Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 4, 1990

УДК 531.36

Г. А. Леонов

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Получен критерий орбитальной устойчивости, обобщающий признак Пуанкаре [1] и результаты Хартмана и Олеха [2]. Применение критерия иллюстрируется на примере двумерной динамической системы с угловой координатой. Рассмотрена задача о глобальной асимптотической устойчивости системы Лоренца.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = f(x), \quad x \in R^n \tag{1}$$

где $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Будем говорить, что компонента x_j вектора x является угловой координатой, если $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_j + 2\pi, \ldots, x_n)$.

Пусть $x(t)$ — некоторая траектория системы (1), содержащаяся при $t \geqslant 0$ в ограниченной по неугловым координатам области $G \subset R^n$. В дальнейшем будем также предполагать, что $f(x) \neq 0$ в замыкании $\bar{G}$ области G.

Введем в рассмотрение симметричную неособую матрицу $H(x) = \| h_1, \ldots, h_n \|$, где $h_i(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции, и дважды непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $q(x)$, удовлетворяющую неравенству $f(x)^* q(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{G}$.

Пусть H_0 — некоторая симметричная $(n \times n)$ — матрица, $\lambda(x)$ — дифференцируемая функция, t_j и ρ_j — числовые последовательности, удовлетворяющие условиям $\rho_j \leqslant \varkappa_1 < 0$, $t_{j+1} > t_j$, $t_{j+1} - t_j \leqslant \varkappa_2$. Здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — некоторые числа.

Введем также обозначение

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}, f\right) = \left\| \frac{\partial h_1}{\partial x} f, \ldots, \frac{\partial h_n}{\partial x} f \right\|, \quad f = f(x)$$

где $\partial h/\partial x$ — матрица Якоби вектор-функции $h(x)$ в точке x.

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} z^* \left(\frac{\partial H}{\partial x}, f\right) z + z^* H \frac{\partial f}{\partial x} z - \frac{z^* H f}{f^* q} \left[f^* \frac{\partial q^*}{\partial x} + q^* \frac{\partial f}{\partial x} \right] z \leqslant$$
$$\leqslant \lambda z^* H z, \quad \forall z \in \{ z \mid z^* q(x(t)) = 0 \} \tag{2}$$
$$H = H(x(t)), \quad f = f(x(t)), \quad q = q(x(t)), \quad \Lambda = \Lambda(x(t))$$

Тогда, если квадратичная форма $z^* H(x(t)) z$ на множестве $\{ z \mid z^* q(x(t)) = 0 \}$ положительно определена и выполнено неравенство

$$\Lambda_j \doteq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda(x(t))\, dt \leqslant \rho_j \tag{3}$$

то траектория $x(t)$ орбитально асимптотически устойчива.

Если квадратичная форма $z^* H(x(t_j)) z$ на множестве $\{ z \mid z^* q(x(t_j)) = 0 \}$ невырождена, может принимать отрицательные значения и выполнены неравенства

$$\Lambda_j \geqslant -\rho_j$$
$$z^* H(x(t))\, z \geqslant z^* H_0 z, \quad \forall z \in \{z \mid z^* q(x(t)) = 0\} \tag{4}$$

то траектория $x(t)$ будет орбитально неустойчивой.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Omega(\delta) = \bigcup_{t \geqslant 0} \{y \mid (y-x)^* H(x)(y-x) = \delta, \quad (y-x)^* q(x) = 0\}, \quad x = x(t)$$

Здесь δ — некоторое достаточно малое число.

Зафиксируем некоторую точку $y_0 \in \Omega(\delta)$ и будем изучать поверхность $\Omega(\delta)$ в некоторой достаточно малой окрестности точки y_0. Из $y_0 \in \Omega(\delta)$ следует, что найдется число $t \geqslant 0$, такое, что

$$z^* H(x)\, z = \delta, \; z^* q(x) = 0, \; z = y_0 - x, \; x = x(t)$$

Возьмем число τ, близкое к t. В этом случае

$$x(\tau) \approx x(t) + f(x(t))(\tau - t)$$

Определим теперь отображение (всюду далее, если не оговорено противное, $f = f(x)$, $K = K(x)$, $q = q(x)$, $x = x(t)$)

$$v(y_0) = y_0 + \alpha\,[f + Kz]$$

точки y_0 в гиперплоскость

$$\Phi = \left\{v \mid w^* \left[q + (\tau - t)\frac{\partial q}{\partial x} f\right] = 0\right\}, \quad w = v - (x + f(\tau - t))$$

таким образом, чтобы

$$w_0^* H(x + (\tau - t) f)\, w_0 \approx \delta, \; w_0 = v(y_0) - (x + (\tau - t) f) \tag{5}$$

