

УДК 531.36

© 1990 г.

Ле Суан Ань

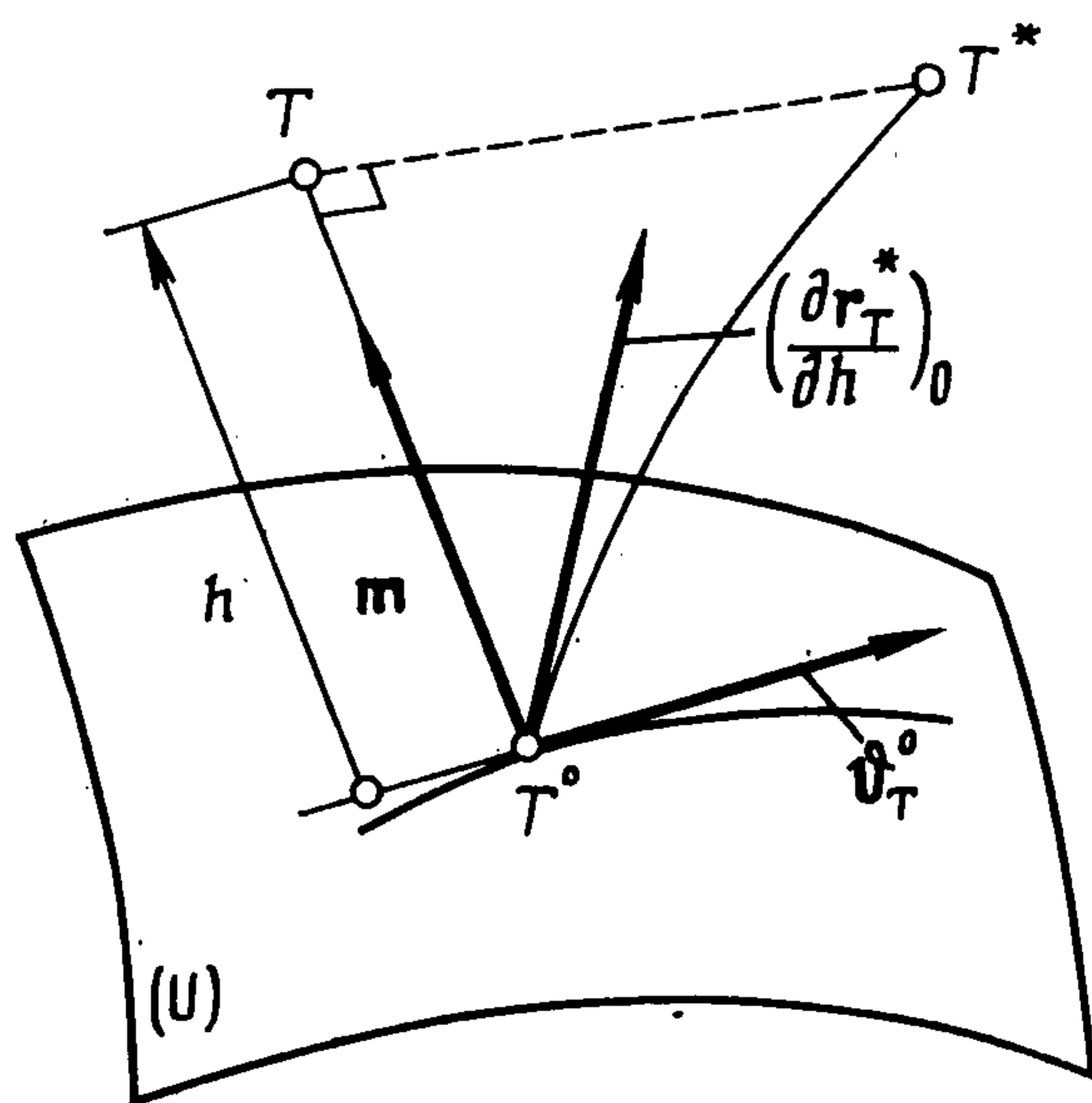
ПАРАДОКСЫ ПЭНЛЕВЕ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается голономная система, в которой среди связей имеется одна контактная связь с кулоновым трением. Выводятся уравнение для нормальной реакции и дифференциальные уравнения движения, в которых реакция исключена. Выражаются условия парадоксов Пэнлеле через коэффициенты кинетической энергии и коэффициент трения. Определяются истинные законы движения в парадоксальных ситуациях на основе предельного перехода от системы с упругим контактным соединением к системе с жестким соединением. В качестве примера исследуется схема Пэнлеле — Клейна.

Парадоксальные ситуации несуществования и неединственности задачи динамики в связи с кулоновым трением были отмечены Пэнлеле [1] и подвергнуты анализу многими авторами ([1—6] и др.)<sup>1</sup>. Была выдвинута гипотеза, что противоречие отпадает, если учесть упругие деформации в зоне контакта. Из-за отсутствия строгого доказательства в общем случае вопрос о достоверности данной гипотезы остался открытым. Не разработано и общее математическое описание, которое позволяло бы установить

критерии парадоксов и законы движения в парадоксальных областях. Предложенные [1—6] принципы отбора истинных движений различны, однако неизвестно, противоречивы ли они или просто дополняют друг друга.

1. Уравнения динамики. Пусть система  $N$  материальных точек подчинена  $(3N - n)$  стационарным связям, которые все идеальны за исключением двустороннего контактного соединения с коэффициентом трения  $\mu$ . Не теряя общности, представим эту связь в виде точечного ползуна  $T^\circ$ , скользящего по неподвижной поверхности  $U$  (фиг. 1). Радиусы-векторы материальных точек



Фиг. 1

$r_1^\circ, \dots, r_N^\circ$  и ползуна  $r_{T^\circ}$  — функции  $n$  независимых координат  $q_1, \dots, q_n$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} r_i^\circ &= r_i^\circ(q_1, \dots, q_n), & v_i^\circ &= \sum_k (\partial r_i^\circ / \partial q_k) q_k^\cdot \\ r_{T^\circ} &= r_{T^\circ}(q_1, \dots, q_n), & v_{T^\circ} &= \sum_k (\partial r_{T^\circ} / \partial q_k) q_k^\cdot \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $v_i^\circ$  и  $v_{T^\circ}$  — скорости движения материальных точек и ползуна; верхний индекс  $^\circ$  относится к случаю, когда контактная связь не отброшена, т. е. система не освобождена от нее. Здесь и далее суммирование по соответствующему индексу ведется от 1 до  $n$ .

