \ll \sigma$, $x_0 \neq 0$ в выражении

$$\mathring{\alpha}_{ijkl}(\mathbf{k}) = \int\limits_0^\infty p\,dp \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{p - 2i\sigma x} \int\limits_0^{2\pi} \frac{m_i m_j m_k m_l}{c_1 + c_2\cos(\varphi - \varphi_0)}\, d\varphi \qquad (3.13)$$

можно пренебречь величиной c_2 (3.6).

Обозначим

$$m_{ijkl} = \int\limits_0^{2\pi} m_i m_j m_k m_l\, d\varphi \qquad (3.14)$$

Можно показать, что отличными от нуля компонентами m_{ijkl} будут только $m_{(ij)(ij)}$, $m_{(ij)(ij)}$, $m_{(ii)(jj)}$ (суммирование по повторяющимся индексам не производится). Прямое вычисление дает

$$m_{ijkl} = M_{(ij)}(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + M_{(jk)}\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$M_{11} = M_{22} = 3(1 - x^2)^2/8, \quad M_{33} = x^4, \quad x = \cos\theta \qquad (3.15)$$
$$M_{11} = M_{21} = (1 - x^2)^2/8, \quad M_{13} = M_{31} = M_{23} = M_{32} = 1/2x^2\,(1 - x^2)$$

Выполняя интегрирование, из (3.13)—(3.15) находим

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ijkl}(\mathbf{k}) = \left[\alpha(\mathbf{k})\Lambda_{(ij)} + \frac{\pi^2}{4\sigma}N_{(ij)}\right](\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \\ + \left[\alpha(\mathbf{k})\Lambda_{(jk)} + \frac{\pi^2}{4\sigma}N_{(jk)}\right]\delta_{ij}\delta_{kl} + O(k^{1/2}) \tag{3.16}$$

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = {}^3/_8,\ \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = {}^1/_8,\ \Lambda_{13} = \Lambda_{31} = \Lambda_{23} = \Lambda_{32} = \Lambda_{33} = 0$$

$$N_{11} = N_{22} = -{}^9/_8,\ N_{12} = N_{21} = -{}^3/_8,\ N_{13} = N_{31} = N_{23} = N_{32} = \\ = {}^1/_2,\quad N_{33} = 1$$

Окончательно из (3.1), (3.2), (3.8), (3.11), (3.12), (3.16) имеем

$$B_{ij}^{\circ\circ}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha(\mathbf{k})}{(2\pi)^3\nu^2}G_{ij}(\mathbf{a}) + \frac{1}{32\pi\sigma\nu^2}K_{ij}(\mathbf{a}) + O(k^{1/2}) \tag{3.17}$$

$$G_{11} = \frac{9a_1^2 + a_2^2}{8},\quad G_{12} = G_{21} = \frac{a_1a_2}{4},\quad G_{13} = G_{31} = \frac{a_1a_3}{2}$$

$$G_{22} = \frac{a_1^2 + 9a_2^2}{8},\quad G_{33} = a_3^2$$

$$K_{11} = \frac{-11a_1^2 - 3a_2^2 + 4a_3^2}{8},\quad K_{12} = K_{21} = -\frac{5a_1a_2}{4}$$

$$K_{22} = \frac{-3a_1^2 - 11a_2^2 + 4a_3^2}{8}$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{23} = K_{32} = 0,\quad K_{33} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2}{2}$$

Вторая и последующие итерации по нелинейности не приводят к появлению логарифмически расходящихся членов, но все они дают вклад в член $O(1)$. Таким образом, имеет место следующее разложение:

$$B_{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{32\pi\sigma\nu^2}G_{ij}(\mathbf{a})\,ln\,\frac{k^2 - 2i\sigma kx_0}{8\sigma^2} + \frac{1}{32\pi\sigma\nu^2}K_{ij}(\mathbf{a}) + \overset{\circ}{p}_{ij} + O(k^{1/2}) \tag{3.18}$$

