Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 531.36

С. В. Болотин

ДВОЯКОАСИМПТОТИЧЕСКИЕ К ИНВАРИАНТНЫМ ТОРАМ ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Теория Пуанкаре [1] рождения изолированных периодических движений при возмущении резонансных инвариантных торов интегрируемых гамильтоновых систем была обобщена [2] методами КАМ-теории на случай условно-периодических движений. В настоящей работе вариационными методами доказывается существование движений, двоякоасимптотических к рождающимся инвариантным торам. Существование таких траекторий важно при качественном исследовании возмущенной системы. Например, если двоякоасимптотическая траектория изолирована, то возмущенная система неинтегрируема [3] и обладает стохастическим поведением. На существовании двоякоасимптотических к инвариантным торам траекторий основана диффузия Арнольда [4] для гамильтоновых систем со многими степенями свободы.

Пусть функция Гамильтона $H = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$ автономной гамильтоновой системы с m степенями свободы гладко зависит от параметра ε. Предположим, что невозмущенная система с функцией Гамильтона H_0 имеет гладкое компактное инвариантное m-мерное лагранжево многообразие M (многообразие M лагранжево, если ограничение канонической 2-формы фазового пространства на M равно нулю), целиком заполненное n-мерными инвариантными торами, несущими условно-периодические движения с одинаковым вектором частот $\omega \in \mathbf{R}^n$. Это значит, что задано свободное действие n-мерного тора $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/2\pi Z^n$ на M: $\varphi \in \mathbf{T}^n$, $x \in M \to f(\varphi, x) \in M$, причем для любого $x \in M$ кривая $t \to f(\omega t, x)$ — траектория невозмущенной гамильтоновой системы. Основным примером является случай [2], когда невозмущенная система вполне интегрируема, а M — ее m-мерный инвариантный резонансный тор, такой, что соответствующий вектор частот $\Omega \in \mathbf{R}^m$ удовлетворяет $m - n$ резонансным соотношениям вида $\langle k, \Omega\rangle = 0$, $k \in \mathbf{Z}^m$.

Окрестность лагранжевого многообразия M в фазовом пространстве можно отождествить с окрестностью множества $\{y = 0\}$ в кокасательном расслоении $T^*M = \{(x, y)\colon x \in M, y \in T_x^*M\}$ с канонической 2-формой $dx \wedge dy$. Продолжим действие тора T^n на M до гамильтонова действия $\mathbf{T}^n$ на T^*M:

$$\varphi \in \mathbf{T}^n,\ (x, y) \in T^*M \to (f(\varphi, x), f_x^{*-1}y) \tag{1}$$

Пусть $\bar H_0$, $\bar H_1$ — результат усреднения функций H_0, H_1 по действию (1), например,

$$\bar H_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbf{T}^n} H_0(f(\varphi, x), f_x^{*-1}y)\, d\varphi \tag{2}$$

Сделаем следующие предположения:

1) Вектор частот ω нерезонансный в смысле КАМ-теории: существуют $C > 0$, $N > n - 1$, такие, что

$$|\langle\omega, k\rangle| \geqslant C \|k\|^{-N} \tag{3}$$

для всех ненулевых $k \in \mathbf{Z}^n$.

2) Выполнено следующее условие выпуклости: гессиан $A(x) = \bar H_{0yy}(x, 0)$ положительно определен при всех $x \in M$. Это условие можно ослабить, заменив его, например, на условие изоэнергетической выпуклости

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geqslant c\|\xi\|^2,\quad c > 0$$

для всех ξ, таких, что $\langle\xi, \bar H_{0y}(x, 0)\rangle = 0$, и всех $x \in M$.

Функция $V(x) = \bar H_1(x, 0)$ на M инвариантна относительно действия тора T^n и достигает максимума на некотором торе $\Gamma_0 = \{f(\varphi, x_0)\colon \varphi \in \mathbf{T}^n\}$.

3) Предположим, что этот максимум строгий и невырожденный, т. е. ранг $V_{xx}(x_0)$ равен $m - n$.

