Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК. 531.36:534.1

А. С. Ковалева

О РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Излагается асимптотическая процедура разделения движений в нелинейных стохастических системах, приводимых к стандартной форме с вращающейся фазой. Показано, что медленно меняющаяся составляющая движения аппроксимируется диффузионным процессом. Рассмотрен пример: движение тела в периодическом поле сил под действием случайных возмущений.

Ранее [1—3] исследовалась динамика систем со случайным возмущением, приводимых к стандартной форме вида

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x, \xi(t)) + \varepsilon^2 G(x, \xi(t)),\ x(0) = a \in R_n \tag{0.1}$$

Здесь $\xi(t)$ — случайный процесс с траекториями в R_l, ε — малый параметр. Доказано, что при выполнении определенных условий, наложенных на коэффициенты системы (в наиболее общем виде эти условия перечислены в [3]), решение $x(t, \varepsilon)$ системы (0.1) слабо сходится [4] к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ — решению стохастического дифференциального уравнения

$$dx_0 = b(x_0)d\tau + \sigma(x_0)dw,\ x_0(0) = a;\ \tau = \varepsilon^2 t \tag{0.2}$$

где $w(\tau)$ — l-мерный стандартный винеровский процесс, коэффициенты b и σ вычисляются усреднением некоторых моментных характеристик коэффициентов системы (0.1). Иначе говоря, в движении системы (0.1) можно выделить «медленную» диффузионную составляющую, на которую наложены малые (в слабом смысле) быстрые возмущения. Обоснованию предельного перехода от (0.1) к (0.2) посвящены многочисленные работы; подробная библиография содержится в [3]. Приложения такого подхода к некоторым задачам стохастической динамики нелинейных колебательных систем обсуждаются в [5, 6].

1. Получим результаты, аналогичные изложенным в [3], для систем, динамика которых описывается уравнениями

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x, \theta, \xi(\theta)) + \varepsilon^2 G(x, \theta),\ x(0) = a \in R_n \tag{1.1}$$

$$\theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x, \theta, \xi(\theta)) + \varepsilon^2 D(x, \theta),\ \theta(0) = 0 \in R_1$$

Для построения решения используем асимптотическую процедуру диффузионной аппроксимации [7], развитую [3] для анализа систем типа (0.1).

Введем необходимые определения [7]. Пусть $f(t)$ — случайный процесс с траекториями в R_1, определенный на вероятностном пространстве [8] (для краткости указываем зависимость процесса f только от времени t). Пусть далее $\mathrm{M}_s f(t)$ — условное математическое ожидание процесса $f(t)$ при $s \leqslant t$ [8]. Предполагается, что функция $f(t)$ непрерывна справа, отлична от нуля только на некотором конечном интервале $t \in [0, T]$ и $\sup_t \mathrm{M}|f(t)| < \infty$. Если процесс $f(t)$ обладает указанными свойствами, то $f(t) \in \Phi$.

Введем в рассмотрение оператор L^ε и его область определения $D(L^\varepsilon)$ [7]. Говорят, что $f \in D(L^\varepsilon)$ и $L^\varepsilon f = g$, если $f, g \in \Phi$ и

$$\lim_{\delta\to 0+} \mathrm{M}|\delta^{-1}[\mathrm{M}_\tau f(\tau+\delta) - f(\tau)] - g(\tau)| = 0 \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует [3, 7]

$$\mathrm{M}_\tau f(\tau+\delta)-f(\tau)=\int\limits_\tau^{\tau+\delta}\mathrm{M}_\tau L^\varepsilon f(u)\,du \tag{1.3}$$

В частности, если $f(\tau)=f(x_\varepsilon(\tau))$, где $x_\varepsilon(\tau)$ — решение некоторой возмущенной системы, то выражение (1.3) указывает способ вычисления функционала $\mathrm{M}_\tau f(x_\varepsilon(\tau+\delta))$ на траекториях системы. Если $f(\tau)=f(x_0(\tau))$, где $x_0(\tau)$ — решение уравнения (0.2), то [3, 7, 8]

$$L^\varepsilon=L=b(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad A=\sigma\sigma' \tag{1.4}$$

$$\mathrm{M}_\tau f(x_0(\tau+\delta))-f(x_0(\tau))=\int\limits_\tau^{\tau+\delta}\mathrm{M}_\tau Lf(x_0(u))\,dw \tag{1.5}$$

