Аналогичным образом были исследованы задачи быстродействия для произвольных значений параметров b и γ.

Отметим, что задача управления по быстродействию системой вида (4.1), в которой вместо члена uy стоит u (т. е. эффективность пестицидов не зависит от численности хищников) исследована в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заславский Б. Г., Полуэктов Р. А.* Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988. 296 с.
2. *Goh B. S., Leitmann G., Vincent T. L.* Optimal Control of a Prey — Predator system // Math. Biosci. 1974. V. 19. № 3—4. P. 263—286.
3. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
4. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
5. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. // Вестн. МГУ. Сер. Мат., мех., астрон., физ., химии. 1959. 2. С. 25—32.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1989

УДК 539.3

И. Н. Кандоба

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается задача вычисления формы двусвязного поперечного сечения упругого однородного призматического стержня, обладающего максимальной крутильной жесткостью. При этом форма его внутренней призматической полости считается фиксированной, а площадь поперечного сечения стержня — постоянной.

Устанавливаются некоторые специальные свойства решения задачи Дирихле для уравнения $-\Delta U = 1$ в ограниченной замкнутой области двумерного евклидова пространства.

На примере рассматриваемой задачи иллюстрируется приложение полученных результатов при построении одного численного метода решения ряда задач оптимизации области для эллиптических систем. Работа примыкает к исследованиям [1, 2].

Рассмотрим плоскую двусвязную область $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ двумерного евклидова пространства R^2, ограниченную гладкими непересекающимися жордановыми кривыми $\Gamma^* \in C^1$ и $\Gamma \in C^2$ (фиг. 1).

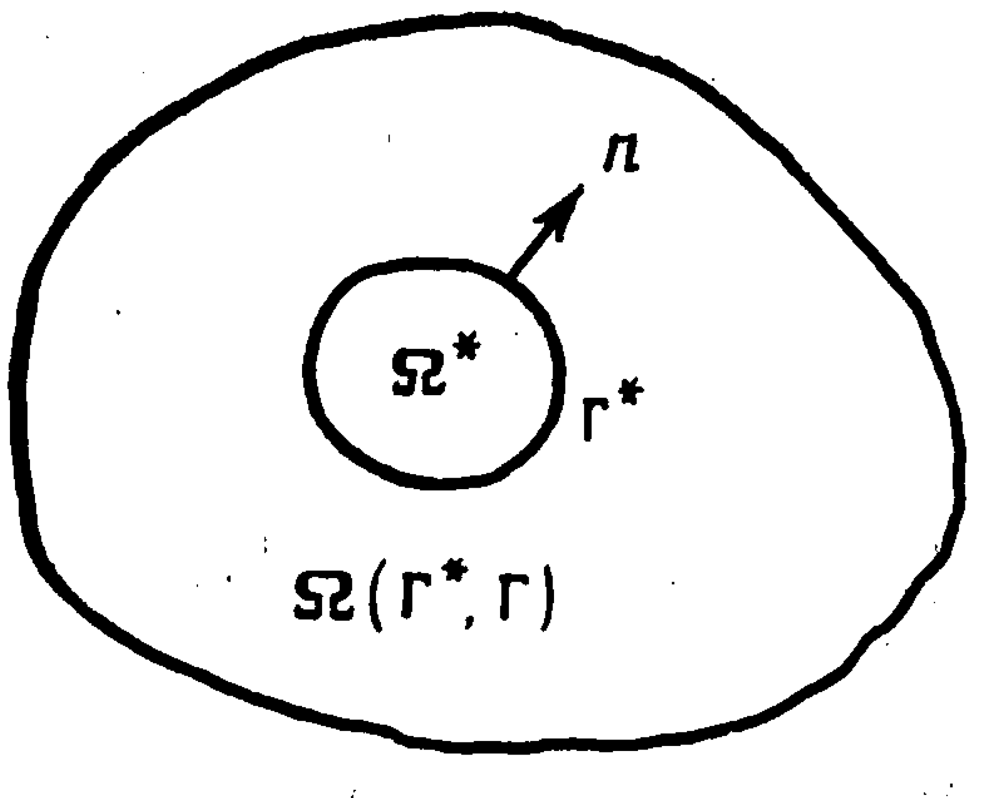
Обозначим $U(\Gamma^*, \Gamma; p)$ решение краевой задачи, описывающей состояние кручения [3]:

$$-\Delta U(\Gamma^*, \Gamma; p) = 1,\ p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma);\ U(\Gamma^*, \Gamma; p) = 0,\ p \in \Gamma$$
$$U(\Gamma^*, \Gamma; p) = \mathrm{const}\ (p \in \Gamma^*):\ \int\limits_{\Gamma^*} D_n U(\Gamma^*, \Gamma; p)\, |dp| = \mathrm{mes}\,(\Omega^*) \tag{1}$$