Тогда можно показать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система имеет гладкий инвариантный тор $\Gamma = \{g(\varphi, \sqrt{\varepsilon}) \colon \varphi \in T^n\}$ в фазовом пространстве, гладко зависящий от $\sqrt{\varepsilon}$, совпадающий с Γ_0 при $\varepsilon = 0$ и заполненный условно-периодическими движениями $t \to g(\omega t + \varphi_0, \sqrt{\varepsilon})$ с вектором частот ω. Через Γ проходят два инвариантных m-мерных лагранжевых многообразия $\Lambda^{\pm}$, гладко зависящих от $\sqrt{\varepsilon}$, совпадающих с M при $\varepsilon = 0$, пересекающихся вдоль Γ под ненулевым углом порядка $\sqrt{\varepsilon}$ и заполненные траекториями возмущенной системы, асимптотическими к Γ при $t \to \pm\infty$ соответственно.

При $n = 1$, когда многообразие M заполнено периодическими траекториями невозмущенной системы, эти утверждения принадлежат Пуанкаре [1]. В общем случае они являются переформулировкой части результатов [2]. Доказательство проводится методами [5]. Рассматривался [2] случай, когда M — резонансный инвариантный тор вполне интегрируемой системы, однако приведенный здесь вариант не требует изменений в доказательстве. Фактически вместо условия 2) оно использует более слабое условие невырожденности. Предположение 2) нужно для доказательства следующей теоремы.

Теорема. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует траектория возмущенной системы, двоякоасимптотическая (гомоклиническая) к Γ при $t \to \pm\infty$ и содержащаяся в окрестности M шириной порядка $\sqrt{\varepsilon}$. В частности, $(\Lambda^+ \cap \Lambda^-) \setminus \Gamma \neq \varnothing$.

Вообще говоря, эта траектория двоякоасимптотична к разным условно-периодическим движениям на торе Γ при $t \to \pm\infty$. Тем же методом можно показать, что для всех $x \in M$ существует асимптотическая к Γ траектория, проекция которой на M проходит через x, т. е. $\pi\Lambda^{\pm} = M$, где $\pi \colon T^*M \to M$ — проекция. В некоторых случаях можно дать оценки числа двоякоасимптотических к Γ траекторий. Например, если $M = \mathrm{T}^m$ — резонансный тор, то их число не меньше $m - n$.

Доказательство теоремы основано на методах [6]. По формуле Тейлора с точностью до постоянной

$$H = \langle v(x),\ y\rangle + {}^1/_2\langle H_{0yy}(x, 0)\, y,\ y\rangle + \varepsilon H_1(x, 0) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon|y| + |y|^3) \qquad (4)$$

Траектории векторного поля $v(x) = H_{0y}(x, 0)$ невозмущенной системы на M имеют вид $t \to f(\omega t, x)$. Поэтому $v(x) = f_\varphi(0, x)\,\omega$ и $\langle v(x),\ y\rangle = \langle \omega,\ I\rangle$, где $I = f_\varphi^*(0, x)\, y$ — момент, отвечающий гамильтонову действию (1) тора T^n на T^*M (в классической терминологии I — действие, отвечающее угловой переменной $\varphi \in \mathrm{T}^n$).

Так как вектор частот ω нерезонансный (3), можно сделать замену переменных, представляющую один шаг классического метода усреднения «по быстрой переменной $\varphi \in \mathrm{T}^n$», приведя функцию Гамильтона (4) к виду [2]

$$\bar H = \langle \omega,\ I\rangle + {}^1/_2\langle \bar H_{0yy}(x,\ 0)\, y,\ y\rangle + \varepsilon H_1(x,\ 0) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon|y| + |y|^3) \qquad (5)$$

Здесь $\bar H_0$ — функция (2) и преобразованные переменные обозначены теми же буквами.

По условию 2) положительно определенная квадратичная форма $\|y\|^2 = \langle A(x)\, y, y\rangle$, $y \in T_x{}^*M$ определяет риманову метрику на M. В силу (5) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ функция $\bar H$ строго выпукла по y в области $\{(x, y) : \|y\|^2 \leqslant \delta\}$:

$$a\,\|\xi\|^2 \leqslant \langle \bar H_{yy}\xi,\ \xi\rangle \leqslant b\,\|\xi\|^2 \qquad (6)$$

для всех ξ, где постоянные $0 < a < b$ не зависят от ε. Переопределим функцию Гамильтона (5) вне области $\{\|y\|^2 \leqslant \delta\}$ таким образом, чтобы она гладко зависела от ε и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $\xi \in T_x{}^*M$ удовлетворяла неравенству (6) (возможно, с измененными a, b), и совпадала с полиномом второй степени по y при $\|y\| \to \infty$. Будет показано, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ построенная гамильтонова система имеет двоякоасимптотическую к Γ траекторию, целиком содержащуюся в области $\{\|y\|^2 \leqslant C\varepsilon\}$. Здесь и в дальнейшем A, B, C — положительные постоянные, не зависящие от ε. При $\varepsilon < \delta / C$ это даст доказательство теоремы.