При этом число α будем выбирать так, чтобы $v(y_0) \in \Phi$, а матрицу K такой, чтобы имело место соотношение (5). Ясно, что

$$\alpha \approx \frac{f^* q - z^* \dfrac{\partial q}{\partial x} f}{f^* q + q^* K z}\,(\tau - t)$$

Здесь считаем, что величина $z(\tau - t)^{-1}$ является большой. Отсюда следует, что для выполнения соотношения (5) достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{2} z^* \left(\frac{\partial H}{\partial x}, f\right) z + z^* H \left[K - \frac{f q^*}{f^* q} K - \frac{f f^*}{f^* q}\frac{\partial q^*}{\partial x}\right] z = 0$$
$$\forall z \in \{z \mid z^* q(x(t)) = 0\} \tag{6}$$

Из соотношения (5) следует, что вектор $l(y_0)$, нормальный к $\Omega(\delta)$ в точке y_0, может быть определен следующим образом:

$$l(y_0) = l_1 - \frac{l_1^* l_2}{q^* l_2} q, \; l_1 = l_1(y_0) = 2(I - Q) Hz, \quad Q = qq^*/|q|^2,$$
$$l_2 = l_2(y_0) = f + Kz$$

Заметим, что

$$^1/_2\, l(y_0) = (I - L_2)(I - Q)\, Hz = (I - L_2)\, Hz, \; L_2 = q l_2^*/q^* l_2$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} l(y_0)^* f(y_0) \approx \left[f + \frac{\partial f}{\partial x} z\right]^* (I - L_2)\, Hz \approx z^* H \left(I - \frac{f q^*}{f^* q}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \boldsymbol{K}\right) z$$

Отсюда и из соотношения (6) получим, что

$$\frac{1}{2} l(y_0)^* f(y_0) \approx z^* \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x}, f\right) + H \frac{\partial f}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - H f \frac{1}{f^* q}\left(f^* \frac{\partial q^*}{\partial x} + q^* \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} z \tag{7}$$

Можно показать теперь, что траектория $y(t)$ системы (1), проходящая в момент времени t через точку y_0, удовлетворяет с точностью до $(\tau - t)^2$ соотношению

$$y(\tau) \in \Omega\,(\delta + (\tau - t)\, l(y_0)^* f(y_0)) \tag{8}$$

Для этого отметим, что при малых $(\tau - t)$ $y(\tau) \approx y(t) + f(y(t))(\tau - t)$. Поэтому вектор $y(\tau)$ с точностью до $(\tau - t)^2$ принадлежит гиперплоскости L, которая параллельна гиперплоскости, касательной к поверхности $\Omega(\delta)$, и которая проходит через точку

$$y_0 + l(y_0) l(y_0)^* f(y_0) \mid l(y_0) \mid^{-2} (\tau - t)$$

Ясно также, что L проходит через расположенную в гиперплоскости

$$\{x \mid q(x(t))^* (x - x(t)) = 0\}$$

точку $y_0 + u$, где

$$u = l_1(y_0) l(y_0)^* f(y_0) \mid l_1(y_0) \mid^{-2} (\tau - t)$$

Отсюда, из соотношения $2(y_0 - x(t))^* H(x(t)) u = (\tau - t) l(y_0)^* f(y_0)$ и из того факта, что векторы, нормальные к L и к $\Omega(\delta + (\tau - t) l(y_0)^* f(y_0))$ в точке $y_0 + u$, совпадают с точностью до $(\tau - t)$, следует соотношение (8).

Из включения (8), равенства (7) и условия (2) теоремы вытекает при всех $\tau \geqslant t$ соотношение $y(\tau) \in \Omega(\varphi(\tau))$, где $\varphi(\tau)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\varphi(\tau) \leqslant \delta \exp \int_t^\tau \lambda(x(t))\, dt$$

Используя это неравенство, условия (3) и (4) теоремы и применяя стандартную ляпуновскую технику [1, 2], получим утверждение теоремы.

Отметим, что для случая устойчивости при $q(x) = H(x) f(x)$, $\lambda(x) \equiv \equiv \text{const}$ из теоремы 1 получим утверждение, близкое к теореме 14.2 [2].

Положим в условии теоремы 1 $H(x) = \mid f(x) \mid^2 I$, $\lambda(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)$, где λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы $(\partial f/\partial x + \partial f^*/\partial x)/2$, удовлетворяющие условиям $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Тогда из теоремы 1 и известных результатов ([2], с. 684) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ на решении $x(t) \in G$ выполнено неравенство

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [\lambda_1(x(t)) + \lambda_2(x(t))]\, dt \leqslant -\varepsilon, \quad \forall j \tag{9}$$

то решение $x(t)$ будет орбитально асимптотически устойчивым.

Теорему 2 можно рассматривать как некоторое обобщение признака Пуанкаре [1] и теоремы Хартмана — Олеха [2].

