

УДК 539.374

© 1990 г.

А. Г. Быковцев

О ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ

Для различных моделей упругопластического тела исследовалась [1—4] задача о преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство (УПП) в области активного нагружения. Была решена [5] задача о преломлении упругой волны чистого сдвига, имеющей профиль ступени конечной длины, в УПП как в области активного пластического нагружения, так и в зоне разгрузки в предположении, что за фронтом ударной волны разгрузки (УВР) материал находится в упругом состоянии. Ниже для этой задачи показано, что за фронтом УВР может осуществляться процесс пластического нагружения, и построено решение в зоне вторичных пластических течений.

1. При распространении волн чистого сдвига среда находится в условиях антиплоской деформации. Вектор скорости перемещений w направлен вдоль оси x_3 и зависит от переменных x_1, x_2 и времени t , отличны от нуля напряжения $\tau_1 = \sigma_{13}(x_1, x_2, t)$, $\tau_2 = \sigma_{23}(x_1, x_2, t)$. В дальнейшем ограничимся исследованием автомодельных решений уравнений динамики идеального упругопластического тела, зависящих от двух переменных $x = x_1 - ct$ и $y = x_2$. В этом случае уравнения характеристик и соотношения вдоль характеристик системы уравнений движения имеют вид [3]:
в упругой области и зоне разгрузки

$$x + \kappa y = \text{const}, \quad \kappa w - \tau_2 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$x - \kappa y = \text{const}, \quad \kappa w + \tau_2 = \text{const} \quad (1.2)$$

$$y = \text{const}, \quad \tau_1 + w = f(y), \quad \kappa = \sqrt{M^2 - 1}, \quad M = c/a, \quad a = \sqrt{\mu/\rho} \quad (1.3)$$

в области активного пластического нагружения

$$dy (M + \cos \theta) = -\sin \theta dx, \quad \theta + Mw = \text{const} \quad (1.4)$$

$$dy (M - \cos \theta) = \sin \theta dx, \quad \theta - Mw = \text{const}, \quad \tau_1 = \sin \theta, \quad \tau_2 = \cos \theta \quad (1.5)$$

Здесь ρ — плотность, μ — модуль сдвига.

Уравнения (1.1)—(1.5) записаны в безразмерных переменных, которые будут использоваться и в дальнейшем (для упрощения записи черточки над безразмерными переменными опущены, k — предел текучести)

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l}, \quad \bar{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{k}, \quad \bar{\tau}_2 = \frac{\tau_2}{k}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w^*}, \quad w^* = \frac{ck}{\mu}$$