Соотношения (1.3), (1.5) указывают способ вычисления и сравнения функционалов на траекториях возмущенной и диффузионной систем. Как показано в [7], если для любой достаточно гладкой финитной функции $f(x)$ найдется функция $f^\varepsilon(\tau)$, такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{M}\,|f^\varepsilon(\tau)-f(x_\varepsilon(\tau))|=0 \tag{1.6}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{M}\,|L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau)-Lf(x_\varepsilon(\tau))|=0,\quad \tau\in[0,T]$$

и при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\tau\in[0,T]$ последовательность $x_\varepsilon(\tau)$ слабо компактна [4], то процесс $x_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится при $\varepsilon\to0$ к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ при $x_0(0)=x_\varepsilon(0)=a$.

Для систем типа (0.1) различными способами были построены [1—3] аппроксимирующие операторы L. Используя методику [3], построим соответствующий оператор для системы вида (1.1).

2. В дальнейшем полагаем $\omega(x)\geqslant\omega_0>0$, $\mathrm{M}F(x,\theta,\xi(\theta))=\mathrm{M}H(x,\theta,\xi(\theta))=0$ при фиксированных x. Прочие ограничения на коэффициенты системы (1.1) формулируются ниже.

Обозначим $\tau=\varepsilon^2t$, $x(t,\varepsilon)=x_\varepsilon(\tau)$, $\theta(t,\varepsilon)=\theta_\varepsilon(\tau)$ — решение системы (1.1). Определим на траектории системы (1.1) некоторую достаточно гладкую функцию $f(\tau,x)$, обращающуюся в нуль вне некоторой ограниченной области $D:\{x\in S,\ \tau\in[0,T]\}$. Построим функцию $f^\varepsilon(\tau)$, связанную с $f(\tau,x_\varepsilon(\tau))$ соотношением

$$f^\varepsilon(\tau)=f(\tau,x_\varepsilon)+\varepsilon f_1(\tau,x_\varepsilon,\theta_\varepsilon)+\varepsilon^2f_2(\tau,x_\varepsilon,\theta_\varepsilon) \tag{2.1}$$

где $x_\varepsilon=x_\varepsilon(\tau)$, $\theta_\varepsilon=\theta_\varepsilon(\tau)$, и выберем коэффициенты f_1, f_2 таким образом, чтобы выполнялись соотношения (1.6).

Следуя [3], запишем

$$\begin{aligned}L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{-1}(f_x'F+\omega L_\theta^\varepsilon f_1)+(f_\tau+f_{1x}'F+f_x'G+HL_\theta^\varepsilon f_1+\omega L_\theta^\varepsilon f_2)+\\+\varepsilon(f_{1\tau}+f_{2x}'F+f_{1x}'G+DL_\theta^\varepsilon f_1+HL_\theta^\varepsilon f_2)+\\+\varepsilon^2(f_{2x}'G+f_{2\tau}+DL_\theta^\varepsilon f_2)+\varepsilon^3\ldots\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь штрих — знак транспонирования, аргумены функций опущены. Оператор L_θ^ε определяется аналогично L^ε

$$L_\theta^\varepsilon f=\lim_{\Delta\to0}\Delta^{-1}[M_\theta f(\tau,x,\theta+\Delta)-f(\tau,x,\theta)] \tag{2.3}$$

аргументы τ, x здесь рассматриваются как фиксированные параметры. Равенство понимается в слабом смысле (1.2).

Построим функцию f_1 таким образом, чтобы коэффициент при ε^{-1} обращался в нуль (все равенства понимаются в слабом смысле). Выберем

f_1 в виде

$$f_1(\tau, x, \theta) = \omega^{-1}(x) f_x'(\tau, x) \int\limits_\theta^\infty M_\theta F(x, u, \xi(u))\, du \tag{2.4}$$