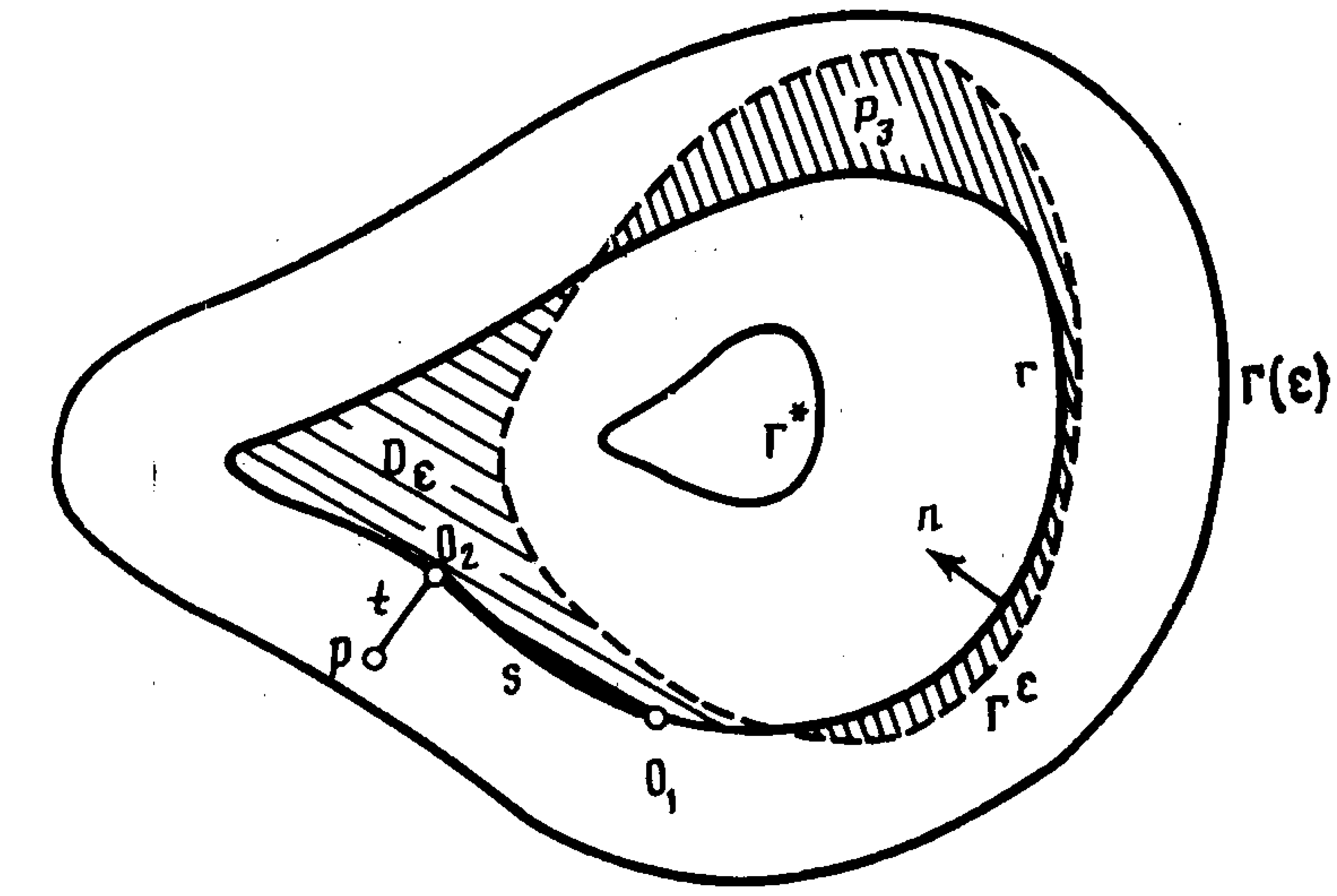
где D_n — производная по направлению внешней нормали к контуру Γ^*, ограничивающему область Ω^*, $\mathrm{mes}\,(\Omega^*)$ — мера Лебега области Ω^*.