Предположим теперь, что множество $\overline{G}$ положительно инвариантно и в $\overline{G}$ имеется единственное асимптотически устойчивое состояние равновесия системы (1). В этом случае, используя теорему 2 и рассуждения [2], получим следующее утверждение.

Теорема 3. Если для любого решения $x(t) \in G$ выполнено неравенство (9), то G — область притяжения устойчивого состояния равновесия.

Из теоремы 2 ясно также, что при отсутствии в положительно инвариантном множестве $\overline{G}$ состояний равновесия и при выполнении соотношения (9), находящиеся в $\overline{G}$ траектории системы (1) будут стремиться друг к другу при $t \to +\infty$.

Перейдем к примерам, иллюстрирующим применение теорем 1—3.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\theta^{\cdot\cdot} + \alpha\theta^{\cdot} + \varphi(\theta) = 0 \tag{10}$$

где α — положительное число, $\varphi(\theta)$ — дважды дифференцируемая 2π-периодическая функция, имеющая два нуля θ_1 и θ_2 на множестве $[0, 2\pi)$. Уравнением (10) описывается движение маятника в вязкой среде [3], динамика синхронной машины в простейшей идеализации [4], работа некоторых систем фазовой синхронизации [5], динамика джозефсоновских переходов [6].

Пусть $\varphi'(\theta_j) \neq 0$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta < 0$$

Тогда хорошо известно [3], что существует число $\alpha_{cr} > 0$, для которого при $\alpha < < \alpha_{cr}$ в фазовом пространстве системы

$$\theta^{\cdot} = \eta, \ \eta^{\cdot} = -\alpha\eta - \varphi(\theta) \qquad (11)$$

имеется ограниченное по координате η положительно инвариантное множество $\bar{G}_1$, заполненное круговыми [3, 7] движениями. При этом в G_1 имеется также предельный цикл второго рода. Поскольку для системы (11) $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = -\alpha < 0$, из теоремы 2 следует, что предельный цикл второго рода будет орбитально устойчивым и G_1 — область притяжения этого предельного цикла.

С другой стороны, при $\alpha < \alpha_{cr}$ в фазовом пространстве системы (11) имеется [3] ограниченное положительно инвариантное множество $\bar{G}_2$, содержащее единственное асимптотически устойчивое состояние равновесия. Из теоремы 3 сразу следует, что G_2 — область притяжения этого состояния равновесия.

Отметим, что единственными траекториями системы (11), для которых не будут выполнены все условия теоремы 2, являются седловые состояния равновесия и примыкающие к ним при $t \to +\infty$ сепаратрисы. (Здесь нарушается условие $x(t) \in G$, где $\bar{G}$ не содержит состояний равновесия.) Поэтому указанные траектории в конечном итоге и будут границами областей притяжения устойчивых положений равновесия и предельных циклов второго рода.

Этот результат хорошо известен [3] и может быть получен другими различными методами. Здесь следует отметить, что использование теорем 2 и 3 привело к минимуму вычислений.

Пример 2. Будем изучать глобальную асимптотическую устойчивость системы Лоренца [8, 9]

$$x^{\cdot} = -d(x - y), \ y^{\cdot} = rx - y - xz, \ z^{\cdot} = -bz + xy \qquad (12)$$

$$d > 0, \ r > 1, \ b > 0$$

Напомним, что система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия [7].

При $r > 1$ система (12) имеет три положения равновесия. Поэтому применение теоремы 3 будем здесь компоновать с достаточно хорошо развитыми оценками аттракторов системы (12) [9—11], позволяющими при некоторых значениях параметров утверждать, что аттрактор системы (12) содержится в множестве $G_1 \cup G_2 \cup \{0\}$. Здесь G_1 и G_2 — непересекающиеся, ограниченные области, замыкания которых содержат лишь по одному состоянию равновесия.

Здесь потребуется также следующее простое утверждение

Лемма. Если $b \geqslant 2$, то аттрактор системы (12) содержится в множестве

$$\{z \geqslant 0, \ y^2 + (z - r)^2 \leqslant Br^2, \ y^2 \leqslant Br^2 - 1, \ x^2 \leqslant Br^2 - 1\} \qquad (13)$$

$$B = b^2/4(b - 1)$$

если $b \leqslant 2$, то аттрактор системы (12) содержится в множестве

$$\{z \geqslant 0, \ y^2 + (z - r)^2 \leqslant r^2, \ y^2 \leqslant r^2 - 1, \ x^2 \leqslant r^2 - 1\} \qquad (14)$$

Доказательство леммы проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного результата в [12]. При $b \leqslant 2$ имеем

$$[y(t)^2 + (z(t) - r)^2 - r^2]^{\cdot} \leqslant -b\,[y(t)^2 + (z(t) - r)^2 - r^2]$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}}\, [y(t)^2 + (z(t) - r)^2] \leqslant r^2 \qquad (15)$$

Соотношение $\underline{\lim}_{t \to +\infty}\, z(t) \geqslant 0$ доказано в [10].