Тогда, по определению (2.3)

$$L_\theta^\varepsilon f_1(\tau, x, \theta) = \omega^{-1}(x) f_x'(\tau, x) \lim_{\delta \to 0+} \Big\{\delta^{-1}\Big[M_\theta \int\limits_{\theta+\delta}^\infty M_{\theta+\delta} F(x, u, \xi(u))\, du -$$

$$- \int\limits_\theta^\infty M_\theta F(x, u, \xi(u))\, du\Big]\Big\}$$

Из свойств условного математического ожидания следует [8]

$$L_\theta^\varepsilon f_1(\tau, x, \theta) = -\,\omega^{-1}(x) f_x'(\tau, x) \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_\theta^{\theta+\delta} M_\theta F(x, u, \xi(u))\, du =$$

$$= -\,\omega^{-1}(x) f_x'(\tau, x) F(x, \theta, \xi(\theta))$$

т. е., первое слагаемое в (2.2) обращается в нуль. Функцию f_2 построим таким образом, чтобы второе слагаемое в (2.2) не содержало секулярных по θ слагаемых. Положим

$$f_2 = \omega^{-1}(x) \sum_{j=1}^2 [I_j(\tau, x, \theta) - S_j(\tau, x, \theta)] \tag{2.5}$$

$$I_j = \int\limits_\theta^\infty [M_\theta Q_j(\tau, x, u) - MQ_j(\tau, x, u)]\, du, \quad S_j = \int\limits_0^\theta [MQ_j(\tau, x, u) - \overline{Q}_j(\tau, x)]\, du$$

$$Q_1 = f_\tau(\tau, x) + f_{1x}'(\tau, x, u) F(x, u, \xi(u)) = f_\tau(\tau, x) +$$

$$+ \int\limits_u^\infty M_u [f_x'(\tau, x) F_1(x, z, \xi(z))]_x'\, dz F(x, u, \xi(u)) \tag{2.6}$$

$$Q_2 = f_x'(\tau, x)[-F_1(x, u, \xi(u)) H(x, u, \xi(u)) + G(x, u)]$$

$$\overline{Q}_j(\tau, x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T MQ_j(\tau, x, u)\, du, \quad F_1 = \omega^{-1} F \tag{2.7}$$

Предполагается, что пределы (2.7) существуют равномерно относительно τ, $x \in D$.

Подставляя (2.4), (2.6) в (2.2), получим

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) = f_\tau(\tau, x_\varepsilon) + \sum_{j=1}^2 [\overline{Q}_j(\tau, x_\varepsilon) + \varepsilon^j R_j(\tau, x_\varepsilon, \theta_\varepsilon)] \tag{2.8}$$

Здесь R_1, R_2 — коэффициенты при ε, ε^2 в (2.2). Все слагаемые в правой части (2.8) могут рассматриваться как операторы, действующие на $f(\tau, x_\varepsilon(\tau))$, $x_\varepsilon = x_\varepsilon(\tau)$, $\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon(\tau)$.

Преобразуем главные члены разложения (2.8). Учитывая свойства условного математического ожидания [8], получим

$$\overline{Q}_1(\tau, x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T du \int\limits_u^\infty M\{[f_x'(\tau, x) F_1(x, z, \xi(z))]_x' F(x, u, \xi(u))\}\, dz$$

При достаточной гладкости F, ω будем иметь

$$\overline{Q}_1(\tau, x) = K_1'(x) f_x(\tau, x) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(x) f_{xx}(\tau, x) \tag{2.9}$$

$$K_1(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T d\theta \int\limits_\theta^\infty K(x, \theta, u)\, du \tag{2.10}$$

$$A(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\theta \int_0^\infty A(x, \theta, u)\, du$$

$$K(x, \theta, u) = \mathrm{M}[F_{1x}(x, u, \xi(u))\, F(x, \theta, \xi(\theta))]$$

$$A(x, \theta, u) = M[F_1(x, u, \xi(u))\, F'(x, \theta, \xi(\theta))]$$

Соответственно

$$\bar{Q}_2(\tau, x) = K_2'(x) f_x(\tau, x), K_2(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T MK_2(u, x)\, du \tag{2.11}$$

где $K_2(u, x)$ — коэффициент при f_x в формуле (2.6). Таким образом

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) = f_\tau(\tau, x_\varepsilon) + Lf(\tau, x_\varepsilon) + \sum_{j=1}^{2} \varepsilon^j R_j(\tau, x_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \tag{2.12}$$

$$L = b'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad b = K_1 + K_2 \tag{2.13}$$

