Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 531.36 : 534.1

Л. Э. Каплан

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ, НАГРУЖЕННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Рассматривается задача о колебаниях однородной неограниченной струны, нагруженной движущейся по заранее неизвестному закону сосредоточенной массой, представляющая собой одну из простейших модельных самосогласованных задач (СЗ) динамики одномерных распределенных нагруженных лагранжевых систем [1]. Дается математическая постановка задачи, приводятся условия существования и единственности глобального решения, предлагается аналитический метод, позволяющий в ряде случаев получить точное решение. В качестве иллюстрации рассматривается перемещение сосредоточенной массы вдоль колеблющейся струны, возбужденной некоторым импульсом, сообщаемым массе. Выявляются некоторые эффекты, связанные с обратным действием излучения движущейся сосредоточенной массы (торможение излучением).

СЗ возникают в случаях, когда сосредоточенные факторы (сосредоточенные нагрузки, массы, электрические заряды и т. д.), находящиеся в распределенной нагруженной лагранжевой системе, не только подвергаются воздействию со стороны этой системы, но и сами влияют на нее. Учет указанного взаимодействия в постановках СЗ позволяет выявить некоторые эффекты, которые обычно не учитываются [2]. СЗ сводятся к краевой задаче в области с движущейся и неизвестной заранее границей (задача со свободной границей [3]). Корректность постановок СЗ, несмотря на всю их физическую естественность, в полном объеме не доказана; методы аналитического решения этих задач фактически не разработаны.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из однородной неограниченной струны с линейной плотностью ρ, находящейся над натяжением μ, и шарика массы m, нанизанного на струну. Предположим, что в состоянии покоя струна прямая и располагается на оси x, и пусть струна способна совершать малые поперечные колебания в плоскости xu, а шарик способен перемещаться без трения вдоль струны. Задавая начальную конфигурацию и начальную скорость системы, требуется найти ее движение на промежутке времени $0 \leqslant t < +\infty$.

Процесс колебаний струны описывается, таким образом, некоторой функцией $u(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t \geqslant 0$, а движение шарика — вектор-функцией с компонентами $\chi(t)$, $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, причем $u(\chi(t), t) = \eta(t)$, $t \geqslant 0$. Предполагается, что $\chi(t) \in C^2$ $(t \geqslant 0)$, $\eta(t) \in C^3$ $(t \geqslant 0)$, причем $|\chi^{\cdot}(t)| < a = \sqrt{\mu/\rho}$, $t \geqslant 0$, так что в плоскости xt по отношению к одномерному волновому уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ кривая γ: $x = \chi(t)$, $t \geqslant 0$, является временноподобной кривой [4], лежащей (за исключением своего начала $(x_0, 0)$, $x_0 = \chi(0)$) внутри светового конуса будущего $\Gamma = \{(x, t)$: $|x - x_0| > at$, $t > 0\}$. Относительно функции $u(x, t)$ предполагается, что $u(x, t) \in C$ $(-\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0)$, причем $u(x, t) \in C^2$ $(-\infty < < x < +\infty,\ t \geqslant 0)$, кроме точек, лежащих на линии γ и на характеристиках, проходящих через точку $(x_0, 0)$, где частные производные функции $u(x, t)$ могут иметь разрывы первого рода. При выполнении указанных условий функции $\chi(t)$, $\eta(t)$, $u(x, t)$ будем называть допустимыми.

На основании полученных ранее [1] результатов, для нахождения тройки допустимых функций $\chi(t)$, $\eta(t)$, $u(x, t)$, описывающей движение рассматриваемой механической системы, приходим к следующей СЗ:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & -\infty < x \leqslant x_0 \\ \varphi_2(x), & x_0 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & -\infty < x \leqslant x_0 \\ \psi_2(x), & x_0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

$$m\eta^{\cdot\cdot} = \rho(a^2 - \chi^{\cdot 2})[u_x] \tag{1.3}$$

$$2m\chi^{\cdot\cdot} = -\rho(a^2 - \chi^{\cdot 2})[u_x^2] \tag{1.4}$$

$$u(\chi(t), t) = \eta(t) \tag{1.5}$$

$$\chi(0) = x_0, \quad \chi^{\cdot}(0) = p_0, \quad \eta(0) = u_0, \quad \eta^{\cdot}(0) = q_0 \tag{1.6}$$