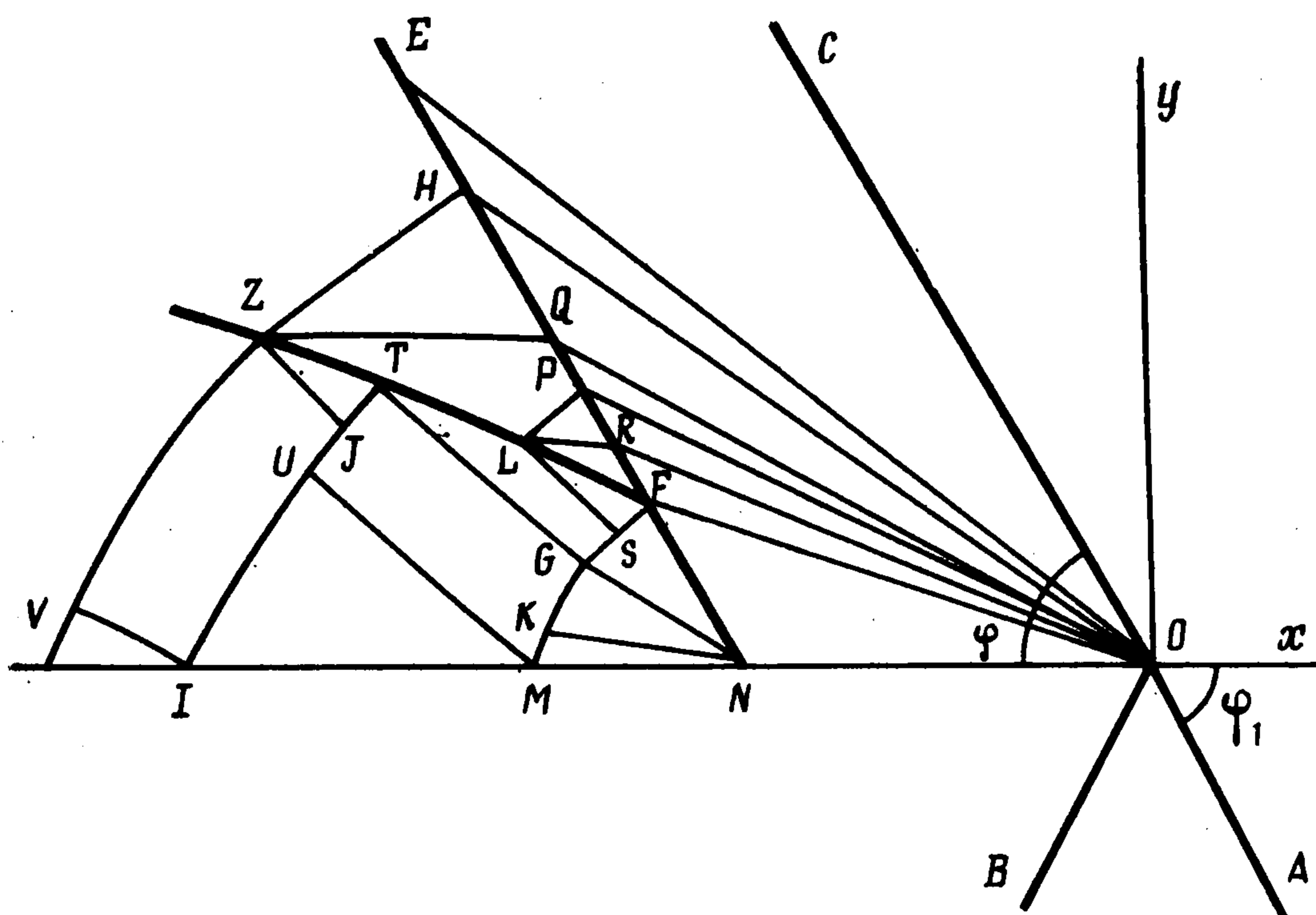
2. Пусть из упругого полупространства $y < 0$, которое характеризуется параметрами $\mu_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$, на границу раздела $y = 0$ с УПП $y > 0$, механические свойства которого определяются параметрами $\mu_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}, k$, падает плоская волна чистого сдвига OA , имеющая профиль ступени конечной длины (фиг. 1). В результате взаимодействия падающей волны OA с границей раздела образуется преломленная волна OC и отраженная волна OB . Перед фронтом волны OC материал УПП нахо-

дится в покое, начальные напряжения в нем отсутствуют. Предполагается, что на границе раздела напряжение τ_2 и скорость перемещений w непрерывны, откуда имеем [5]

$$2w_1(-x \sin \varphi_1) = w(x) - \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_2(x), \quad \mu = \mu_2/\mu_1 \quad (2.1)$$

Здесь $w(x)$, $\tau_2(x)$ — скорость перемещений и напряжение на границе раздела в УПП, $w_1(-x \sin \varphi_1)$ — функция, задающая профиль и интенсивность падающей волны ($w_1(-x \sin \varphi_1) = W_0 = \text{const}$ при $x_N \leq x \sin \varphi_1 \leq 0$ и $w_1(-x \sin \varphi_1) = 0$ при $x \sin \varphi_1 < x_N$), φ_1 — угол падения.

Волновая картина в УПП представлена на фиг. 1. В области EOC материал находится в упругом состоянии, в области EON происходит пластическое деформирование материала УПП NE — УВР. Было показано [5],



Фиг. 1

что для рассматриваемой задачи за фронтом УВР условие пластичности может быть впервые выполнено на границе раздела. Поэтому предположим, что в некоторой окрестности точки N за фронтом УВР материал УПП находится в пластическом состоянии. На линии сильного разрыва NE имеют место соотношения [5]

$$\tau_1^- = \tau_1^+ + [w], \quad \tau_2^- = \tau_2^+ + \kappa [w], \quad \kappa = \sqrt{M^2 - 1}, \quad (2.2)$$

$$M = c/a_2$$

Здесь $[w] = \tau^+ - \tau^-$, τ^+ , τ^- — предельные значения τ на фронте УВР соответственно в областях пластического нагружения и разгрузки.