Следуя [3], можно показать, что условия (1.6) выполняются, если $\mathrm{M}\,|\,f_j(\tau, x, \theta)\,| < \infty$, $\mathrm{M}\,|\,R_j(\tau, x, \theta)\,| < \infty$ при $\theta \in (-\infty, \infty)$, $\tau, x \in D$, $j = 1, 2$. Для оценки указанных слагаемых конкретизируем ограничения на коэффициенты системы. В дальнейшем предполагаем, что выполняются следующие условия: функции F, H представимы в виде

$$F(x, \theta, \xi(\theta)) = F_0(x, \theta)\, \xi(\theta), \quad H(x, \theta, \xi(\theta)) = H_0(x, \theta)\, \xi(\theta) \tag{2.14}$$

причем случайные возмущения $\xi(\theta)$ относятся к одному из двух типов (условия А):

1) $\xi(\theta)$ — стационарный непрерывный справа нормальный марковский процесс с нулевым средним;

2) $\xi(\theta)$ — ограниченный с вероятностью 1 стационарный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания [4] с коэффициентом $\varphi(u)$ таким, что

$$\int_0^\infty \varphi^{1/2}(u)\, du < \infty$$

Коэффициенты $U = (F_0, H_0, G, D, \omega)$ удовлетворяют условиям (условия Б)

1) функции U ограничены и периодичны или равномерно квазипериодичны по θ при $\theta \in (-\infty, \infty)$ равномерно относительно $x \in S$;

2) функции U непрерывны по x при всех $x \in R_n$ равномерно относительно $\theta \in (-\infty, \infty)$;

3) производные функций U и вторые производные функций F_0, ω по x непрерывны при $x \in R_n$ и ограничены при $x \in S$ равномерно относительно $\theta \in (-\infty, \infty)$;

4) пределы (2.10), (2.11) существуют равномерно относительно x при $x \in S$.

Поясним условия А для случая, когда $\xi(\theta)$ — стационарный нормальный процесс. Вычисляя условное математическое ожидание, получим [8]

$$\mathrm{M}_\theta \xi(u) = \chi(\theta - u)\, \xi(\theta), \quad \chi(\theta) = K_\xi(\theta)/K_\xi(0) \tag{2.15}$$

где $K_\xi(\theta)$ — корреляционная функция процесса $\xi(\theta)$, причем

$$\int_0^\infty |\chi(\theta)|^p\, d\theta < \infty, \quad p > 0 \tag{2.16}$$

Внося (2.14)—(2.16) в (2.4), получим $\mathrm{M} \mid f_1 (\tau, x, \theta) \mid < \infty$. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при выполнении условий А и Б

$$\mathrm{M} \mid R_j (\tau, x, \theta) \mid < \infty, \quad \mathrm{M} \mid I_j (\tau, x, \theta) \mid < \infty, \; j = 1, 2 \tag{2.17}$$

в указанной области изменения переменных. Подробные оценки условных математических ожиданий построены в [3]. Аналогичная оценка для детерминированных слагаемых

$$\mid S_j (\tau, x, \theta) \mid < \infty, \quad j = 1, 2 \tag{2.18}$$

вытекает непосредственно из условия 4) и может быть построена так же, как для детерминированных систем [9].

Таким образом, условия (1.6) выполняются. Слабая компактность последовательности $x_\varepsilon (\tau)$ доказывается при помощи тех же рассуждений, что и для систем в стандартной форме [3].

Пусть $x_0 (\tau)$ — решение уравнения (0.2), которому соответствует оператор L, вычисленный по (2.9)—(2.13). Из условий Б следует, что коэффициенты оператора L непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x в любом компакте $K \subset R_n$. Предположим дополнительно, что оператор L равномерно параболичен [10] в рассматриваемой области изменения переменных и выполнены условия регулярности для процесса $x_0 (\tau)$ [11]. Тогда [11] существует единственное решение $x_0 (\tau)$ предельного уравнения (0.2). В [3, 7] доказано, что из (1.6) вытекает сходимость конечномерных распределений процессов $x_\varepsilon (\tau)$ и $x_0 (\tau)$ и, как следствие, слабая сходимость $x_\varepsilon (\tau)$ и $x_0 (\tau)$.

Для функционалов вида $\Phi_\varepsilon = \mathrm{M}_{0, a} \varphi (x_\varepsilon (\tau_f))$ целесообразно построить непосредственную оценку близости Φ_ε к $\Phi_0 = \mathrm{M}_{0, a} \varphi (x_0 (\tau_f))$, $\tau_f \in [0, T]$.