Мысленно отбрасываем контакт и сообщаем ползуну избыточное смещение от положения  $T^\circ$  до  $T^*$  (фиг. 1). За избыточную координату примем проекцию участка  $T^\circ T^*$  на нормаль к  $U$  в точке  $T^\circ$ :

$$h = (r_{T^*} - r_{T^\circ}) \cdot m \tag{1.2}$$

<sup>1</sup> См. также: Ле Суан Ань. Теория механических систем с трением скольжения. — Деп. в ВИНТИ. № 84-В87. 202 с.

где  $\mathbf{m}$  — единичный вектор нормали. Эта координата будет подчинена условию

$$h = h' = h'' = 0 \quad (1.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^* &= \mathbf{r}_i^*(q_1, \dots, q_n, h), & \mathbf{r}_i^*(q_1, \dots, q_n, 0) &= \mathbf{r}_i^\circ \\ \mathbf{r}_T^* &= \mathbf{r}_T^*(q_1, \dots, q_n, h), & \mathbf{r}_T^*(q_1, \dots, q_n, 0) &= \mathbf{r}_T^\circ \\ (\partial \mathbf{r}_T^* / \partial q_k)_0 &= \partial \mathbf{r}_T^\circ / \partial q_k, & (\partial \mathbf{r}_i^* / \partial q_k)_0 &= \partial \mathbf{r}_i^\circ / \partial q_k \end{aligned} \quad (1.4)$$

Нулевой индекс вне скобок означает учет условия (1.3) после дифференцирования.

Величина общей реакции контактной связи задается в виде

$$\mathbf{R}_\sigma = (-\varepsilon_1 \mu \mathbf{v}_T^\circ / |\mathbf{v}_T^\circ| + \mathbf{m}) R \quad (1.5)$$

где  $R$  — нормальная реакция,  $\varepsilon_1 = \text{sgn } R$ . Общая реакция приводится к координатам  $q_j, h$  таким образом:

$$S_j = \mathbf{R}_\sigma \cdot \partial \mathbf{r}_T^\circ / \partial q_j, \quad S^* = \mathbf{R}_\sigma \cdot (\partial \mathbf{r}_T^* / \partial h)_0$$

Отсюда при условиях (1.1)–(1.5) и при условии соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_T^\circ}{\partial q_j} &= 0, & \mathbf{m} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_T^*}{\partial h} \right)_0 &= \lim_{T^* \rightarrow T^\circ} \frac{(\mathbf{r}_T^* - \mathbf{r}_T^\circ) \cdot \mathbf{m}}{(\mathbf{r}_T^* - \mathbf{r}_T^\circ) \cdot \mathbf{m}} = 1 \\ \frac{\mathbf{v}_T^\circ}{|\mathbf{v}_T^\circ|} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_T^\circ}{\partial q_j} &= \frac{\partial v_T^\circ}{\partial q_j}, & \frac{\mathbf{v}_T^\circ}{|\mathbf{v}_T^\circ|} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_T^*}{\partial h} \right)_0 &= \left( \frac{\partial v_T^*}{\partial h} \right)_0 \end{aligned}$$

найдем

$$S_j = -\varepsilon_1 \mu (\partial v_T^\circ / \partial q_j) R, \quad S^* = (1 - \varepsilon_1 \mu \partial v_T^* / \partial h)_0 R \quad (1.6)$$

Следуя [7], на основе выражений обобщенных реакций (1.6) уравнения Лагранжа системы с отброшенной связью можно представить в форме

$$\sum_k A_{ks} q_k'' + \sum_{k, m} [k, m; s] q_k' q_m' = Q_s - \varepsilon_1 \mu (\partial v_T^\circ / \partial q_s) R \quad (s = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

$$\sum_k A_{kn+1}^* q_k'' + \sum_{k, m} [k, m; n+1]^* q_k' q_m' = Q^* + (1 - \varepsilon_1 \mu \partial v_T^* / \partial h)_0 R \quad (1.8)$$

где  $v_T^\circ = |\mathbf{v}_T^\circ|$ ,  $Q_s$  и  $Q^*$  — обобщенные активные силы, приведенные к координатам  $q_s$  и  $h$ ,  $A_{ks}$  — коэффициенты кинетической энергии системы,  $A_{ij}^*$  ( $i, j = 1, \dots, n+1$ ) — эти же коэффициенты при отброшенной связи с учетом условия (1.3); прямые скобки представляют символы Кристоффеля первого рода. Заметим, что выражения (1.7) и (1.8) образуют систему  $n+1$  уравнений с  $n+1$  неизвестными  $q_1, \dots, q_n, R$ .

Для случая, когда избыточное смещение ползуна ортогонально вектору скорости, т. е.  $(\partial \mathbf{r}_T / \partial h)_0 \perp \mathbf{v}_T^\circ$ ,<sup>\*</sup> используем такие же обозначения, что и в общем случае, но опускаем индекс \*. Тогда

$$(\partial v_T / \partial h)_0 = \mathbf{v}_T^\circ / |\mathbf{v}_T^\circ|^{-1} \cdot (\partial \mathbf{r}_T / \partial h)_0 = 0, \quad S = R \quad (1.9)$$

и уравнение (1.8) примет вид

$$\sum_k A_{kn+1} q_k'' + \sum_{k, m} [k, m; n+1] q_k' q_m' = Q^* + R \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) является некоторой линейной комбинацией уравнений (1.7) и (1.8). Поэтому система из (1.7) и (1.10) эквивалентна системе из (1.7) и (1.8). Ниже для обобщенного анализа будет использовано уравнение (1.10). Заметим, что при решении частных примеров в зависимости от конструктивной расчетной схемы удобным может оказаться как уравнение (1.8), так и (1.10).

Разрешая эти системы относительно  $q_s^{\ddot{}}$  и  $R$ , приходим к уравнению для реакции и дифференциальным уравнениям движения

$$\Lambda R = R_0, \quad \Lambda q_s^{\ddot{}} = F_s \quad (s = 1, \dots, n); \quad \Lambda = 1 + \varepsilon_1 \mu L \quad (1.11)$$

Здесь

$$L = - \sum_k \frac{A^{kn+1}}{A^{n+1, n+1}} \frac{\partial v_T^\circ}{\partial q_k} = - \sum_k \frac{A^{*kn+1}}{A^{*n+1, n+1}} \frac{\partial v_T^\circ}{\partial q_k} - \left( \frac{\partial v_T^*}{\partial h} \right)_0$$

$$R_0 = \frac{1}{A^{n+1, n+1}} \left( \sum_{k, l} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \quad l \end{matrix} \right\} q_k \dot{q}_l - \sum_k A^{kn+1} Q_k - A^{n+1, n+1} Q \right)$$

$$F_s = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{s-1, 1} & \Sigma_1 - Q_1 & A_{s+1, 1} \dots A_{n1} & \varepsilon_1 \mu \partial v_T^\circ / \partial q_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} \dots A_{s-1, n} & \Sigma_n - Q_n & A_{s+1, n} \dots A_{nn} & \varepsilon_1 \mu \partial v_T^\circ / \partial q_n \\ A_{1n+1} \dots A_{s-1, n+1} & \Sigma_{n+1} - Q & A_{s+1, n+1} \dots A_{n+1, n+1} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_m = \sum_{k, l} [k, l; m] q_k \dot{q}_l, \quad A = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

фигурные скобки означают символы Кристоффеля второго рода;  $A^{sk}$  — элементы матрицы, обратной матрице

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} & A_{n+1, 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} & A_{n+1, n} \\ A_{1n+1} & \dots & A_{nn+1} & A_{n+1, n+1} \end{vmatrix}$$

квадратичной формы скоростей системы с отброшенной связью.