Бесконтактность множеств $\{y^2 + (z - r)^2 \leqslant r^2, \ |x| = c\}$ при $c > r$ и оценка (12) приводят к неравенству $\overline{\lim}_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant r$.

Пусть $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\ |x(t)| \leqslant x_k$. Тогда отсюда, из второго уравнения системы (12) и из (15) получим, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ y(t)^2 \leqslant x_k^2 r^2 (1 + x_k^2)^{-1} \tag{16}$$

Бесконтактность же множеств $\{y^2 + (z - r)^2 \leqslant r^2,\ y^2 \leqslant x_k^2 r^2 (1 + x_k^2)^{-1},\ |x| = c\}$ при $c^2 \geqslant x_k^2 r^2 (1 + x_k^2)^{-1}$ и оценки (15) и (16) приводят к неравенству

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} x(t)^2 \leqslant x_k^2 r^2 (1 + x_k^2)^{-1}$$

Обозначая $x_{k+1}^2 = x_k^2 r^2/(1 + x_k^2)$, $x_0 = r$ и переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$, получим, что $\lim_{k\to\infty} x_k^2 = r^2 - 1$.

Последнее соотношение доказывает утверждение леммы при $b \leqslant 2$. При $b \geqslant 2$ доказательство проводится аналогичным образом.

Приведем теперь одно из наиболее простых достаточных условий того, что аттрактор системы (12) содержится в множестве $G_1 \cup G_2 \cup \{0\}$ [11]

$$\mu^2/4 \geqslant \gamma\sigma_0^2 - 1 \tag{17}$$

$$\mu = \frac{d+1}{\sqrt{d(r-1)}}, \quad \gamma = \frac{2d}{b}, \quad \sigma_0^2 = \frac{Cr^2 - 1}{2d(r-1)}, \quad C = \begin{cases} B & \text{при } b \geqslant 2 \\ 1 & \text{при } b \leqslant 2 \end{cases}$$

При $b = 8/3$, $d = 10$ условие (17) выполнено для $r \geqslant 4$.

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(d + b + 1)$, для выполнения условий теоремы 3 достаточно, чтобы $\lambda_3 > -(d + b + 1)$ на множествах (13), (14). Применяя критерий Сильвестра к матрице

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial x}\right) - \lambda_3 I$$

получаем, что последнее неравенство выполнено, если

$$[(b + 1)(b + d) - (d + r - z)^2/4](d + 1) - (d + b)y^2/4 > 0$$

на множествах (13), (14). Это неравенство выполнено, если $b \geqslant 1$,

$$(b + 1)(b + d) > \frac{Cr^2(d + b)}{4(d + 1)} + \frac{d^2}{4} + \frac{dr}{2} \tag{18}$$

Итак, если выполнены условия (17) и (18), то по теореме 3 G_1 и G_2 — области притяжения устойчивых положений равновесия и, следовательно, система (12) будет глобально асимптотически устойчивой. Отметим, что при $b = 8/3$, $d = 10$ оценка (18) выполнена для $r \leqslant 3{,}5$. Таким образом, оценка (17), (18) несколько улучшает в некоторых случаях оценку Смита [13]. Отметим также, что дальнейшее улучшение полученных здесь условий глобальной асимптотической устойчивости возможно на пути применения развитого в [14, 15] аппарата оценок аттракторов системы (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
3. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299 с.
4. *Янко-Триницкий А. А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.: Л.: Госэнергоиздат, 1958. 103 с.
5. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.
6. *Лихарев К. К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
7. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
8. Странные аттракторы. Сб. статей. М.: Мир, 1981. 253 с.
9. *Leonov G. A., Reitmann V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. Leipzig: Teubner — Verlag, 1987. 197 S.
10. *Леонов Г. А.* Об одном способе построения положительно инвариантных множеств для системы Лоренца // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 860—863.
11. *Леонов Г. А.* О диссипативности и глобальной устойчивости системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1642—1644.
12. *Леонов Г. А.* О глобальной устойчивости системы Лоренца // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 861—863.
13. *Smith R. A.* Some applications of Hausdorff dimension inequalities for ordinary differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A, 1986. V. 104. № 3—4. P. 235—259.
14. *Леонов Г. А.* Об оценках аттракторов системы Лоренца // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1988. № 1. С. 32—37.
15. *Leonov G. A., Bunin A. I., Koksch N.* Attarktorlokalisierung des Lorenz — Systems // Z. angew Math. und Mech. 1987. Bd. 67. № 12. S. 649—656.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.II.1988