где квадратные скобки означают скачок функции при пересечении линии γ в положительном направлении оси x, взятый в точке $(\chi(t), t)$. Для начальных данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

$$|p_0| < a, \quad \varphi \in C(-\infty < x < +\infty), \quad \varphi(x_0) = u_0$$

$$\varphi_1 \in C^2(x \leqslant x_0), \quad \varphi_2 \in C^2(x \geqslant x_0), \quad \psi_1 \in C^1(x \leqslant x_0), \quad \psi_2 \in C^1(x \geqslant x_0)$$

2. Найдем условия, обеспечивающие существование и единственность допустимого глобального решения СЗ (1.1)—(1.6), и укажем процедуру получения решения.

Предположим, что существует некоторое допустимое глобальное решение $\chi(t)$, $\eta(t)$, $u(x, t)$ СЗ (1.1)—(1.6). Тогда функция $u(x, t)$ находится среди допустимых глобальных решений задачи с начальными данными для одномерного волнового уравнения (дополненной условием на скачке) (1.1)—(1.3), удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5). Предположим, что существует допустимое глобальное решение $u(x, t)$ задачи (1.1)—(1.3). Продолжим функцию $u(x, t)$ нулем при $t < 0$, положив $U(x, t) = \theta(t) u(x, t)$, где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда, и перейдем к соответствующей обобщенной функции. Пользуясь связью между обобщенными и классическими производными функции $U(x, t)$ и учитывая начальные условия (1.2) и условие на скачке (1.3), получим, что допустимое глобальное решение $u(x, t)$ задачи (1.1)—(1.3), будучи продолженное нулем на $t < 0$, находится среди тех обобщенных решений одномерного волнового уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + G(x, t)$$

$$G(x, t) = -m\rho^{-1}\eta^{\cdot\cdot}(t)\,\delta(x - \chi(t)) + \varphi(x)\,\delta^{\cdot}(t) + \psi(x)\,\delta(t)$$

которые при $t \geqslant 0$ представляют собой допустимые функции. Как известно [4], обобщенное решение $U(x, t)$ одномерного волнового уравнения существует, единственно и представляется в виде волнового потенциала. Имеем

$$U(x, t) = E(x, t) * G(x, t), \quad E(x, t) = (2a)^{-1}\,\theta(t)\,\theta(at - |x|)$$

где $E(x, t)$ — фундаментальное решение одномерного волнового оператора, а звездочка означает свертку по переменным x, t. При $t \geqslant 0$ указанное решение принимает вид

$$u(x,t)=\begin{cases}\Phi_1(x,t), & -\infty<x\leqslant -at+x_0\\ \Psi^+(x,t) & -at+x_0\leqslant x\leqslant \chi(t)\\ \Psi^-(x,t) & \chi(t)\leqslant x\leqslant at+x_0\\ \Phi_2(x,t), & at+x_0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

$$\Phi_k(x,t)=\frac{1}{2}\varphi_k(x-at)+\frac{1}{2}\varphi_k(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_k(\tau)\,d\tau,\quad k=1,2$$

$$\Psi^{\pm}(x,t)=sq_0-s\eta'\left(\beta^{\pm}\left(t\pm\frac{x}{a}\right)\right)+F_1\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+F_2\left(t+\frac{x}{a}\right),\quad s=\frac{m}{2a\rho}$$

$$F_1(\xi)=\frac{1}{2}\varphi_1(-a\xi)+\frac{1}{2a}\int\limits_{-a\xi}^{x_0}\psi_1(\tau)\,d\tau,\quad \xi\in[-x_0/a,+\infty)$$

$$F_2(\xi)=\frac{1}{2}\varphi_2(a\xi)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{a\xi}\psi_2(\tau)\,d\tau,\quad \xi\in[x_0/a,+\infty)$$

где $\beta^+(\xi)$, $\xi\in[x_0/a,+\infty)$ и $\beta^-(\xi)$, $\xi\in[-x_0/a,+\infty)$ — функции, обратные соответственно функциям $\alpha^+(t)=t+\chi(t)/a$, $\alpha^-(t)=t-\chi(t)/a$, $t\in[0,+\infty)$.