Величина  $R_0$  представляет нормальную реакцию при отсутствии трения, т. е. при  $\mu = 0$ . В случае наличия трения имеем  $R = R_0$ , если  $L = 0$ . Поэтому  $L$  можно называть показателем влияния контакта.

**2. Знак реакции и условия парадоксов.** Знак реакции будем определять при помощи первого уравнения (1.11). Если для некоторых  $q_1, \dots, q_n$ ;  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  не существует ни одного знака либо существует одновременно два знака  $\varepsilon_1 = \pm 1$ , то для этих значений координат и скоростей имеет место несуществование либо неединственность решения задачи динамики (1.11).

*Теорема 1.* Если

$$\mu |L| < 1 \quad (2.1)$$

то

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \operatorname{sgn} R_0 \quad (2.2)$$

следовательно, решение задачи (1.11) существует и единственно. Если же

$$\mu |L| > 1 \quad (2.3)$$

то

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \pm 1 & \text{при } \varepsilon_0 \operatorname{sgn} L = 1 \\ \pm i = \pm \sqrt{-1} & \text{при } \varepsilon_0 \operatorname{sgn} L = -1 \end{cases} \quad (2.4)$$

поэтому решение неединственное при  $\varepsilon_0 \operatorname{sgn} L = 1$  и не существует при  $\varepsilon_0 \operatorname{sgn} L = -1$ .

*Доказательство.* Из первого уравнения (1.11) вытекает

$$\varepsilon_1 \operatorname{sgn} \Lambda = \varepsilon_0 \quad (2.5)$$

Отсюда при условии (2.1) получается  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \operatorname{sgn} R_0$ .

При выполнении условия (2.3) имеем  $\text{sgn } \Lambda = \varepsilon_1 \text{sgn } L$ , и тогда условие (25) дает  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_0 \text{sgn } L$ , что эквивалентно соотношению (2.4). Теорема доказана.

*Замечания.* 1°. Так как  $L = L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  и  $R_0 = R_0(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , то условия (2.1) и (2.3) определяют в фазовом пространстве  $(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  область парадоксов, уравнение границы которой

$$\mu |L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)| - 1 = 0$$

2°. Коэффициент уравнений (1.11) при  $R$  и  $q_s$  в силу теоремы 1 может быть представлен в форме

$$\Lambda = 1 \pm \mu L \text{ для } \varepsilon_0 \text{sgn } L = \begin{cases} \pm 1 & \text{при } \mu |L| < 1 \\ 1 & \text{при } \mu |L| > 1 \end{cases}$$

Следовательно, на границе области парадоксов имеем

$$\lim_{\mu |L| \rightarrow 1-0} \frac{R}{R_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{для } \varepsilon_0 \text{sgn } L = 1 \\ \infty & \text{для } \varepsilon_0 \text{sgn } L = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\mu |L| \rightarrow 1+0} \frac{R}{R_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{и } \infty \text{ для } \varepsilon_0 \text{sgn } L = 1 \\ \text{не существует} & \text{для } \varepsilon_0 \text{sgn } L = -1 \end{cases}$$

Как видно, левый предел определяется однозначно, но обращается в бесконечность при  $\varepsilon_0 \text{sgn } L = -1$ , а правый предел либо неединственный, либо не существует. Поэтому граничные точки области парадоксов отнесем к этой области.

**3. Предельный переход  $c \rightarrow \infty$  и дифференциальное уравнение для реакции.** Позиция объяснения парадоксов учетом упругих деформаций неоднократно иллюстрировалась на примерах [2, 4, 5]. В ее справедливости в общем случае можно убедиться, используя, например, уравнения (1.7). Действительно, если реакция является упругой силой, то она может быть однозначно выражена через координаты. Но тогда в соответствии с заданными  $q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  величины реакции и ускорений определяются по (1.7) единственным образом, т. е. парадоксы не возникают.

Этим истолкованием, однако, проблема не исчерпывается. Надо знать, какое именно движение следует приписывать системе в каждой парадоксальной ситуации. С такой целью рассмотрим задачу о предельном переходе от упругого контакта к абсолютно жесткому.

Пусть механическая система с кулоновым трением допускает парадоксы. Для разрешения последних рассмотрим новую систему, полученную из старой путем замены жесткого контактного соединения упругим. Закон движения, установленный для такой упругой системы при устремлении ее жесткости к бесконечности, будем считать законом движения жесткой системы.

Предполагается, что в результате упругих деформаций ползун совершает перемещение в сторону направляющей на малую величину

$$h = -R / c \quad (3.1)$$

где  $c$  — приведенная жесткость. Для упругой системы радиусы-векторы  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  и  $\mathbf{r}_T$  материальных точек и ползуна — функции координат  $q_1, \dots, q_n$  и перемещения  $h$ . Кинетическая энергия системы может быть выражена в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s,k} a_{sk} \dot{q}_s \dot{q}_k + \sum_s a_{sn+1} \dot{q}_s \dot{h} + \frac{1}{2} a_{n+1, n+1} \dot{h}^2$$

Обобщенные реакции вычисляются согласно (1.6), (1.9) и (3.1):

$$S_j = \varepsilon_1 \mu (\partial v_T / \partial \dot{q}_j) c h \quad (j = 1, \dots, n,) \quad S = -ch$$

Коэффициенты  $a_{ik}$  и скорость скольжения  $v_T$  зависят от  $q_s$  и  $h$ . При этом, поскольку  $h$  мало, можно считать  $a_{ik} = A_{ik}$ ;  $\partial v_T / \partial q_j = \partial v_T^0 / \partial q_j$ .