Выполним каноническую замену $y \mapsto \eta = y / \sqrt{\varepsilon}$, $\bar H \mapsto F = \bar H / \sqrt{\varepsilon}$. Тогда функция Гамильтона (5) примет вид

$$F = \langle v(x),\ \eta\rangle + \sqrt{\varepsilon}\,({}^1/_2\,\|\eta\|^2 + V(x)) + O(\varepsilon) \qquad (7)$$

где риманова метрика $\|\ \|$ и функция V инвариантны относительно действия тора T^n на M. Представление возмущенной функции Гамильтона в виде (7) — основа метода Делоне в резонансной теории возмущений [1].

Без ограничения общности можно предполагать, что $F \equiv 0$ на инвариантном торе Γ

и проекция Γ на M при отображении π: $T^*M \to M$ совпадает с инвариантным тором Γ_0 невозмущенной системы.

Действительно, пусть Γ задается отображением $\varphi \in T^n \mapsto g(\varphi, \sqrt{\varepsilon}) \in M$. Продолжим отображение $\pi\Gamma \to \Gamma_0$: $\pi g(\varphi, \sqrt{\varepsilon}) \mapsto f(\varphi, x_0)$ до гладко зависящего от $\sqrt{\varepsilon}$ диффеоморфизма h: $M \to M$, тождественного при $\varepsilon = 0$, и сделаем каноническое преобразование $(x, \eta) \mapsto (h(x, \sqrt{\varepsilon}), h_x^{*-1}\eta)$. Тогда в новых переменных $\pi\Gamma = \Gamma_0$.

Так как инвариантные многообразия $\Lambda^{\pm}$ лагранжевы и в окрестности инвариантного тора Γ_0 однозначно проектируются на M, их можно задать производящими функциями $S^{\pm}$, определенными в не зависящей от ε окрестности $U \subset M$ тора Γ_0:

$$\Lambda^{\pm} \supset \{(x, \eta) : x \in U, \ \eta = S_x^{\pm}\}$$

причем функции $S^{\pm} = S_0^{\pm} + \sqrt{\varepsilon} S_1^{\pm} + O(\varepsilon)$ гладко зависят от $\sqrt{\varepsilon}$ и удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби

$$F(x, S_x^{\pm}, \sqrt{\varepsilon}) = \langle v, S_x^{\pm} \rangle + \sqrt{\varepsilon}\,({}^1/_2 \| S_x^{\pm} \|^2 + V) + O(\varepsilon) = 0 \qquad (8)$$

Отсюда

$$\langle v, S_{0x}^{\pm} \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} S_0^{\pm}(f(\omega t, x)) = 0 = \langle v, S_{1x}^{\pm} \rangle + {}^1/_2 \| S_{0x}^{\pm} \|^2 + V$$

Из условия (3) нерезонансности ω следует, что функции $S_0^{\pm}$ и $S_1^{\pm}$ инвариантны относительно действия T^n на M:

$$S_{0,1}^{\pm}(f(\varphi, x)) \equiv S_{0,1}^{\pm}(x); \ {}^1/_2 \| S_{0x}^{\pm} \|^2 + V \equiv 0 \qquad (9)$$

причем $\Lambda_0^{\pm} = \{(x, \eta) : x \in U, \ \eta = S_{0x}^{\pm}\}$ — инвариантные многообразия, содержащие инвариантный тор Γ_0 гамильтоновой системы с функцией Гамильтона ${}^1/_2 \ \|\eta\|^2 + V$. Эта гамильтонова система обратима, поэтому Λ_0^+ переходит в Λ_0^- при отражении $\eta \mapsto -\eta$ и $S_0^- = -S_0^+$. Положим $S = {}^1/_2 (S^+, + S^-)$. Тогда $S = \sqrt{\varepsilon} S_1 + O(\varepsilon)$, где функция S_1 инвариантна относительно действия T^n на M. Продолжим S до гладко зависящей от $\sqrt{\varepsilon}$ функции вида (9) на всем M, где S_1 инвариантна относительно T^n.