где p_{ij}° — перенормированный средний тензор потока импульса возмущенного движения

$$\mathrm{Real}\,\overset{\circ}{p}_{ij} = \overset{\circ}{P}_{ij} = \int_E (w_iw_j - a_ka_lE_{ik}E_{jl})\,d^3x \tag{3.19}$$

4. Как уже указывалось, асимптотику решения задачи обтекания тела можно получить из асимптотического разложения фурье-образа скорости движения жидкости $W_i(\mathbf{k})$ в пределе $\mathbf{k} \to \infty$. Подставляя асимптотическое представление тензора $B_{ij}(\mathbf{k})$ (3.18) в уравнение (2.6), при учете соотношений (2.9), (2.11) получим

$$W_l(\mathbf{k}) = A_{lm}(\mathbf{k})\,\{a_m - ik_nG_{mn}(\mathbf{a})\,(2\pi)^{-3}\nu^{-2}a(\mathbf{k}) - ik_n\,[a_{mn} + \\ + {}^1/_4\pi^2\sigma^{-1}\nu^{-2}K_{mn}(\mathbf{a}) + p_{mn}^{\circ}]\} - ik_lk^{-2}(b - ik_nb_n) + O(k^{1/2}) \tag{4.1}$$

Поскольку множитель $-ik_j$ при обратном фурье-преобразовании переходит в производную $\partial/\partial x_j$, то для получения асимптотического разложения $w_i(\mathbf{x})$ достаточно исследовать преобразование Фурье для функций $A_{ij}(\mathbf{k})\,\alpha(\mathbf{k})$. Величина $A_{ij}(\mathbf{k})$ является фурье-образом тензора скорости $E_{ij}(\mathbf{x})$.

Пусть тензор $U_{ij}(\mathbf{x})$ имеет фурье-образ $A_{ij}(\mathbf{k})\,\alpha(\mathbf{k})$. Принимая во внимание выражение для $A_{ij}(\mathbf{k})$, тензор $U_{ij}(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$U_{ij} = \delta_{ij}\Delta U - \partial^2 U/\partial x_i\partial x_j \tag{4.2}$$

где функция $U(\mathbf{x})$ имеет фурье-образ

$$D(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})\,[\nu k^2(k^2 - 2i\sigma\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_0)]^{-1}$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$L\Delta U = \chi(\mathbf{x}),\quad L = \Delta - 2\sigma(\mathbf{n}_0, \nabla) \tag{4.3}$$

где функция $\chi(\mathbf{x})$ имеет фурье-образ

$$h(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})/\nu$$

Из выражения для $a(\mathbf{k})$ (3.3) получим

$$\alpha(\mathbf{k}) = \int d^3p H(\mathbf{k}) H(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \quad H(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - 2i\sigma\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_0}$$

Отсюда обратное преобразование Фурье дает

$$\Delta F - 2\sigma(\mathbf{n}_0, \nabla F) = -\delta(\mathbf{x}), \quad F(\mathbf{x}) = \frac{e^{-\sigma s}}{4\pi r}$$

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int H(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k$$

и

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi^2)^3}\int n(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k = (2\pi^2)^3 F^2(\mathbf{x}) = \frac{\pi e^{-2\sigma s}}{2\nu r^2} \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) вытекает, что

$$\Delta U = f, \quad \Delta f - 2\sigma(\mathbf{n}_0, \nabla f) = {}^1/{}_2\pi e^{-2\sigma s}/(\nu r^2) \tag{4.5}$$

Разыскивая решение уравнения (4.5) методом разделения переменных, можно получить

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{\pi}{4\nu\sigma}\,\frac{e^{-\sigma s}\ln(\sigma r)}{r} - \frac{2\pi^2}{r}e^{-\sigma s}\Phi(s) -$$

$$-\frac{\pi}{4\nu\sigma}\,\frac{e^{-\sigma s}}{r}e^{2\sigma r}\int\limits_{\sigma r}^{\infty}\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}d\alpha + f_0(\mathbf{x}) \tag{4.6}$$

где $f_0(\mathbf{x})$ — решение однородного уравнения (4.5). В дальнейшем член $f_0(\mathbf{x})$ не учитывается, поскольку он фактически содержится в решении для поля скорости в членах, соответствующих разложению поверхностного интеграла.