Составив уравнения Лагранжа второго рода для упругой системы и и разрешив относительно ускорений, получим

$$h'' + \Lambda A^{n+1, n+1} ch + \sum_{k, l} \binom{n+1}{k \quad l} q_k \dot{q}_l + 2 \sum_k \binom{n+1}{k \quad n+1} q_k \dot{h} + \binom{n+1}{n+1 \quad n+1} h^2 - \sum_k A^{kn+1} Q_k - A^{n+1, n+1} Q = 0 \quad (3.2)$$

При учете в (3.2) выражения (1.12) для  $R_0$  и соотношения (3.1) приходим к дифференциальному уравнению для реакции

$$R'' + 2 \sum_k \binom{n+1}{k \quad n+1} q_k \dot{R} + \frac{1}{c} \binom{n+1}{n+1 \quad n+1} R^2 + c A^{n+1, n+1} \Lambda R = c R_0 A^{n+1, n+1} \quad (3.3)$$

которое отличается от алгебраического уравнения (1.11) наличием членов, зависящих от  $R'$  и  $R''$ .

Введем безразмерную реакцию

$$x = R / R_0 = -ch / R_0 \quad (3.4)$$

Тогда уравнение (3.3) преобразуется к форме

$$x'' + \Lambda A^{n+1, n+1} cx - A^{n+1, n+1} c = -2x' \sum_k \binom{n+1}{k \quad n+1} q_k \dot{ } + \frac{R_0}{c} \binom{n+1}{n+1 \quad n+1} x^2 \quad (3.5)$$

Далее, при введении безразмерного времени

$$\tau = t / t_*, \quad t_* = (c A^{n+1, n+1} | \Lambda |)^{-1/2} \quad (3.6)$$

выражение (3.5) примет вид (штрих означает производную по  $\tau$ )

$$x'' + \Lambda | \Lambda |^{-1} x - | \Lambda |^{-1} = \gamma f(x') \quad (3.7)$$

$$\gamma = t_* \sum_k \binom{n+1}{k \quad n+1} q_k \dot{ }$$

$$f(x') = -2x' + \binom{n+1}{n+1 \quad n+1} R_0 \left( t_* c \sum_k \binom{n+1}{k \quad n+1} q_k \dot{ } \right)^{-1} x'^2$$

Величина  $\gamma$  — безразмерный малый параметр, обращающийся в нуль по мере возрастания жесткости  $c$  к бесконечности. Следовательно, при  $c \rightarrow \infty$  возмущением  $\gamma f(x')$  можно пренебречь, и тогда вместо (3.7) имеем уравнение

$$x'' + \Lambda | \Lambda |^{-1} x - | \Lambda |^{-1} = 0 \quad (3.8)$$

в котором свободный член  $| \Lambda |^{-1}$  при  $c \rightarrow \infty$  практически сохраняется постоянным в достаточно большом интервале времени  $\tau$  ввиду условия

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{d | \Lambda |^{-1}}{d\tau} = \lim_{c \rightarrow \infty} t_* \frac{d | \Lambda |^{-1}}{dt} = 0$$

а коэффициент при  $x$  равен  $\pm 1$ .

Таким образом, задача о предельном переходе  $c \rightarrow \infty$  сведена к дифференциальному уравнению для реакции (3.8) с постоянными коэффициентами.

В случае отсутствия парадоксов  $\mu |L| < 1$ , поэтому  $[\Lambda] = \Lambda$ . Тогда из (3.8) следует

$$x = r_0 \sin(\tau + \psi_0) + \Lambda^{-1} = r_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0) + \Lambda^{-1}$$

$$\omega_0 = (cA^{n+1, n+1} \Lambda)^{1/2} = t_*^{-1}, \quad \mu |L| < 1$$

где  $r_0, \psi_0$  — постоянные интегрирования. В соответствии с этим стационарное значение реакции

$$x = (1 + \varepsilon_0 \mu L)^{-1} \quad R = R_0 (1 + \varepsilon_0 \mu L)^{-1}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0$$

совпадает с корнем первого уравнения (1.11) жесткой системы при  $\mu |L| < 1$ . Отсюда видно, что вне парадоксальной области стационарное значение реакции обращается при  $c \rightarrow \infty$  в величину реакции жесткой системы. Иначе говоря, в данном случае допущение жесткого контакта не искажает динамической характеристики системы с трением.

Построим решение уравнения (3.8) при парадоксах, т. е. при  $\mu |L| > 1$ . Различаем два случая:  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = 1$ ,  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = -1$ . В первом случае  $\varepsilon_1 L = |L|$ , и решение будет

$$x = r \sin(\tau + \psi) + x_+ = r \sin(\omega t + \psi) + x_+$$

$$\omega = \sqrt{cA^{n+1, n+1} / x_+}, \quad x_{\pm} = (1 \pm \mu |L|)^{-1}$$

$$\mu |L| > 1, \quad \varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = 1 \quad (3.9)$$

Фазовые траектории — эллипсы

$$(x - x_+)^2 + \dot{x}^2 / \omega^2 = r^2, \quad \mu |L| > 1, \quad \varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = 1 \quad (3.10)$$

с устойчивым центром

$$x = x_+, \quad \dot{x} = 0; \quad R = R_+ = R_0 x_+ \quad (3.11)$$

Во втором случае, когда  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = -1$ , имеется равенство  $\varepsilon_1 L = -|L|$ , и решение (3.8) может быть представлено в форме

$$x = r_1 e^{\tau} + r_2 e^{-\tau} + x_- = r_1 e^{\lambda t} + r_2 e^{-\lambda t} + x_-$$

$$\lambda = \sqrt{-cA^{n+1, n+1} / x_-}, \quad \mu |L| > 1, \quad \varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = -1 \quad (3.12)$$

Здесь  $r_1, r_2$  — постоянные интегрирования. В соответствии с (3.12) фазовые траектории — гиперболы

$$(x - x_-)^2 - \dot{x}^2 / \lambda^2 = 4r_1 r_2, \quad \mu |L| > 1, \quad \varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = -1 \quad (3.13)$$

с неустойчивым седлом

$$x = x_-, \quad \dot{x} = 0; \quad R = R_- = R_0 x_- \quad (3.14)$$

Выше выведено дифференциальное уравнение для реакции и построены его решения для  $\mu |L| > 1$  при двух комбинациях знаков  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = \pm 1$ . Для нахождения истинной реакции будем в соответствии с каждой парадоксальной ситуацией устанавливать на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  области реализации этих комбинаций и сшивать решения.