Выберем функцию $f (\tau, x)$ как решение задачи Коши

$$\partial f / \partial \tau + L f = 0, \quad f (\tau_f, x) = \varphi (x) \tag{2.19}$$

Пусть $\varphi (x) \in C_4$ — функция с компактным носителем, определенная на множестве $x \in K$. Если оператор L обладает указанными выше свойствами, то решение задачи (2.19) существует и $f (\tau, x) \in C_{2,4}$ при $\tau \in \in [0, T]$, $x \in K$ [10]. В силу регулярности процесса $x_0 (\tau)$ всегда можно выбрать значение T и область K таким образом, что $x_0 (\tau) \in K$ при всех $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_f \leqslant T$ и при $x_0 (0) = a \in \operatorname{int} K$ [11]. При этом $f (\tau, x) = = \mathrm{M}_{\tau, x} \varphi (x_0 (\tau_f))$ [8, 11].

Если процесс $x_\varepsilon (\tau)$ непрерывен, то существует такое значение τ_K, что $x_\varepsilon (\tau) \in K$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_K$, $x_\varepsilon (0) = a$. Следовательно, при $0 \leqslant \tau \leqslant \leqslant \tau_f \leqslant \tau_K$ все построения разд. 2 справедливы.

Пусть $x_\varepsilon (\tau) = x$, $\theta_\varepsilon (\tau) = \theta$, $(x, \theta) = y \in R_{n+1}$. Тогда, учитывая (1.5), (2.1), (2.12), можем записать

$$\mathrm{M}_{\tau, x} f (\tau_f, x_\varepsilon (\tau_f)) - f (\tau, x) + \varepsilon \mathrm{M}_{\tau, y} F (\tau_f, y_\varepsilon (\tau_f), \varepsilon) =$$
$$= \int_\tau^{\tau_f} \mathrm{M}_{\tau, x} [f_u (u, x_\varepsilon (u)) + L f (u, x_\varepsilon (u))] \, du + \varepsilon \int_\tau^{\tau_f} \mathrm{M}_{\tau, y} R (u, y_\varepsilon (u), \varepsilon) \, du \tag{2.20}$$
$$y_\varepsilon (u) = (x_\varepsilon (u), \theta_\varepsilon (u)) \in R_{n+1},$$
$$F (\tau, y, \varepsilon) = f_1 (\tau, x, \theta) + \varepsilon f_2 (\tau, x, \theta), \quad R (\tau, y, \varepsilon) = R_1 (\tau, x, \theta) + + \varepsilon R_2 (\tau, x, \theta)$$

Из оценок (2.17), (2.18) следует

$$\mid \mathrm{M}_{\tau, x} f (\tau_f, x_\varepsilon (\tau_f)) - f (\tau, x) \mid \leqslant \varepsilon [C_1 + C_2 (\tau_f - \tau)] \tag{2.21}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от ε. В то же время из (2.19) имеем $f(\tau_f, x_\varepsilon(\tau_f)) = \varphi(x_\varepsilon(\tau_f))$. Таким образом

$$|\mathrm{M}_{\tau,x}\varphi(x_\varepsilon(\tau_f)) - \mathrm{M}_{\tau,x}\varphi(x_0(\tau_f))| \leqslant \varepsilon [C_1 + C_2(\tau_f - \tau)] \qquad (2.22)$$

Положив $\tau = 0$, $x = a$, получим

$$|\Phi_\varepsilon - \Phi_0| \leqslant \varepsilon (C_1 + C_2\tau) \qquad (2.23)$$

Используя регулярность процесса $x_0(\tau)$, с помощью неравенства Чебышева можно показать, что из оценок (2.22), (2.23) вытекает регулярность процесса $x_\varepsilon(\tau)$ (доказательство строится так же, как в [11] (гл. 3, § 4). При этом оценка (2.23) остается справедливой для всех конечных значений τ_f.

Замечания. 1°. Для систем в стандартной форме следует положить $\theta = t$, $\theta^\cdot = 1$. При этом выражения (2.9)—(2.11) совпадут с известными [1].