Аналогичным образом интегрируя уравнения $\Delta U = f$, можно получить асимптотическое разложение

$$U(\mathbf{x}) = \frac{\pi^2}{\sigma}\Phi(s)\ln(\sigma r) - \pi^2\int\limits_0^s\frac{d\alpha}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}e^{-\sigma\beta}\Phi(\beta)\,d\beta +$$

$$+\frac{\pi^2}{2\sigma r}\left[2\int\limits_0^s\Phi\,ds - \int\limits_0^s\frac{d\alpha}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}e^{-\sigma\beta}\Phi(\beta)\,d\beta\right] + \sum_{n=2}^{\infty}S_n(s)\,r^{-n} \tag{4.7}$$

Дальнейшие члены ряда следуют из уравнения

$$(sS_n')' = (n-1)\,[2sS_{n-1} + (n-2)\,S_{n-1}], \quad n \geqslant 2 \tag{4.8}$$

разрешаемого рекуррентно. В соотношении (4.7) опущено решение однородного уравнения Лапласа по указанной выше причине. При помощи формул (4.2), (4.7) можно получить асимптотическое представление тензора $U_{ij}(\mathbf{x})$.

Вернемся к фурье-образу $W_i(\mathbf{k})$ (4.1). Производя обратное преобразование Фурье, найдем асимптотическое представление поля скорости в виде

$$w_i(\mathbf{x}) = a_j E_{ij}(\mathbf{x}) + \left(b + b_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{32\pi\sigma\nu^2}G_{jl}(\mathbf{a})\frac{\partial}{\partial x_l}U_{ij}(\mathbf{x}) +$$

$$+\left[a_{jl} + \frac{1}{32\pi\sigma\nu^2}K_{jl}(\mathbf{a}) + \mathring{P}_{jl}\right]\frac{\partial}{\partial x_l}E_{ij}(\mathbf{x}) + O\left(\frac{\ln^3\sigma r}{r^2}\right) \tag{4.9}$$

Остаточный член в (4.9) фактически получен в работе [11], поскольку для получения этой оценки не требуется сделанного в этой работе дополнительного предположения о коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}_0$.

Представляет интерес получить асимптотическое выражение для поля завихренности. Предварительно заметим, что «градиентные слагаемые» $\partial U_{ij}^2/\partial x_i \partial x_j$ в U_{ij} и $\partial \Phi_{ij}^2/\partial x_i \partial x_j$ в E_{ij} (0.4), (4.2) не дадут вклада в rot $\mathbf{v}$. Член $\delta_{ij}\Delta U$ определяется выражением (4.6), а $\Delta\Phi = -e^{-\sigma s}/(4\pi\nu r)$. Отсюда можно получить асимптотическое разложение для завихренности

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\nu} e_{ijk} \frac{\partial s}{\partial x_j} a_k \frac{e^{-\sigma s}}{r} + e_{ijk} \frac{G_{jl}(\mathbf{a})}{32\pi\sigma\nu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} -$$
$$-e_{ijk}\left[a_{jl} + \frac{1}{32\pi\sigma\nu^2} K_{jl}(\mathbf{a}) + \overset{\circ}{P}_{jl}\right] \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \frac{e^{-\sigma s}}{4\pi\nu r} + \tag{4.10}$$
$$+ O\left(\frac{\ln^3 \sigma r}{r^{5/2}} e^{-\sigma(1-\varepsilon)s}\right), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

где e_{ijk} — антисимметричный тензор Леви—Чивиты.