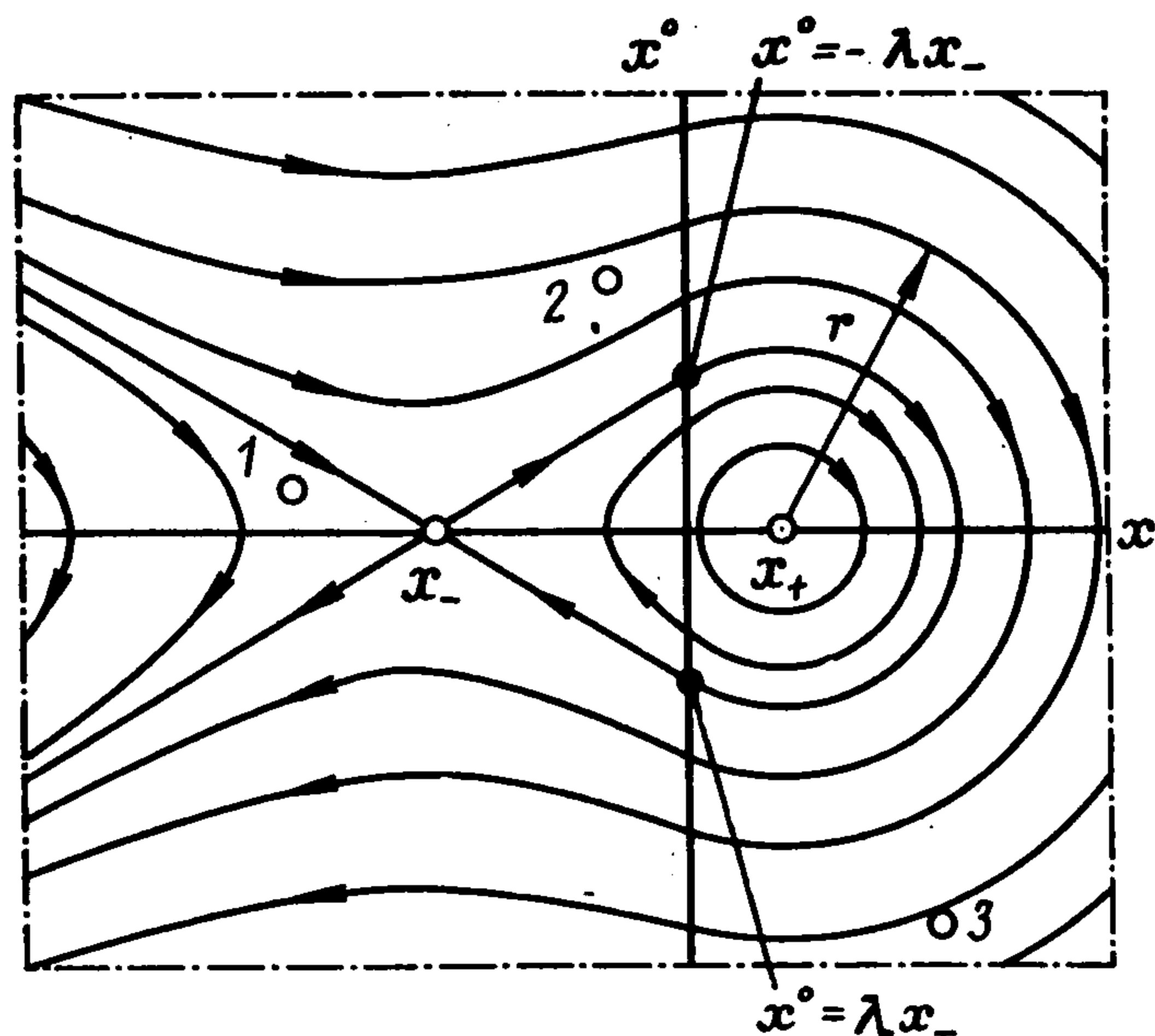
**4. Истинные законы движения.** Определим сначала истинный закон движения при неединственности решения задачи (1.11). По теореме 1 в этом случае

$$\mu |L| > 1, \quad \varepsilon_0 \operatorname{sgn} L = 1 \quad (4.1)$$

Для  $x > 0$  из (3.4) и (4.1) вытекает  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = 1$ . В соответствии с этим  $x$  меняется по (3.9). Следовательно, в правой полуплоскости  $(x, \dot{x})$  имеют место эллипсы (3.10).

Для  $x < 0$  из (3.4) и (4.1) следует  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = -1$ . Поэтому в левой фазовой полуплоскости величина  $x$  меняется согласно (3.12), и гиперболы (3.13) будут реализованы.

Полный фазовый портрет для ситуации неединственности получен при сшивке левых гипербол с правыми эллипсами (фиг. 2). Как видно, для заданных начальных значений  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  реакция  $R$ , а следовательно, и ускорения  $q_1'', \dots, q_n''$  определяются единственным образом. Два корня первого уравнения (1.11) при  $\varepsilon_1 = \pm \varepsilon_0$  — стационарные (или медленно меняющиеся) значения реакции, соответствующие центру эллипсов и седлу гипербол. При этом в зависимости от значений  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  движение может быть отнесено к одному из двух случаев: а) изображающая точка



Фиг. 2

все время движется около центра  $(x_+, 0)$ , б) величина  $x$  в некоторый момент становится отрицательной, затем ее абсолютное значение резко возрастает по экспоненте (3.12) при условии  $r_1 < 0$ .

В первом случае, вследствие вязкого свойства материала, которое не было учтено при выводе уравнения (3.8), колебательные составляющие величин  $x$  и  $\dot{x}$  в самом деле будут затухать, а изображающая точка будет приближаться к центру  $(x_+, 0)$ . Действительно, если вместо (3.1) задается  $R =$

$= -ch - \alpha \dot{h}$ , где  $\alpha$  — коэффициент вязкого трения, то в уравнении (3.2) добавляется слагаемое  $\Lambda A^{n+1, n+1} \alpha \dot{h}$ . Следовательно, при обозначении  $x = -ch R_0^{-1}$  получим вместо (3.8) уравнение, описывающее при условии  $\varepsilon_1 \operatorname{sgn} L = 1$  затухающие колебания в окрестности точки  $x = x_+$ . Таким образом, в рассматриваемом случае закон движения в конце концов отождествится с априорным принципом Пэнлеве [1]:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $R = R_+$ .

Второй случай имеет место, например, при совпадении начальной точки изображения с положениями 1, 2 и 3 на фиг. 2. Докажем, что в данном случае происходит так называемый тангенциальный удар. При разрешении уравнений (1.7) относительно обобщенных ускорений с учетом (3.4) получаем

$$q_s'' + \varepsilon_1 \mu R_0 x K_s - E_s = 0 \quad (4.2)$$

$$K_s = \sum_k a^{ks} \partial v_T / \partial q_k', \quad E_s = \sum_k a^{ks} Q_k - \sum_{k, l} \left\{ \begin{matrix} s \\ k \ l \end{matrix} \right\} q_l' q_k'$$

где  $a^{ks}$  — элементы матрицы, обратной матрице системы (1.7). Судя по (4.2), среди обобщенных координат существует хотя бы одна такая, для которой

$$K_s \neq 0 \quad (4.3)$$

Иначе кулоново трение не оказывало бы никакого влияния на динамическое состояние, и система являлась бы идеальной.