Ясно, что $u(x,t)$ — допустимая функция. Итак, допустимое глобальное решение задачи (1.1)—(1.3) существует, единственно и представляется формулой (2.1).

Таким образом, если тройка допустимых функций $\chi(t)$, $\eta(t)$, $u(x,t)$ — глобальное решение СЗ (1.1)—(1.6), то функция $u(x,t)$ представляется формулой (2.1) и удовлетворяет условиям (1.4), (1.5). Отсюда следует, что пара функций $\chi(t)$, $\eta(t)$, являющихся элементами указанной тройки, находится среди допустимых глобальных решений следующей задачи с начальными данными для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\chi^{\cdot\cdot}=-[s(a^2-\chi^{\cdot 2})]^{-1}[\eta^{\cdot}-f^+(t,\chi,\chi^{\cdot})][\eta^{\cdot}\chi^{\cdot}+af^-(t,\chi,\chi^{\cdot})]$$
$$\eta^{\cdot\cdot}=-s^{-1}[\eta^{\cdot}-f^+(t,\chi,\chi^{\cdot})]\qquad(2.2)$$
$$\chi(0)=x_0,\ \chi^{\cdot}(0)=p_0,\ \eta(0)=u_0,\ \eta^{\cdot}(0)=q_0$$
$$(f^{\pm}(t,\chi,\chi^{\cdot})=(1-\chi^{\cdot}/a)F_1'(t-\chi/a)\pm(1+\chi^{\cdot}/a)F_2'(t+\chi/a))$$

Обратно, если пара функций $\chi(t)$, $\eta(t)$ — допустимое глобальное решение задачи (2.2), то тройка функций $\chi(t)$, $\eta(t)$, $u(x,t)$, где функция $u(x,t)$ задается формулой (2.1),— допустимое глобальное решение СЗ (1.1)—(1.6), что проверяется непосредственно.

Для получения условий, обеспечивающих существование и единственность допустимого глобального решения задачи (2.2), используем некоторую подходящую априорную оценку ее допустимых локальных решений. Пусть производные F_1' и F_2' квадратично интегрируемы соответственно на промежутках $[-x_0/a,+\infty)$, $[x_0/a,+\infty)$. Из закона сохранения энергии для рассматриваемой механической системы, записанного с учетом выражений (2.1), следует, что если существует допустимое локальное решение $\chi(t)$, $\eta(t)$ задачи (2.2), определенное на некотором отрезке $[0, T]$, то оно удовлетворяет «энергетическому неравенству»

$$\chi^{\cdot 2}(t) + \eta^{\cdot 2}(t) \leqslant V_0^2, \quad t \in [0, T] \tag{2.3}$$

$$V_0 = \left(p_0^2 + q_0^2 + \frac{1}{s}\int\limits_{-x_0/a}^{\infty} F_1'^2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{s}\int\limits_{x_0/a}^{\infty} F_2'^2(\xi)\,d\xi\right)^{1/2} = \text{const} \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Из (2.3) получается априорная оценка допустимого локального решения $\chi(t)$, $\eta(t)$ задачи (2.2), определенного при $0 \leqslant t \leqslant T$, именно:

$$|\chi^{\cdot}(t)| \leqslant V_0, \ |\chi(t) - x_0| \leqslant V_0 t, \ |\eta^{\cdot}(t)| \leqslant V_0, \ |\eta(t) - u_0| \leqslant V_0 t \tag{2.5}$$

Величину V_0, задаваемую формулой (2.4), будем называть определяющим параметром СЗ (1.1)—(1.6).

Лемма. Если определяющий параметр V_0 СЗ (1.1)—(1.6) удовлетворяет условию

$$V_0 < a \tag{2.6}$$

то задача (2.2), соответствующая указанной СЗ, имеет, притом единственное, допустимое глобальное решение.