Предположим, что $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ — поперечное сечение стержня. Тогда функция $U(\Gamma^*, \Gamma; p)$ задает распределение напряжений в этом сечении, возникающих при кручении данного стержня. При этом крутильная жесткость стержня определяется значением функционала

$$J(U(\Gamma^*, \Gamma; p)) = \int\limits_{\Omega(\Gamma^*, \Gamma)} \varphi^2(p)\, dp$$
$$\varphi(p) = |\nabla U(\Gamma^*, \Gamma; p)|,\ p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем обозначения

$$c(\Gamma) = \max \{U(\Gamma^*, \Gamma;\, p) \mid p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma)\},\ I(\Gamma) = (0,\, c(\Gamma))$$

$$\Gamma_c = \{p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma) \mid U(\Gamma^*, \Gamma;\, p) = c,\ c \in I(\Gamma)\}$$

$$B(\Gamma) = \{\Gamma_c \mid c \in I(\Gamma)\},\ \varepsilon(\Gamma) = 1/\varkappa(\Gamma)$$

$$\varkappa(\Gamma) = \max \{\, |\varkappa(\Gamma, p)| \ \ | p \in \Gamma\}$$

где $\varkappa(\Gamma, p)$ — кривизна контура Γ в точке p. Очевидно, в силу сделанных предположений о гладкости и замкнутости контура Γ функция $\varkappa(\Gamma)$ положительна и ограничена [4].

Под ε-окрестностью области $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ будем понимать область

$$\Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon)) = \bigcup_p \{B(p, \varepsilon) \setminus \Omega^* \mid p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma)\},\ \varepsilon > 0$$

$$B(p, \varepsilon) = \{q \in R^2 \mid |p - q| < \varepsilon\}$$

где $\Gamma(\varepsilon)$ — внешняя составляющая границы области

$$\Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon)).$$

Для вычисления искомой формы сечения был предложен [2] итерационный численный метод, в основе которого лежит неравенство (теорема 1 в [2])

$$J(U(\Gamma^*, \Gamma^\varepsilon;\, p)) - J(U(\Gamma^*, \Gamma;\, p)) \geqslant \Phi(\Gamma^*, \Gamma;\, \varepsilon) \tag{2}$$

$$\Phi(\Gamma^*, \Gamma;\, \varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi^2(\varepsilon, p)\, dp - \int\limits_{\Omega} \varphi^2(\varepsilon, p)\, dp, \quad \varepsilon \in (0,\, \delta(\Gamma))$$

$$\varphi(\varepsilon, p) = |\nabla U(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon);\, p)|,\ p \in \Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon))$$

$$\Omega = \Omega(\Gamma^*, \Gamma),\ \Omega^\varepsilon = \Omega(\Gamma^*, \Gamma^\varepsilon) \subseteq \Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon)):\ \Gamma^\varepsilon \in B(\Gamma(\varepsilon))$$

$$\mathrm{mes}(\Omega^\varepsilon) = \mathrm{mes}(\Omega) = S;\ \delta(\Gamma) = \max \{0 < \delta \leqslant \varepsilon(\Gamma) \mid \Gamma^\delta\}$$

где Γ^δ — односвязный контур. Относительно $\delta(\Gamma)$ заметим, что в рассматриваемой здесь задаче оптимизации в силу известных [5] необходимых условий оптимальности естественно ограничиться классом областей $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$, на границе Γ которых модуль градиента решения задачи (1) равномерно отделен от нуля. А для таких областей $\delta(\Gamma) > 0$.

На каждом шаге этого метода за очередное приближение искомой формы сечения принимается область, ограниченная внутренним контуром Γ^* и внешним Γ^ε, где $\varepsilon \in (0,\, \delta(\Gamma))$ (фиг. 2). Очевидно, для того, чтобы при этом происходило улучшение функционала качества, достаточно, чтобы существовало такое $\varepsilon^* \in (0,\, \delta(\Gamma)]$, при котором выполняется неравенство $\Phi(\Gamma^*, \Gamma;\, \varepsilon^*) > K\varepsilon^*$, где K — некоторая положительная постоянная.