Лемма 1. Функция $x \mapsto F(x, S_x, \sqrt{\varepsilon})$ на M при достаточно малых $\varepsilon > 0$ достигает строгого невырожденного равного нулю максимума при $x \in \Gamma_0$.

Доказательство. При $x \in U$ из уравнения (8) и выпуклости F по η следует

$$F(x, S_x, \sqrt{\varepsilon}) = F(x, {}^1/_2 (S_x^+ + S_x^-), \sqrt{\varepsilon}) \leqslant$$

$$\leqslant {}^1/_2 (F(x, S_x^+, \sqrt{\varepsilon}) + F(x, S_x^-, \sqrt{\varepsilon})) = 0$$

Равенство достигается только при $S_x^+ = S_x^-$, т. е. при $x \in \Gamma_0$. Так как Λ^+ и Λ^- пересекаются вдоль Γ под ненулевым углом, то максимум на Γ_0 невырожденный.

По условию функция V достигает строгого равного нулю максимума на торе Γ_0. Поэтому $V(x) \geqslant c > 0$ при $x \in M \setminus U$. При $x \in M \setminus U$ имеем в силу (9)

$$F(x, S_x, \sqrt{\varepsilon}) = \langle v, S_x \rangle + \sqrt{\varepsilon}\,({}^1/_2 \| S_x \|^2 + V) + O(\varepsilon) =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} V(x) + O(\varepsilon) \geqslant c\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) > 0$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Выполним каноническое преобразование $(x, \eta) \mapsto (x, p)$; $p = \eta - S_x$. Так как $\langle v, S_{1x} \rangle \equiv 0$, в новых переменных x, p функция Гамильтона F сохраняет свой вид (7), но инвариантный тор Γ возмущенной системы содержится в $M = \{p = 0\}$ и совпадает с Γ_0. Кроме того, по лемме 1 функция $F|_{p=0}$ достигает строгого невырожденного равного нулю максимума на Γ_0.

Перейдем к лагранжевой форме уравнений движения, выполнив преобразование Лежандра

$$(x, p) \mapsto (x, x^{\cdot}) \in TM; \ x^{\cdot} = F_p$$

$$L(x, x^{\cdot}, \sqrt{\varepsilon}) = \max_p (\langle p, x^{\cdot} \rangle - F(x, p, \sqrt{\varepsilon})) \qquad (10)$$

В силу (6) функция F выпукла по импульсу p, так что преобразование (10) корректно определено и функция L выпукла по скорости $x^{\cdot}$:

$$\frac{\|\xi\|^2}{b\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \langle L_{x^{\cdot}x^{\cdot}}\xi, \xi \rangle \leqslant \frac{\|\xi\|^2}{a\sqrt{\varepsilon}} \qquad (11)$$

для всех $\xi \in T_xM$, где $\| \xi \|^2 = \langle \xi, A^{-1}(x) \xi \rangle$. В явном виде

$$L = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \| x^{\cdot} - v(x) \|^2 - \sqrt{\varepsilon} V(x) + \varepsilon R\left(x, \frac{x^{\cdot} - v(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \sqrt{\varepsilon}\right) \tag{12}$$

В силу (10) $\min_{x^{\cdot}} L(x, x^{\cdot}, \sqrt{\varepsilon}) = -F(x, 0, \sqrt{\varepsilon})$, так что функция L на TM достигает строгого невырожденного равного нулю минимума на инвариантном торе Γ_0, т. е. при $x \in \Gamma_0$ и $x^{\cdot} = v(x)$.

Дальнейшая часть доказательства теоремы проводится методами вариационного исчисления в целом и следует [6]. Пусть Ω — множество абсолютно непрерывных кривых γ: $[0, \tau] \to M$, таких, что

$$\int_0^\tau \| \gamma^{\cdot}(t) \|^2 dt < \infty$$

и $\gamma(0), \gamma(\tau) \in \Gamma_0$ (длина $\tau(\gamma) > 0$ отрезка $[0, \tau]$ зависит от кривой γ). Для заданного $h > 0$ определим на Ω функционал действия Гамильтона S_h по формуле

$$S_h(\gamma) = \int_0^\tau (L(\gamma(t), \gamma^{\cdot}(t), \sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} h)\, dt \tag{13}$$