На основе (3.12), (4.2) изменение обобщенной скорости  $q_s'$  за промежуток времени  $\Delta t$  вычисляется так:

$$\Delta q_s' = \int_0^{\Delta t} q_s'' dt = \varepsilon_1 \lambda^{-1} \mu R_0 K_s [r_1 (e^{\lambda \Delta t} - 1) - r_2 (e^{-\lambda \Delta t} - 1) + x_- \Delta t] + E_s \Delta t \quad (4.4)$$

Если разложить правую часть равенства (4.4) в степенной ряд, то

с учетом выражения (3.12) для  $\lambda$  можно заметить, что слагаемые пропорциональны соответственно  $(\Delta t/1! + \lambda (\Delta t)^2/2! + \lambda^2 (\Delta t)^3/3! + \dots)$ ,  $\Delta t$ . В свою очередь, величина  $\lambda$  пропорциональна  $\sqrt{c}$ ; поэтому при условии (4.3) и  $c \rightarrow \infty$  первое из слагаемых бесконечно возрастает, а вторым можно пренебречь. Но тогда из (4.4) следует

$$\Delta q_s \dot{=} -\lambda^{-1} \mu R_0 r_1 (e^{\lambda \Delta t} - 1) K_s \quad (4.5)$$

Так как  $\Delta t > 0$ , то  $\text{sgn } \Delta q_s \dot{=} -\text{sgn } (R_0 r_1 K_s)$  и на основе (4.5) имеем

$$\Delta t = \lambda^{-1} \ln [1 + \lambda |\Delta q_s \dot{=} / (\mu |R_0 r_1 K_s|)] \quad (4.6)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Delta t = 0 \quad (4.7)$$

Таким образом, при условии (4.3), в соответствии с фиксированным приращением обобщенной скорости  $\Delta q_s \dot{=}$ , продолжительность  $\Delta t$  уменьшается с ростом  $c$ , стремясь к нулю. Вместе с тем скорости материальных точек  $v_i$  и ползуна  $v_T$  также испытывают разрыв ввиду условий

$$\Delta v_i \approx \sum_s \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \Delta q_s \dot{=}, \quad \Delta v_T \approx \sum_s \frac{\partial r_T}{\partial q_s} \Delta q_s \dot{=} \quad (4.8)$$

Такое скачкообразное изменение скоростей системы с трением называют тангенциальным ударом (ТУ) [6].

Полученные результаты анализа парадоксальной неединственности могут быть объединены в следующей теореме.

*Теорема 2.* Парадоксальную неединственность вызывает ситуация, когда реакция имеет две стационарные величины  $R_{\pm}$ , равные корням первого уравнения (1.11) при  $\varepsilon_1 = \pm \varepsilon_0$ ; величина  $R_+$  соответствует устойчивому центру (3.11), а  $R_-$  — неустойчивому седлу (3.14); при одних начальных значениях  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  движение осуществляется в соответствии с центром; а при других — величина  $|x|$  резко возрастает согласно (3.12) что приводит к ТУ в форме (4.5)—(4.7), т. е. к скачкообразному изменению скоростей (фиг. 2).

В отличие от принципа, предложенного в [1, 3], теорема 2 подтверждает возможность реализации не только устойчивого стационарного решения уравнения для реакции, но и неустойчивых нестационарных решений, приводящих к скачкообразному разрыву скоростей. В этой связи взгляды авторов [1, 3, 6] по вопросу об истинном движении в ситуации неединственности не противоречивы, но дополняют друг друга.

Изложенный здесь подход к проблеме ТУ также в известной мере отличается от толкования, данного в работе [6]. В последней рассматривалась односторонняя связь с трением, а отбор истинного движения, сопровождающегося ТУ, исходил из требования его непрерывности по величине соударений, возникающих вследствие неровности поверхностей контакта. Здесь же для системы с двусторонней связью на основе предельного перехода  $c \rightarrow \infty$  устанавливается возможность возникновения ТУ в зависимости от начальных значений реакции и ее производной по времени.

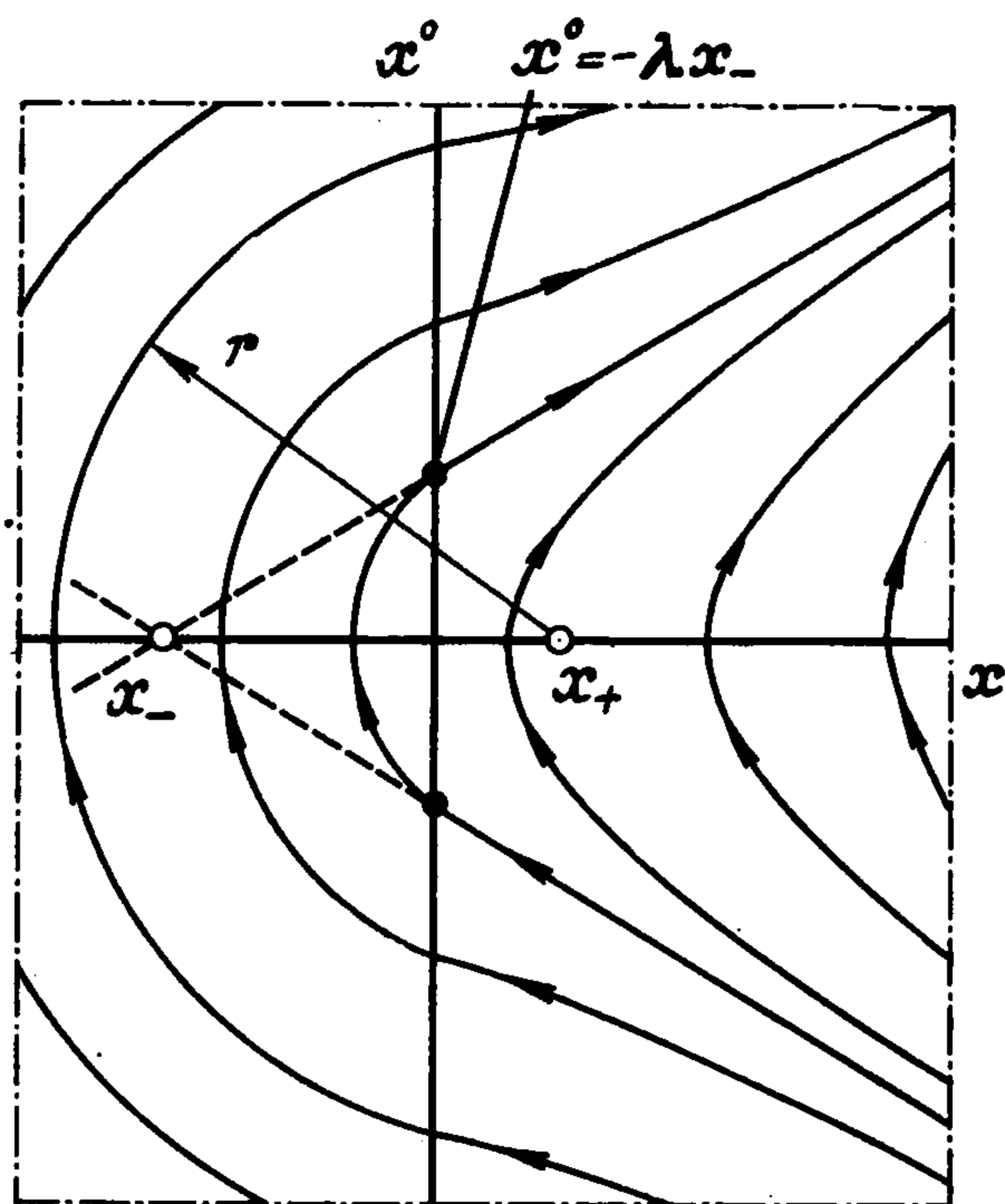
Определим теперь истинное движение при несуществовании решения задачи (1.11). Согласно теореме 1 в этом случае