Напряжения τ_1^- и τ_2^- удовлетворяют условию текучести

$$\tau_1^{-2} + \tau_2^{-2} = 1 \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2), (2.3) определяем скачок w на УВР

$$[w] = -2(\tau_1^+ + \kappa \tau_2^+) M^{-2} \quad (2.4)$$

Для напряжений из соотношений (1.5), (2.2) и (2.4) получаем

$$\tau_1^- = \sin(\theta^+ - 2\varphi), \quad \tau_2^- = \cos(\theta^+ - 2\varphi) \quad (2.5)$$

Условие пластичности (2.3) будет выполнено, если положить

$$\tau_1^- = \sin \theta^-, \quad \tau_2^- = \cos \theta^- \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.5), (2.6) определяем скачок θ на УВР

$$[\theta] = \theta^+ - \theta^- = 2\theta^+ - \pi - 2\varphi \quad (2.7)$$

В области пластического нагружения имеют место соотношения (1.4) и (1.5). Но $\theta^+ \in [\pi, \pi + \varphi]$ [5] (φ — угол преломления), поэтому из соотношений (2.7) получаем, что $\theta^- \in [\varphi, 2\varphi]$. Следовательно, характеристики (1.5) пересекают линию NF и на них выполняются соотношения

$$dy (M - \cos \theta) = \sin \theta dx, \quad \theta - Mw = \theta^- - Mw^- \quad (2.8)$$

В правой части второго равенства (2.8) стоит величина, постоянная для всех характеристик этого семейства, пересекающих отрезок NF (так как величины θ^+ , w^+ постоянны на NF [5]). Поэтому из соотношений (1.4) и (2.8) получаем, что вдоль характеристик другого семейства w и θ не изменяются, откуда следует, что характеристики (1.4) прямолинейные:

$$y (M + \cos \theta) + \sin \theta (x - x_N) = 0, \quad \theta + Mw = \text{const} \quad (2.9)$$

Характеристики (2.9) наклонены к оси x под углом ψ_0 , который определяет положение характеристики NG (фиг. 1) ($\text{tg } \psi_0 = -\sin \theta_M^- / (M + \cos \theta_N^-) < \text{tg } \varphi$). В области GNF напряжения и скорость перемещений постоянны

$$\tau_1 = \sin \theta_N^-, \quad \tau_2 = \cos \theta_N^-, \quad w = M^{-1} (1 + \pi + \varphi - \theta_N^+ + 2 \cos (\theta^+ - \varphi)), \quad \theta_N^- = 2\varphi + \pi - \theta_N^+ \quad (2.10)$$

и соотношения (2.8) принимают вид

$$dy (M - \cos \theta) = \sin \theta dx, \quad \theta - Mw = \varphi - 1 - 2 \cos (\theta_N^+ - \varphi) \quad (2.11)$$

Из краевого условия на границе раздела (2.1) и интеграла (2.11) после исключения w получаем

$$(\theta + 1 - \varphi)\Delta - \cos \theta = -2 \cos (\theta_N^+ - \varphi), \quad \Delta = \sin \varphi \cos \varphi_1 / (\mu \sin \varphi_1) \quad (2.12)$$

Корень уравнения (2.12) $\theta = \theta_1$ определяет положение характеристики NK и решение в области MNK , где напряжения и скорость перемещений постоянны (фиг. 1). Для произвольной точки (x, y) области GNK решение определяется величиной θ — корнем первого уравнения (2.9), задающего положение характеристики семейства (2.9), проходящей через точку (x, y) .

Построенное решение имеет место в случае, когда угол наклона к оси x характеристики KN меньше угла наклона характеристики GN и в каждой точке области FNM диссипация энергии положительна.

Исследуем изменение θ в области FNM . Рассмотрим функцию $f(\theta) = (\theta + 1 - \varphi)\Delta - \cos \theta$. В области FNM $df(\theta)/d\theta = \Delta + \sin \theta > 0$, так как в области FNG величина $\theta \in [\varphi, 2\varphi]$, а в дальнейшем θ не может превышать π и быть меньше 0 (при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ характеристика NK становится параллельной оси x и на границе раздела образуется зона проскальзывания [3, 4]).