Если γ — критическая точка функционала (13), то $\gamma(t)$ — решение уравнений Лагранжа, и по формуле для вариации функционала действия

$$\delta S_h(\gamma) = \langle p(t), \delta\gamma(t) \rangle |_0^\tau + (h\sqrt{\varepsilon} - F(\tau))\, \delta\tau$$

$$p(t) = L_{x^{\cdot}}(\gamma(t), \gamma^{\cdot}(t), \sqrt{\varepsilon}), \quad F(t) = F(\gamma(t), \ p(t), \sqrt{\varepsilon})$$

Поэтому $\langle p(0), \xi \rangle = 0$ для всех $\xi \in T_{\gamma(0)}\Gamma_0$, $\langle p(\tau), \xi \rangle = 0$ для всех $\xi \in T_{\gamma(\tau)}\Gamma_0$ и $F(t) \equiv h\sqrt{\varepsilon}$. В силу (6)

$$h\sqrt{\varepsilon} = F(\gamma(0), \ p(0), \sqrt{\varepsilon}) \geqslant \langle p(0), \ v(\gamma(0)) \rangle + {}^1\!/_2 a \sqrt{\varepsilon} \| p(0) \|^2 = {}^1\!/_2 a \sqrt{\varepsilon} \| p(0) \|^2$$

(использовано, что $F_p(x, 0, \sqrt{\varepsilon}) = v(x) \in T_x\Gamma_0$ при $x \in \Gamma_0$). Следовательно,

$$\| p(0) \|^2 \leqslant 2h/a, \quad \| p(\tau) \|^2 \leqslant 2h/a \tag{14}$$

Из (6) и (14) получим

$$\| \gamma^{\cdot}(0) - v(\gamma(0)) \| = \| F_p(\gamma(0), p(0), \sqrt{\varepsilon}) - F_p(\gamma(0), 0, \sqrt{\varepsilon}) \| \leqslant$$
$$\leqslant b\sqrt{\varepsilon} \| p(0) \| \leqslant b\sqrt{2\varepsilon h/a} \tag{15}$$

Из (15) следует, что время выхода траектории $\gamma(t)$ из окрестности U инвариантного тора Γ_0

$$t_- = \inf \{ t \in [0, \tau] : \gamma(t) \notin U \} \geqslant C/\sqrt{\varepsilon h} \tag{16}$$

Аналогично время входа в U

$$t_+ = \sup \{ t \in [0, \tau] : \gamma(t) \notin U \} \leqslant \tau - C/\sqrt{\varepsilon h} \tag{17}$$

где $C > 0$ не зависит от ε и h.

Лемма 2. Существует $C > 0$ такое, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ функционал S_h имеет критическую точку $\gamma \in \Omega$, такую, что $\gamma([0, \tau]) \not\subset U$ и $S_h(\gamma) \leqslant C$.

Ограничимся наброском доказательства, поскольку близкое утверждение доказано в [6]. Определим на Ω структуру гильбертова многообразия [7]. Из квадратичности функции L по $x^{\cdot}$ при $\| x^{\cdot} \| \to \infty$ можно вывести [7], что S_h — функция класса $C^{1+\mathrm{Lip}}$ на Ω. Пусть $\Omega(U)$ — множество кривых из Ω, целиком содержащихся в U. Функционал S_h на Ω не удовлетворяет «условию C» Пале — Смейла [7], так что теория Морса непосредственно не применима. Из положительности L в области $M \setminus \Gamma_0$ и неравенства (11) можно вывести, что $S_h(\gamma) \to +\infty$ при $\gamma \in \Omega \setminus \Omega(U)$ и $\tau(\gamma) \to 0$ или $\tau(\gamma) \to +\infty$. Отсюда следует [6], что для любого $c > 0$ функционал S_h удовлетворяет аналогу «условия C» на полном подмножестве $\Omega^c \setminus \Omega(U)$, где $\Omega^c = \{ \gamma \in \Omega: S_h(\gamma) \leqslant c \}$. Отсюда и из невырожденности минимума функции L на Γ_0 можно вывести, что если функционал (13) не имеет критических точек на множестве $\Omega^c \setminus \Omega(U)$, то существует однопараметрическая полугруппа уменьшающих действие непрерывных преобразований множества Ω^c, стягивающая Ω^c на $\Omega(U)$ (доказательство основано на методе градиентного спуска, см. [6]).

Таким образом, для доказательства леммы достаточно построить непрерывное отображение ψ: $S^k \to \Omega$ сферы размерности k в Ω, нестягиваемое на Ω (U) и такое, что

$$\max_{\psi(S^k)} S_h \leqslant C$$

где $C > 0$ не зависит от ε и h.