2°. Все преобразования сохраняют силу, если коэффициенты системы имеют вид $F = F_1(x, \theta, \xi(\theta)) + F_2(x, t, \zeta(t))$ и т. д., причем случайные возмущения $\xi(\theta)$ и $\zeta(t)$ независимы. Тогда в разложении (2.1) следует положить $f_j = f_j^1(\tau, x, \theta) + f_j^2(\tau, x, t)$, $j = 1, 2$ и строить функции f_j^1 и f_j^2 по указанным правилам независимо друг от друга.

3°. Если коэффициенты зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$, то все преобразования сохраняются. При этом τ можно рассматривать как дополнительную медленную переменную, определенную уравнением $\tau^\cdot = \varepsilon^2$. Для систем в стандартной форме результаты совпадут с полученными в [2, 3].

3. Рассмотрим модельный пример: движение точки в слабом силовом поле. Пусть уравнения движения при учете сравнительной малости возмущающих и силовых факторов приводятся к виду

$$\theta^{\cdot\cdot} = \varepsilon^2 f(\theta) - \varepsilon[\varepsilon b + \xi(\theta)]\theta^\cdot + \varepsilon[\varepsilon u(t) + \eta(t)]; \quad \theta(0) = 0, \qquad (3.1)$$
$$\theta^\cdot(0) = \gamma; \quad b > 0$$

или к аналогичному виду при замене возмущения $\xi(\theta)$ на $\zeta(t)$.

Здесь θ — координата точки, $f(\theta)$ — 2π-периодическая функция, характеризующая силовое поле, $u(t)$ — T-периодическая функция, характеризующая внешний источник энергии, ξ, ζ, η — возмущающие факторы. Возмущение $\xi(\theta)$ обычно характеризует сопротивление внешней среды, $\zeta(t)$ — флуктуации коэффициента демпфирования в демпфирующих устройствах, $\eta(t)$ — флуктуации внешней нагрузки. Различные степени малых параметров означают, что влияние детерминированных и случайных факторов учитывается в одинаковом приближении (ср. (2.6)).

Покажем, как влияет характер рассеяния диссипативных сил на динамику системы. Приведем (3.1) к стандартной форме

$$\theta^\cdot = x, \quad \theta(0) = 0 \qquad (3.2)$$
$$x^\cdot = \varepsilon[-\xi(\theta)x + \eta(t)] + \varepsilon^2[u(t) + f(\theta) - bx], \quad x(0) = \gamma$$

В дальнейшем считаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \bar f, \quad \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = \bar u, \quad \bar f + \bar u = u_0$$

Полагаем также, что $\xi(\theta)$, $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ — независимые случайные процессы, удовлетворяющие условиям А. Благодаря независимости возмущений все рассуждения разд. 2 остаются в силе; при этом усреднение проводится по соответствующему аргументу. Для уравнения (3.2) будем иметь

$$K(x) = 0, \quad A(x) = a^2(x)$$

$$a^2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\xi(x, \theta, u)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\eta(x, t, s)\,ds \qquad (3.3)$$

$$\alpha_\xi = \mathrm{M}[\xi(\theta)\xi(u)]x = K_\xi(\theta - u)x, \quad \alpha_\eta = \mathrm{M}[\eta(t)\eta(s)] = K_\eta(t - s)$$
$$a^2(x) = a_\eta^2 + a_\xi^2 x, \quad a_\eta^2 = S_\eta(0), \quad a_\xi^2 = S_\xi(0)$$

Здесь K_ξ, K_η, K_ζ — корреляционные функции, S_ξ, S_η, S_ζ — спектральные плотности процессов $\xi(\theta)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ соответственно.

Таким образом, решение $x(t, \varepsilon)$ уравнения (3.2) слабо сходится к решению $x_0(\tau)$ стохастического дифференциального уравнения

$$dx_0 = (u_0 - bx_0)\, d\tau + a(x_0)\, dw, \quad \tau = \varepsilon^2 t \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что средняя скорость точки $Mx \to Mx_0(\tau) = \omega_0$, где ω_0 — решение невозмущенной системы

$$d\omega_0/d\tau = u_0 - b\omega_0, \quad \omega_0(0) = \gamma \tag{3.5}$$

Более содержательной характеристикой оказывается среднеквадратичное значение скорости $Mx^2 \to Mx_0^2(\tau)$. Значение функционала $\Phi_0 = M_{0,\gamma}x_0^2(\tau)$ определяется из решения задачи (2.19); коэффициенты оператора L определены выражениями (3.3), (3.4). В результате очевидных преобразований получим

$$f(\sigma, x) = P_0(\sigma) + P_1(\sigma)\, x + P_2(\sigma)\, x^2 \tag{3.6}$$

$$P_0(\sigma) = -u_0(2u_0 + a_\xi^2)\, b^{-2}\left[(e^{bs} - 1) - {}^1/_2(e^{2bs} - 1)\right] - {}^1/_2 a_\eta^2 b^{-1}(e^{2bs} - 1),$$
$$P_1(\sigma) = (2u_0 + a_\xi^2)\, b^{-1}(e^{bs} - e^{2bs}), \quad P_2(\sigma) = e^{2bs}, \quad s = \sigma - \tau$$