В самом деле, пусть T — произвольное положительное число. Положим $a - V_0 = 2d$ и рассмотрим в расширенном фазовом пространстве $(t, \chi, \chi^{\cdot}, \eta, \eta^{\cdot})$ параллелепипед П: $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\chi - x_0| \leqslant (V_0 + d)\,T$, $|\chi^{\cdot}| \leqslant V_0 + d$, $|\eta - u_0| \leqslant (V_0 + d)\,T$, $|\eta^{\cdot}| \leqslant V_0 + d$, в котором выполняются условия локальной теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи с начальными данными. По теореме о продолжении [5] локальное решение, являющееся, очевидно, допустимым, можно продолжить до границы П. Из априорной оценки (2.5) следует, что решение может выйти лишь на грань $t = T$. Итак, допустимое локальное решение можно продолжить вперед до любого $t = T > 0$, следовательно,— неограниченно вперед. Поскольку продолжение единственно, то утверждение доказано.

Пусть $\chi(t)$, $\eta(t)$ — допустимое глобальное решение задачи (2.2). Тогда функция $\eta(t)$ — допустимое глобальное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (получающегося из второго уравнения (2.2) при заданной функции $\chi(t)$), удовлетворяющее начальным условиям $\eta(0) = u_0$, $\eta^{\cdot}(0) = q_0$. Это уравнение легко интегрируется в квадратурах, поскольку оно допускает первый интеграл, представляющий собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Имеем

$$\eta(t) = sq_0 + e^{-t/s}\left\{u_0 - sq_0 + \frac{1}{s}\int\limits_0^t \left[F_1\left(\tau - \frac{\chi(\tau)}{a}\right) + F_2\left(\tau + \frac{\chi(\tau)}{a}\right)\right] e^{\tau/s}d\tau\right\} \tag{2.7}$$

Следовательно, функция $\chi(t)$ — допустимое глобальное решение следующей задачи с начальными данными для интегродифференциального уравнения

$$\chi^{\cdot\cdot} = \eta^{\cdot\cdot}(t)\,(a^2 - \chi^{\cdot 2})^{-1}\,[\eta^{\cdot}(t)\,\chi^{\cdot} + af^{-}(t, \chi, \chi^{\cdot})]$$
$$\chi(0) = x_0, \quad \chi^{\cdot}(0) = p_0 \tag{2.8}$$

где $\eta(t)$ задается формулой (2.7). При выполнении условия (2.6) эта задача имеет, притом единственное, допустимое глобальное решение.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: если определяющий параметр V_0 СЗ (1.1)—(1.6) удовлетворяет условию (2.6), то существует, и притом единственное, допустимое глобальное решение $\chi(t)$,

$\eta(t)$, $u(x, t)$ этой задачи; функция $\chi(t)$ — допустимое глобальное решение задачи (2.8), функция $\eta(t)$ дается формулой (2.7), а $u(x, t)$ — формулой (2.1).

3. *Пример*. Рассмотрим задачу о перемещении шарика массы m вдоль колеблющейся однородной неограниченной струны, возбужденной в момент времени $t = 0$ импульсом $m\mathrm{v}_0$ с компонентами mp_0, mq_0, сообщаемым шарику, предполагая, что $|\mathrm{v}_0| < a$.

Для нахождения вектор-функции с компонентами $\chi(t)$, $\eta(t)$ и функции $u(x, t)$, описывающих соответственно движения шарика и струны, приходим к СЗ с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \chi(0) = x_0, \quad \chi^{\cdot}(0) = p_0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta^{\cdot}(0) = q_0$$

характеризующейся определяющим параметром $V_0 = |\mathrm{v}_0| < a$.

Функция $\eta(t)$ дается формулой

$$\eta(t) = sq_0(1 - e^{-t/s}), \quad s = \frac{m}{2a\rho}, \quad t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

а $\chi(t)$ — допустимое глобальное решение следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$s(a^2 - \chi^{\cdot 2})\chi^{\cdot\cdot} = -q_0^2 e^{-2t/s}\chi^{\cdot}; \quad \chi(0) = x_0, \quad \chi^{\cdot}(0) = p_0 \tag{3.2}$$

Если $p_0 = 0$, то, очевидно, $\chi(t) = x_0$, $t \geqslant 0$; если $q_0 = 0$, то $\chi(t) = p_0 t + x_0$, $t \geqslant 0$ (при этом $\eta(t) = 0$, $t \geqslant 0$).