Пусть $\pi : M \to N$ — проекция на компактное фактормногообразие $N = M/\mathrm{T}^n$. Тогда для некоторого $k \geqslant 0$ существует гладкое отображение $S^{k+1} \to N$, переводящее полюс сферы S^{k+1} в точку $\pi(\Gamma_0)$ и нестягиваемое на $\pi(U)$ [8]. Для каждой точки экватора сферы $S^k \subset S^{k+1}$ проходящий через нее меридиан определяет замкнутую кривую в N. Поднимем эту кривую до горизонтальной кривой в M с концами на Γ_0 (кривая в M горизонтальна [8], если ее вектор скорости в каждой точке ортогонален в метрике $\| \ \|$ слою расслоения $\pi : M \to N$). Получим отображение $\psi_0 : S^k \to \Omega$, нестягиваемое на $\Omega(U)$. Можно считать, что $\psi_0(S^k)$ не содержит одноточечных кривых и перепараметризовать каждую кривую $\gamma_0 \in \psi_0(S^k)$ таким образом, что $\| \gamma_0^{\cdot}(t) \|^2 \equiv \varepsilon$. В силу компактности S^k длины кривых из $\psi_0(S^k)$ ограничены:

$$\int_0^{\tau(\gamma_0)} \| \gamma_0^{\cdot}(t) \| \, dt = \tau \sqrt{\varepsilon} \leqslant A \tag{18}$$

Поставим в соответствие кривой $\gamma_0 \in \psi_0(S^k)$ кривую $t \mapsto \gamma(t) = f(\omega t, \gamma_0(t))$ из Ω. Полученное отображение ψ: $S^k \to \Omega$ не стягиваемо на $\Omega(U)$. Для $\gamma \in \psi(S^k)$ имеем в силу (12) и (18)

$$S_h(\gamma) = \int_0^{\tau} \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \| \gamma^{\cdot} - v(\gamma) \|^2 + \sqrt{\varepsilon}(h - V(\gamma)) + \varepsilon R\left(\gamma, \ \frac{\gamma^{\cdot} - v(\gamma)}{\sqrt{\varepsilon}}, \ \sqrt{\varepsilon}\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^{\tau} \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \| \gamma_0^{\cdot} \|^2 + \sqrt{\varepsilon}(h - V(\gamma_0)) + \varepsilon \overline{R}\left(\gamma, \ f_x(\omega t, \ \gamma_0) \frac{\gamma_0^{\cdot}}{\sqrt{\varepsilon}}, \ \sqrt{\varepsilon}\right)\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant B \sqrt{\varepsilon} \tau \leqslant AB = C \quad (\gamma = \gamma(t), \ \gamma_0 = \gamma_0(t))$$

Лемма доказана.

Пусть $h \to +0$, а $\gamma_h \in \Omega$ — семейство траекторий, построенное в лемме 2. Так как $\gamma_h \not\subset U$, в силу (16) и (17) можно считать, что γ_h: $[a, b] \to M$; $a < 0 < b$, $\gamma_h(0) \notin U$ и $a(h) \to -\infty$, $b(h) \to +\infty$ при $h \to +0$. Так как на траектории γ_h выполняется равенство $F \equiv h\sqrt{\varepsilon}$ и функция L выпукла по скорости, то норма $\| \gamma_h^{\cdot}(0) \|$ равномерно ограничена и, следовательно, найдется последовательность $h_i \to +0$, такая, что существуют $\lim \gamma_{h_i}(0) = x^0 \notin U$ и $\lim \gamma_{h_i}^{\cdot}(0) = v^0$ при $i \to \infty$. Пусть $t \to x(t)$ — решение уравнений Лагранжа с начальным условием $x(0) = x^0$, $x^{\cdot}(0) = v^0$. Тогда траектория $x(t)$ неограниченно продолжается и существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x, x^{\cdot}, \sqrt{\varepsilon}) \, dt = \lim_{i \to \infty} \int_{a(h_i)}^{b(h_i)} L(\gamma_{h_i}, \gamma_{h_i}^{\cdot}, \sqrt{\varepsilon}) \, dt \leqslant C \tag{19}$$