$$\mu |L| > 1, \quad \varepsilon_0 \text{sgn } L = -1 \quad (4.9)$$

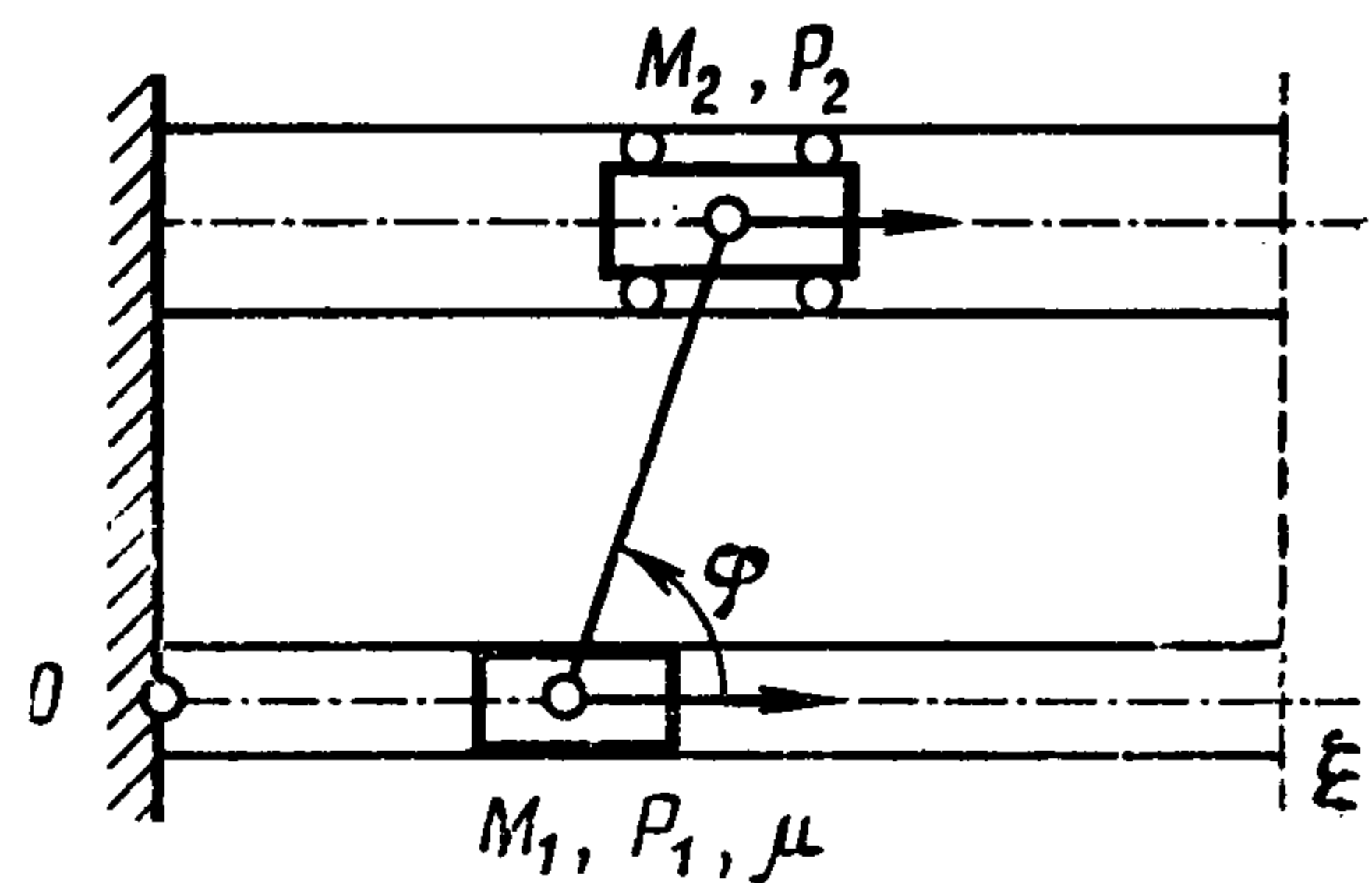
В правой полуплоскости  $(x, \dot{x})$  из (3.4) и (4.9) следует условие  $\varepsilon_1 \text{sgn } L = -1$ , при котором  $x$  меняется по экспоненте (3.12). Поэтому правую часть фазового портрета (фиг. 3) образуют гиперболы (3.13).

В левой полуплоскости  $\varepsilon_1 \text{sgn } L = 1$ , и  $x$  меняется по синусоидальному закону (3.9). Следовательно, левая часть фазового портрета состоит из дуг  $x < 0$  эллипсов (3.10).

Как показывает фиг. 3, центр (3.11) и седло (3.14) не находятся соот-



Фиг. 3



Фиг. 4

ветственно в областях реализации эллипсов и гипербол. Поэтому стационарных решений не будет. Однако в соответствии с заданными начальными значениями  $x(0)$  и  $x'(0)$  решение существует и притом единственно. Более того, для любых  $x(0)$  и  $x'(0)$  изображающая точка в конце концов попадает в первую четверть, в которой  $x$  будет возрастать по экспоненте (3.12) с  $r_1 > 0$ . Тогда из (4.2) снова вытекают соотношения (4.5)–(4.7), подтверждающие скачкообразный разрыв скоростей. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Парадоксальное несуществование отражает ситуацию, когда реакция  $R$  стационарных значений не имеет; при этом для любых начальных значений  $x(0)$ ,  $x'(0)$  величина  $x$  в конце концов станет положительной и будет резко увеличиваться по экспоненте (3.12), что приводит к ТУ в форме (4.5)–(4.7) (фиг. 3).