Пусть теперь $p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$. Если $p_0 > 0$, то $\chi^{\cdot}(t) > 0$, $\chi^{\cdot\cdot}(t) < 0$, $t \geqslant 0$, так что $\chi^{\cdot}(t)$ монотонно убывает от p_0 (при $t = 0$) до p_+ (при $t = +\infty$), где p_+— корень уравнения

$$\Delta(p) \equiv p_0^2 - a^2 \ln p_0^2 + q_0^2 - p^2 + a^2 \ln p^2 = 0 \tag{3.3}$$

лежащий в интервале $0 < p < p_0$. Если $p_0 < 0$, то $\chi^{\cdot}(t) < 0$, $\chi^{\cdot\cdot}(t) > 0$, $t \geqslant 0$, так что $\chi^{\cdot}(t)$ монотонно возрастает от p_0 (при $t = 0$) до p_- (при $t = +\infty$), где p_- — корень уравнения (3.3), лежащий в интервале $p_0 < p < 0$. Функция $x = \chi(t)$ находится в параметрическом виде (p — параметр)

$$t = \frac{s}{2} \ln \frac{q_0^2}{\Delta(p)}, \quad x = x_0 - s\int_{p_0}^{p} \frac{a^2 - \xi^2}{\Delta(\xi)}\, d\xi \tag{3.4}$$

где $p_0 \geqslant p > p_+$ (если $p_0 > 0$) и $p_0 \leqslant p < p_-$ (если $p_0 < 0$).

Функция $u(x, t)$, $t \geqslant 0$ дается формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -at + x_0 \\ \eta(\beta^+(t + x/a)), & -at + x_0 \leqslant x \leqslant \chi(t) \\ \eta(\beta^-(t - x/a)), & \chi(t) \leqslant x \leqslant at + x_0 \\ 0, & at + x_0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \tag{3.5}$$

где функция η задается формулой (3.1), а β^+ и β^- — функции, обратные соответственно функциям $\alpha^+(t) = t + \chi(t)/a$, $\alpha^-(t) = t - \chi(t)/a$, $t \geqslant 0$.

Как следует из приведенного анализа, при ускоренном движении шарика происходит непрерывная потеря им энергии; при равномерном движении шарик энергии не теряет. Отметим, что подобные эффекты, связанные с обратным действием излучения движущегося сосредоточенного фактора (торможение излучением), наблюдаются при рассмотрении и некоторых других взаимообусловленных процессов (например, при взаимодействии заряженной частицы с собственным электромагнитным полем [6]).

4. *Замечания*. 1°. Аналогично можно решать и СЗ о колебаниях неограниченной струны, нагруженной несколькими движущимися сосредоточенными массами, не сталкивающимися в процессе движения. Применяя метод отражений, можно получить, следовательно, решение СЗ о колебаниях как полуограниченной, так и ограниченной струны, нагруженной одной или несколькими движущимися сосредоточенными массами, не сталкивающимися в процессе движения друг с другом и с границей.

2°. СЗ (1.1)—(1.6) представляет собой по существу некоторую смешанную задачу Коши со свободной границей [7] для одномерного волнового уравнения. Предложенный в данной работе метод решения СЗ, основанный на идее разделения движений, можно распространить на СЗ, связанные и с другими уравнениями гиперболического типа с постоянными коэффициентами, поскольку для таких уравнений решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует, единственно и выражается формулой, представляющей собой свертку фундаментального решения (с носителем, заключенным в некотором выпуклом конусе) и источника [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики с движущимися закреплениями и нагрузками // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Горьк. ун-т, 1982. С. 75—80.
2. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863—866.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
7. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
8. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 379 с.

Горький

Поступила в редакцию
11.IV.1989