Поскольку $L \geqslant 0$ и $L = 0$ только при $x \in \Gamma_0$ и $x^{\cdot} = v(x)$, траектория $t \to x(t)$ — двоякоасимптотическая к Γ_0 при $t \to \pm\infty$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается показать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствующая $x(t)$ траектория $t \to (x(t), p(t))$ в фазовом пространстве содержится в области $\{\| p \| < A\}$, где $A > 0$ не зависит от ε. Из вида функции Лагранжа (12) следует, что $\| x^{\cdot}(t) - v(x(t)) \|^2 \leqslant B\varepsilon$ при $L(x(t), x^{\cdot}(t), \sqrt{\varepsilon}) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$\| p(t) \|^2 = \| x^{\cdot}(t) - v(x(t)) \|^2 / \varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon}) \leqslant B + O(\sqrt{\varepsilon}) \tag{20}$$

В силу (19) время, в течение которого неравенство $L(x(t), x^{\cdot}(t), \sqrt{\varepsilon}) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ не выполнено, не больше $C / \sqrt{\varepsilon}$. Из (7) следует, что

$$\| p(t) \|^{\cdot} = \{{}^1/_2 \| p \|^2, \ F\} / \| p \| = (\sqrt{\varepsilon} \langle Ap, \ V_x \rangle + \{\| p \|^2, \ O(\varepsilon)\}) / \| p \| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\varepsilon} \| V_x \| + O(\varepsilon)$$

Отсюда, используя (20) получим при $-\infty < t < \infty$

$$\| p(t) \| \leqslant \sqrt{B} + C \max \| V_x \| + O(\sqrt{\varepsilon}) \leqslant A$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. // Избр. тр. Т 1 М.: Наука, 1971. 771 с.
2. *Трещев Д. В.* Механизм разрушения резонансных торов гамильтоновых систем // Мат. сб. 1989. № 9. С. 24—42.
3. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3—67.
4. *Арнольд В. И.* О неустойчивости гамильтоновых систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 1. С. 9—12.
5. *Graff S. M.* On the conservation of huperbolic tori for Hamiltonian systems // J. Different. Equat. 1974. V. 15, No 1. P. 1—69.
6. *Болотин С. В.* Существование гомоклинических движений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 6. С. 98—103.
7. *Palais R. S.*, *Smale S.* A generalized Morse theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1964, V. 70, No 1. P. 165—172.
8. *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.*, *Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука. 1979. 759 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VI.1989

УДК 531.36 + 62—50

В. Б. Колмановский, А. К. Спивак

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМОЙ ХИЩНИК — ЖЕРТВА

Изучается задача оптимального управления системой хищник — жертва. Устанавливается существование допустимого и изучается структура оптимального управления.

Вопросам оптимального управления биологическими сообществами посвящены немногие работы, библиография которых содержится в [1, 2].

1. Постановка задачи. Динамика взаимодействия хищников и жертв описывается уравнениями [3]

$$x_1^{\cdot}(\tau) = (a_1 - a_2 y_1)\, x_1,\ y_1^{\cdot}(\tau) = (a_3 x_1 - a_4)\, y_1 \tag{1.1}$$

где $x_1(\tau)$ — плотность популяции жертв, $y_1(\tau)$ — хищников в момент времени τ, a_i — положительные числа, характеризующие межвидовые взаимодействия.

На практике для целенаправленного воздействия на систему используются различные химические препараты, например пестициды, которые влияют либо только на жерт, либо только на хищников, либо же на обе популяции одновременно.

Изучим вначале ситуацию, когда управление действует только на жертвы. В отношении остальных| двух случаев ограничимся лишь формулировкой конечного результата.

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x_1(\tau) = a_4 a_3^{-1} x(t),\ y_1(\tau) = a_1 a_2^{-1} y(t),\ b = a_4 a_1^{-1},\ \tau = a_1 t$$

В безразмерных переменных при учете (1.1) уравнения управляемой системы имеют вид

$$x^{\cdot}(t) = (1 - y)\, x - ux,\ y^{\cdot}(t) = b\,(x - 1)\, y \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

Управление $u(t)$ удовлетворяет естественным ограничениям

$$0 \leqslant u \leqslant \gamma,\ \gamma = \text{const} > 0 \tag{1.4}$$

При $u = 0$ система (1.2) имеет на плоскости x, y два положения равновесия — точки (0, 0) и (1, 1) = R. Поскольку реальный интерес представляет лишь точка R, то целью управляющей стороны является перевод системы (1.2) из произвольного начального положения (x_0, y_0) в положение R за минимально возможное время. Таким образом, если $T(x_0, y_0, u)$ — момент первого попадания системы (1.2) в точку R, то