Характерно, что все члены этого выражения экспоненциально $\sim e^{-\sigma s}$ затухают вне следа ($s \to \infty$). Оценку остаточного члена можно получить, используя результат работы [11] об экспоненциальном затухании вихря вне следа в виде $\boldsymbol{\omega} \sim \varphi(r)\, e^{-\sigma(1-\varepsilon)s}$ и оценку остаточного члена для скорости (4.9), учтя при этом, что производная по координате фундаментальных тензоров E_{ij}, U_{ij} и т. п. дает в оценке лишь множитель $(s/r)^{1/2}$ ($(\nabla s)^2 = 2s/r$). Обоснование оценки остаточного члена в (4.10) можно получить при помощи предложений 2 и 3 упомянутой работы. Из (4.10) вытекает уточнение оценки для $\omega_i(\mathbf{x})$, данной в [11], в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\nu} (\nabla s \times \mathbf{a}) \frac{e^{-\sigma s}}{r} + O\left((1 + \sigma s)\, e^{-\sigma s} r^{-2} \ln(\sigma r)\right) \tag{4.11}$$

Следует отметить, что асимптотическое разложение, приведенное в работе [14], не дает экспоненциального затухания вихря вне следа. Это связано с грубостью, полученной в [14], асимптотики второго члена разложения. Настоящий подход свободен от этого недостатка и позволяет найти все члены асимптотического разложения, выражающиеся через точные интегралы сохранения.

Таким образом, получено асимптотическое разложение поля скорости для дальнего ламинарного следа при обтекании тела произвольной формы, уточняющее результаты работ [11, 14]. В явном виде указаны второй и третий члены асимптотического разложения, выражающиеся как и в первый член разложения (0.5) через интегралы сохранения. Это делает представление (4.9) универсальным и позволяет по характеристикам течения в окрестности тела определить три главных члена асимптотического разложения для дальнего следа и, наоборот, по распределению скорости в следе можно получить ряд конкретных характеристик, относящихся к телу. В частности, при помощи первых трех членов разложения можно получить не только силу сопротивления, но и его коэффициент сопротивления, что немаловажно в некоторых практических приложениях. С другой стороны, тот факт, что главные члены разложения выражаются через точные интегралы сохранения позволяет применять его не только для случая обтекания тела, характеризуемого стоком импульса, но и для ряда других гидродинамических задач, характеризующихся источником импульса: о распределении струи в спутном потоке; о струе, направленной под углом к потоку, о движении тела с реактивной тягой и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М. А., Яворский Н. И.* О затопленных струях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 573—583.
2. *Яворский Н. И.* Неосесимметричные затопленные струи // ПММ. 1988. Т. 50. Вып. 5. С. 760—772.
3. *Ландау Л. Д.* Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299—301.
4. *Oseen C. W.* Über die Stokes Formel, und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik // Ark. Mat. Astronom. Fys. 1910. Bd. 6. № 11. 20 s.
5. *Oseen C. W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. 132 s.
6. *Faxen H.* Fredholmsche Integraleichungen zur der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten // Ark. Mat. Astronom. Fys. 1928/29. Bd. A21. № 14. S. 1—20.
7. *Oseen C. W.* Das hydrodynamische Randwertproblem // Z. angew. Math. Mech. 1930. Bd. 10. H. 4. S. 314—326.
8. *Finn R.* On the exterior stationary problem for the Navier — Stokes equations, and associated perturbation problems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 19. No 5. P. 363—406.
9. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
10. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Мат. сб. 1973. Т. 91. № 1. С. 3—26.
11. *Бабенко К. И., Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 690—705.
12. *Финн Р.* Стационарные решения уравнений Навье-Стокса / Новосибирск: Ин-т гидродин. СО АН СССР, 1967. 53 с.
13. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 668 с.
14. *Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении скорости и силах, действующих на тело, в стационарном потоке вязкой жидкости // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 84—91.

Новосибирск

Поступила в редакцию 27.III.1989