Положив в (3.6) $\sigma = 0$, $x = \gamma$, получим среднеквадратичное значение скорости в момент τ. Установившееся (при $\tau \to \infty$) среднеквадратичное значение скорости

$$\overline{\Phi}_0 = {}^1/_2 b^{-2}\left[u_0(2u_0 + a_\xi^2) + ba_\eta^2\right] \tag{3.7}$$

Строго говоря, сходимость при $\tau \to \infty$ должна быть обоснована так же, как для систем в стандартной форме [2, 3], однако по (3.7) можно оценить сравнительное влияние возмущающих факторов на поведение системы. Так, из (3.6), (3.7) следует, что возмущение $\xi(\theta)$ не влияет на устойчивость системы. Более того, при $u_0 = 0$ возмущение $\xi(\theta)$ вообще не влияет на поведение системы при достаточно больших τ.

Рассмотрим систему (3.1) при замене $\xi(\theta)$ на $\zeta(t)$. Повторяя все рассуждения, получим, что процесс $\theta^{\cdot} = x$ слабо сходится к решению уравнения

$$dx_0 = (u_0 - \beta x_0)\, d\tau + a_1(x_0)\, dw, \quad x_0(0) = \gamma \tag{3.8}$$
$$(\beta = b - a_\zeta^2/2, \quad a_1^2 = a_\eta^2 + a_\xi^2 x^2, \quad a_\zeta^2 = S_\zeta(0))$$

Таким образом, среднее значение скорости $Mx \to \omega_0$, где ω_0 — решение уравнения, отличающегося от (3.5) заменой b на β.

Среднеквадратичное значение скорости $\Phi_0 = M_{0,\gamma}x_0^2(\tau)$ имеет вид (3.6). Коэффициенты P_0, P_1 P_2, определяются выражениями

$$P_0(\sigma) = \frac{2u_0}{2\beta_1 - \beta}\left[\frac{1}{\beta}(e^{\beta s} - 1) - \frac{1}{2\beta_1}(e^{2\beta_1 s} - 1)\right] - \frac{a_\eta^2}{2\beta_1}(e^{2\beta_1 s} - 1),$$

$$P_1(\sigma) = \frac{2u_0}{2\beta_1 - \beta}(e^{\beta s} - e^{2\beta_1 s}), \quad P_2(\sigma) = e^{2\beta_1 s}; \quad \beta_1 = b - a_\zeta^2, \quad s = \sigma - \tau$$

При $\tau \to \infty$ получим

$$\overline{\Phi}_0 = {}^1/_2(\beta\beta_1)^{-1}(2u_0^2 + \beta a_\eta^2), \quad \beta > 0, \ \beta_1 > 0$$

Таким образом, при $b < a_\zeta^2/2$ система неустойчива. Дисперсия скорости при $\tau \to \infty$, $u_0 = 0$ также зависит от величины a_ζ. Следовательно, характер рассеяния диссипативных сил существенно сказывается на динамике системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применение. 1966. Т. 11. № 3. С. 444—462.
2. *Blankenship G., Papanicolaou G. C.* Stability and control of stochastic systems with wideband noise disturbances // SIAM Journal Appl. Math. 1978. V. 34. № 3. P. 437—476.
3. *Kushner H. J.* Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory. Cambridge, MIT Press, 1984. 269 p.
4. *Биллингслей П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 351 с.
5. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
6. *Ковалева А. С.* Применение асимптотических методов к некоторым стохастическим задачам динамики виброударных систем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 733—737.
7. *Kurtz T. G.* Semigroups of conditional shifts and approximations of Markov processes // Ann. Prob. 1975. V. 3. № 4. P. 618—642.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
9. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. 440 с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1989