Следующая теорема дает последнему неравенству качественную интерпретацию по существу в терминах необходимых условий оптимальности.

Теорема 1. Пусть $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ — некоторая двусвязная замкнутая область из R^2 обладающая указанными выше свойствами. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(\Gamma^*, \Gamma;\, \varepsilon) - \Phi(\Gamma^*, \Gamma;\, 0) \geqslant K(\Gamma)\, \varepsilon \geqslant 0 \tag{3}$$

$$K(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \varphi^2(p)\, |dp| - L^{-1} \Big(\int\limits_\Gamma \varphi(p)\, |dp|\Big)^2$$

где $L = L(\Gamma)$ — длина контура Γ.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 1. Пусть функция $f(\varepsilon, x) \in C^{0,m}([0, \delta] \times [a, b])$ и, кроме того, $f_x^{(k)}(\varepsilon, x) \in C^{0,\, m-k}([0, \delta] \times [a, b])$ $(m \in N,\ k = 1, 2, \ldots, m-1)$. Тогда для любого $\nu \in [0, \delta]$ при $\varepsilon \to \nu$ $f_x^{(k)}(\varepsilon, x) \to f_x^{(k)}(\nu, x)$ равномерно по x на $[a, b]$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Действительно, для любого $\nu \in [0, \delta]$ и всех $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ справедливы неравенства $(\varepsilon \in [0, \delta],\ x \in [a, b])$

$$0 \leqslant |G_k(\varepsilon, x)| \leqslant \left| \int_a^x G_{k+1}(\varepsilon, y)\, dy \right| + |G_k(\varepsilon, a)| \leqslant F_k(\varepsilon) + |G_k(\varepsilon, a)|,$$

$$F_k(\varepsilon) = \int_a^b |G_{k+1}(\varepsilon, y)|\, dy, \quad G_k(\varepsilon, x) = f_x^{(k)}(\varepsilon, x) - f_x^{(k)}(\nu, x)$$

В силу сделанных предположений о гладкости функции $f(\varepsilon, x)$ и теоремы Лебега имеем $F_k(\varepsilon) \to 0$ и $|G_k(\varepsilon, a)| \to 0$ при $\varepsilon \to \nu$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Откуда и следует доказываемое утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы. Введем в рассмотрение множества

$P(\varepsilon) = \overline{\Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon)) \setminus \Omega(\Gamma^*, \Gamma)}$, $\quad P_\varepsilon = \overline{P(\varepsilon) \setminus D(\varepsilon)}$, $D(\varepsilon) = \overline{\Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon)) \setminus \Omega^\varepsilon}$, $P_\varepsilon = \overline{P(\varepsilon) \setminus D(\varepsilon)}$ (фиг. 2). Используя формулу Грина, можно убедиться в справедливости равенства

$$\Phi(\Gamma^*, \Gamma; \varepsilon) - \Phi(\Gamma^*, \Gamma; 0) = A + B - C$$

$$U(\varepsilon; p) = U(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon), p)$$

$$A = \int_{P_\varepsilon} U(\varepsilon; p)\, dp - \int_{D_\varepsilon} U(\varepsilon; p)\, dp, \quad B = \int_\Gamma U(\varepsilon; p)\, D_n U(\varepsilon; p)\, |dp|,$$

$$C = \int_{\Gamma^\varepsilon} U(\varepsilon; p)\, D_n U(\varepsilon; p)\, |dp|$$

Здесь D_n — производная по направлению внешней относительно $P(\varepsilon)$ (в выражении для B) и $D(\varepsilon)$ (в выражении для C) нормали к соответствующему контуру.

По определению Γ^ε, имеем $U(\varepsilon; p) = c(\varepsilon)$, $p \in \Gamma^\varepsilon$, где $c(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от Γ^*, Γ, ε и S. По определению P_ε и D_ε, для любых точек $p \in P_\varepsilon$ и $q \in D_\varepsilon$ справедливы неравенства $U(\varepsilon; p) \geqslant c(\varepsilon)$ и $U(\varepsilon; q) \leqslant c(\varepsilon)$ соответственно. А поскольку, по определению $\Phi(\Gamma^*, \Gamma; \varepsilon)$, $\operatorname{mes}(P_\varepsilon) = \operatorname{mes}(D_\varepsilon)$, то $A \geqslant c(\varepsilon) \operatorname{mes}(D_\varepsilon) \geqslant 0$. Отсюда получаем, что

$$\Phi(\Gamma^*, \Gamma; \varepsilon) - \Phi(\Gamma^*, \Gamma; 0) \geqslant B - c(\varepsilon) \int_{\Gamma^\varepsilon} \varphi(\varepsilon, p)\, |dp| = B - c(\varepsilon) \int_\Gamma \varphi(p)\, |dp| \tag{4}$$