**Следствие теорем 2 и 3.** При всяком ТУ в системе с одной степенью свободы движение вскоре будет остановлено, т. е. произойдет динамическое заклинивание.

*Доказательство.* В случае  $n = 1$  уравнение (4.2) примет вид

$$Aq'' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \left| \frac{dr_T}{dq} \right| R_0 x - \frac{1}{2} \left( \frac{dA}{dq} \right) q'^2 + Q_1, \quad \varepsilon_2 = \operatorname{sgn} q' \quad (4.10)$$

Как было отмечено, в режиме ТУ (как при неединственности, так и при несуществовании) величина  $x$  выражается формулой (3.12). Тогда из (4.10) следует

$$\operatorname{sgn} q'' = -\operatorname{sgn} (\mu \left| \frac{dr_T}{dq} \right| R_0 r_1 \left| e^{\lambda t} \right|) \operatorname{sgn} q' = -\operatorname{sgn} q' \quad (4.11)$$

Соотношение (4.11) показывает, что знак ускорения  $q''$  противоположен знаку скорости  $q'$ . Поэтому значение последней будет уменьшаться до сих пор, пока движение не будет остановлено. Приращение скорости с момента  $t = 0$  до момента остановки равно  $\Delta q' = -q'(0)$ . Кроме того, для  $n = 1$  имеем  $\partial v_T / \partial q' = \left| \frac{dr_T}{dq} \right| \operatorname{sgn} q'$ . Следовательно, на основе равенств (4.5) и (4.6)

$$\Delta t = \lambda^{-1} \ln \left[ 1 + \left| \frac{\lambda A q'(0)}{\mu R_0 r_1 \frac{dr_T}{dq}} \right| \right]$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Delta t = 0$$

и остановка произойдет мгновенно.

Таким образом, для систем с одной степенью свободы в парадоксальной ситуации несуществования динамическое заклинивание неизбежно, а в ситуации неединственности оно появляется при определенных начальных значениях реакции и ее производной.

По теоремам 2, 3 и следствию можно непосредственно судить об истин-

ных движениях для любого механизма в парадоксальных случаях, не повторяя каждый раз процедуру учета упругой деформации.

5. **Схема Пэнлеве — Клейна.** С целью еще раз убедиться в справедливости предложенного подхода осуществим процедуру учета упругой деформации для схемы Пэнлеве — Клейна. При этом, как будет ясно, получаются такие же результаты, что и определяемые по выведенным общим формулам и теоремам.

Рассмотрим две материальные точки  $M_1$  и  $M_2$  единичной массы, связанные лишенной массы стержнем и перемещающиеся по параллельным направляющим (фиг. 4). Первая направляющая шероховата с коэффициентом трения  $\mu$ , а вторая гладка. Стержень  $M_1M_2$  образует с горизонтальной осью  $O\xi$  угол  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi/2$ ). К точкам приложены соответственно тангенциальные силы  $P_1$  и  $P_2$ .

Уравнения (1.11) для рассматриваемой системы примут вид

$$\begin{aligned} \Lambda R &= (P_1 - P_2)k, \quad \Lambda \xi'' = P_1 + P_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu P_2 k \\ \Lambda &= 2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu k, \quad L = \frac{1}{2} \varepsilon_2 k, \quad R_0 = \frac{1}{2} (P_1 - P_2)k \\ \varepsilon_2 &= \operatorname{sgn} \xi', \quad k = \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

В соответствии с этим имеем условие отсутствия парадоксов  $\mu k < 2$ , условие неединственности задачи  $\mu k > 2$ ,  $\xi' (P_1 - P_2) < 0$  и условие несуществования задачи  $\mu k > 2$ ,  $\xi' (P_1 - P_2) < 0$ .

В случае отсутствия парадоксов нормальная реакция и закон движения определяются таким образом:

$$\begin{aligned} R &= (P_1 - P_2)k (2 + \varepsilon \mu k)^{-1}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} [\xi_0' (P_2 - P_1)] \\ \xi(t) &= \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + \varepsilon \mu k P_2) (2 + \varepsilon \mu k)^{-1} t^2 + \xi_0' t + \xi_0 \end{aligned}$$

Движение при парадоксах можно исследовать благодаря уравнениям (3.8) и (4.2), которые для данной схемы примут вид

$$\begin{aligned} x'' + \Lambda |\Lambda|^{-1} x - 2 |\Lambda|^{-1} &= 0, \quad \tau = [c |\Lambda| / (2 + k^2)]^{1/2} t \\ \xi'' + \frac{1}{4} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu (P_1 - P_2) k x - \frac{1}{2} (P_1 - P_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

причем первое уравнение (5.1) составлено с учетом упругого перемещения ползуна по нормали к направляющей. На основании уравнений (5.1), повторяя преобразования, изложенные в разд. 4, получаем уравнения эллипсов и гипербол фазовых траекторий в форме

$$\left( x - \frac{2}{2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu k} \right)^2 + \frac{2 + k^2}{c (2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu k)} x'^2 = \begin{cases} r^2 & \text{при } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1 \\ 4r_1 r_2 & \text{при } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1 \end{cases}$$

а также величины стационарных реакций

$$x_{\pm} = \pm 2 / (\mu k \pm 2) \quad \text{или} \quad R_{\pm} = (P_1 - P_2)k / (2 \pm \mu k)$$

и продолжительность процесса динамического заклинивания

$$\Delta t = \left[ \frac{2 + k^2}{c (\mu k - 2)} \right]^{1/2} \ln \left( 1 + \frac{4 |\xi_0'| \sqrt{c (\mu k - 2)}}{\mu |r_1 (P_2 - P_1)| k \sqrt{2 + k^2}} \right)$$

Заметим, что к этим результатам также можем прийти посредством применения формул и теорем, приведенных выше при общем анализе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Lecornu L.* Sur la loi de Coulomb // С. г. Acad. sci. 1905. Т. 140. Р. 635—637.
3. *Klein F.* Zur Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze // Z. Math. und Phys. 1910. Н. 58. S. 180—188.
4. *Pfeiffer F.* Zur Frage der sogenannten Coulombschen Reibungsgesetze // Z. Math. und Phys. 1910. Н. 58. S. 273—311.
5. Бутенин Н. В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы скачка // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 3—22.
6. Иванов А. П. О корректности основной задачи динамики в системах с трением // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 712—716.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
19.1.1989