По определению $\delta(\Gamma)$ и $\Gamma(\varepsilon)$, каждой точке $p \in \Gamma$ может быть поставлена в соответствие единственная точка $p(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$, такая, что точки p и $p(\varepsilon)$ лежат на отрезке $T(p, p(\varepsilon))$, их соединяющем и перпендикулярном контурам Γ и $\Gamma(\varepsilon)$ в соответствующих им точках.

По формуле конечных приращений имеем

$$U(\varepsilon; p) = (\nabla U(\varepsilon; p_0),\ p - p(\varepsilon))\, \varepsilon, \quad p_0 \in T(p, p(\varepsilon))$$

Откуда в силу непрерывности $U(\varepsilon; p)$ в $\Omega(\Gamma^*, \Gamma(\varepsilon))$ следует $U(\varepsilon; p) = (D_n U(\varepsilon; p) + \psi(\varepsilon, p))\, \varepsilon$, где $\psi(\varepsilon, p)$ — некоторая непрерывная по p на Γ функция, причем $\psi(\varepsilon, p) \to 0$ равномерно по $p \in \Gamma$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$B = \varepsilon \int_\Gamma ((D_n U(\varepsilon; p))^2 + \sigma(\varepsilon, p))\, |dp| \tag{5}$$

$$\sigma(\varepsilon, p) = \psi(\varepsilon, p)\, D_n U(\varepsilon; p)$$

Для удобства введем новую координатную систему s, t, связанную с опорной линией Γ (фиг. 2). Координата точки $p \in P(\varepsilon) \cup D(\varepsilon)$ отсчитывается вдоль Γ от некоторой фиксированной точки $O_1 \in \Gamma$ до точки O_2 пересечения Γ с внутренней относительно $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ нормалью к Γ, проходящей через точку p. Координата t равна длине отрезка O_2p, взятой со знаком, зависящим от того, принадлежит точка p области $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ (знак плюс) или нет (знак минус).

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ контур Γ^ε в координатах s, t может быть задан уравнением $t = \rho(\varepsilon, s)$, $s \in [0, L(\Gamma)]$. При этом для каждого $\varepsilon > 0$ направление обхода по опорному контуру Γ от точки O_1 до O_2 выбирается так, чтобы

$$\int_\Gamma \varkappa(\Gamma, p(s, 0))\, \rho^2(\varepsilon, p(s, 0))\, |dp| =$$

$$= \int \varkappa(\Gamma, s)\, \rho^2(\varepsilon, s)\, ds \geqslant 0,\ \varkappa(\Gamma, s) = \varkappa(\Gamma, p(s, 0))$$

Здесь и далее интегрирование по s ведется от 0 до $L = L(\Gamma)$.

Рассмотрим выражение

$$G(\varepsilon) = L^{-1} \int (U(\varepsilon;\ p(s, \rho(\varepsilon, s))) - U(\varepsilon;\ p(s, -\varepsilon)))\, ds$$

Очевидно, что $G(\varepsilon) = c(\varepsilon)$. С другой стороны, применяя формулу конечных приращений к выражению, стоящему под знаком интеграла, получаем

$$c(\varepsilon) = L^{-1} \int F(\varepsilon, s)\,(\varepsilon + \rho(\varepsilon, s))\, ds$$

$$F(\varepsilon, s) = D_n U(\varepsilon;\ p(s, 0)) + \nu(\varepsilon, p(s, 0))$$

где $\nu(\varepsilon, p(s, 0)) \to 0$ равномерно на Γ при $\varepsilon \to 0$. При этом справедливы оценки

$$F(\varepsilon, s) < \varepsilon^{-1} c(\varepsilon),\ \forall s \in [0, L(\Gamma)]:\ \rho(\varepsilon, s) > 0$$

$$F(\varepsilon, s) > \varepsilon^{-1} c(\varepsilon),\ \forall s \in [0, L(\Gamma)]:\ \rho(\varepsilon, s) < 0$$

Следовательно,

$$\int F(\varepsilon, s)\, \rho(\varepsilon, s)\, ds < \varepsilon^{-1} c(\varepsilon) \int \rho(\varepsilon, s)\, ds <$$

$$< \varepsilon^{-1} c(\varepsilon) \int \left(\rho(\varepsilon, s) + \frac{1}{2} \varkappa(\Gamma, s)\, \rho^2(\varepsilon, s)\right) ds =$$

$$= \varepsilon^{-1} c(\varepsilon) \int \int_0^{\rho(\varepsilon, s)} (1 + t\varkappa(\Gamma, s))\, dt\, ds = \varepsilon^{-1} c(\varepsilon)\, (\operatorname{mes}(D_\varepsilon) - \operatorname{mes}(P_\varepsilon)) = 0$$

Отсюда $c(\varepsilon) < L^{-1}\varepsilon \int F(\varepsilon, s)\, ds$, и при учете соотношений (4), (5) получаем оценку

$$\Phi(\Gamma^*, \Gamma;\ \varepsilon) - \Phi(\Gamma^*, \Gamma;\ 0) > \varepsilon \Bigg(\int_\Gamma (D_n U(\varepsilon;\ p))^2\, |dp| -$$

$$- L^{-1} \left(\int_\Gamma D_n U(\varepsilon;\ p)\, |dp| \right)^2 \Bigg) + o(\varepsilon) \tag{6}$$

В силу леммы 7 из [6]

$$U(\varepsilon;\ p(s, 0)) = U(\varepsilon, s) \in C^{0,1}([0, \delta(\Gamma)] \times [0, L(\Gamma)])$$

$$D_n U(\varepsilon, s) \in C^{0,0}([0, \delta(\Gamma)] \times [0, L(\Gamma)])$$

Неравенство (3) следует из предложения 1 и неравенства (6). При этом из неравенства Гельдера получаем, что $K(\Gamma) \geqslant 0$.

Предложение 2. Пусть $f(x) \in C^2[a, b]$. Тогда для выполнения равенства

$$\langle f^2 \rangle = (b - a)^{-1} \langle f \rangle^2 \left(\langle f \rangle = \int_a^b f(x)\, dx \right) \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in [a, b]$.

Можно убедиться, что разность левой и правой частей равенства (7) равна $\| f(x) - K \|_{L_2[a, b]}$, где $K = (b - a)^{-1} \langle f \rangle$, откуда и следует доказываемое утверждение.

В заключение отметим некоторые приложения полученных результатов. Допустим, что форма поперечного сечения стержня занимает область $\Omega(\Gamma^*, \Gamma)$ и не является оптимальной, т. е. $\max\{\varphi(p) \mid p \in \Gamma\} - \min\{\varphi(p) \mid p \in \Gamma\} > 0$ [5]. Тогда из неравенства (2), теоремы 1 и предложения 2 следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что стержень, поперечное сечение которого занимает область $\Omega(\Gamma^*, \Gamma^\varepsilon)$, обладает большей крутильной жесткостью, чем стержень с исходной формой поперечного сечения. Задавшись некоторой начальной областью и осуществляя каждый раз выбор такого ε, можно построить максимизирующую последовательность областей в рассматриваемой здесь задаче оптимизации области. Можно показать, что вдоль этой последовательности происходит уменьшение невязки модуля градиента решения задачи (1) на границе каждой последующей области.

Аналогичные (с точностью до постановки задачи) утверждения справедливы и для задачи минимизации теплового потока через стенки призматической трубки, на поперечное сечение которой накладывается изопериметрическое ограничение.

Автор благодарит Ю. С. Осипова и А. П. Суетова за внимание к работе, обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acker A*. Heat flow inequalities with applications to heat flow optimizations problems // SIAM J. Math. Analysis. 1977. V. 8. № 4. P. 604—618.
2. *Кандоба И. Н*. Об одном алгоритме оптимизации форм в эллиптических системах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 278—283.
3. *Лурье А. И*. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. *Брус Дж., Джиблин П*. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
5. *Баничук Н. В*. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 225 с.
6. *Крейн Г*. Поведение решений эллиптических задач при вариации области // Studia Math. 1968. V. 31. № 4. P. 411—424.

Свердловск

Поступила в редакцию
20.VII.1989