Вычислим значение $f(\theta)$ в точках θ_N^- и θ_1 и рассмотрим случай, когда $f(\theta_N^-) > f(\theta_1)$, т. е. когда выполняется неравенство

$$2 \cos (\theta_N^+ - \varphi)(\Delta + \cos \varphi) + \Delta (1 + \pi + \varphi - \theta_N^+) - \cos \theta_N^+ > 0 \quad (2.13)$$

Тогда, так как $df(\theta)/d\theta > 0$, то $\theta_N^- > \theta_1$, т. е. при движении вдоль характеристики (2.11) от точки G к точке K величина θ уменьшается.

Характеристики (2.9) наклонены к оси x под углом ψ и

$$\operatorname{tg} \psi = -\sin \theta / (M + \cos \theta) \quad (2.14)$$

Дифференцируя соотношение (2.14) по направлению, задаваемому вектором $s = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{tg} \psi = -(1 + M \cos \theta) (M + \cos \theta)^{-2} \left(\cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

Из соотношения (2.15) следует, что угол наклона к оси x характеристик семейства (2.9), исходящих из точки N , уменьшается, если

$$\cos \theta + \sin \varphi > 0 \quad (2.16)$$

Выше было показано, что при выполнении условия (2.13) $0 \leq \theta \leq 2\varphi$, и в этом случае неравенство (2.16) выполняется.

Рассмотрим ограничения, которые накладываются неравенством (2.13) на интенсивность падающей волны W_0 . Положим $\theta_N^+ = \pi + \varphi^*$ ($0 \leq \varphi^* \leq \varphi$). Величина θ_N^+ удовлетворяет краевому условию на границе раздела перед фронтом УВР NE , которое имеет вид [5]

$$2W_0 = \sin \varphi (1 + \varphi - \varphi^*) + \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi^* \quad (2.17)$$

Из соотношений (2.13) и (2.17) получаем критерий образования зоны вторичных пластических течений за фронтом УВР

$$W_0 > \sin \varphi \cos (\varphi - \varphi^*) (1 + \cos \varphi \Delta^{-1}) \quad (2.18)$$

Условия перехода материала УПП в пластическое состояние и образования на границе раздела зоны проскальзывания перед фронтом УВР NE соответственно имеют вид [5]

$$2 |W_0| \geq \sin \varphi (1 + \Delta^{-1} \cos \varphi), \quad 2 |W_0| \geq \sin \varphi (1 + \varphi + \Delta^{-1}) \quad (2.19)$$

Сравнение первого неравенства (2.19) и условия (2.18) позволяет сделать вывод, что если $\varphi - \varphi^* \geq \pi/3$, то пластическое деформирование перед фронтом УВР NE (фиг. 1) всегда влечет за собой образование зоны вторичных пластических течений за фронтом УВР. Если перед фронтом волны NE образуется зона проскальзывания, то $\varphi^* = 0$. Пусть $\varphi = \varphi_0$ — корень уравнения $2 \cos \varphi - 1 - \varphi + \Delta^{-1} \cos 2\varphi = 0$ (причем $\varphi_0 < \pi/4$), тогда из сравнения второго неравенства (2.19) и критерия (2.18) следует, что при $\varphi > \varphi_0$ образование зоны проскальзывания перед фронтом УВР всегда влечет за собой образование зоны вторичных пластических течений за фронтом волны NE .

Рассмотрим диссипацию энергии D в области FNM . Условие положительности D в пластической области для рассматриваемого случая имеет вид [3]

$$D = \frac{1}{2} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \geq 0 \quad (2.20)$$

В областях GNF и KNM напряжения и скорость перемещений постоянны, это бездиссипативные зоны и в них $D = 0$. В области GNM имеет место интеграл (2.11), из которого получаем

$$\partial \theta / \partial x = M \partial w / \partial x, \quad \partial \theta / \partial y = M \partial w / \partial y \quad (2.21)$$

В области GNK разворачивается веер характеристик (2.9), дифференцируя уравнения которых, определяем производные $\partial \theta / \partial x$, $\partial \beta / \partial y$. Используя выражения для этих производных, из соотношений (2.21), (2.20) получаем, что условие положительности диссипации энергии в области FNM будет выполнено, если

$$(1 + M \cos \theta)(y \sin \theta - (x - x_N) \cos \theta) \geq 0$$

В области GNK имеем $\theta \in [0, 2\varphi]$, поэтому полученное неравенство выполняется. Таким образом, $D \geq 0$ во всей области FNM .

Область FNM , в которой имеет место построенное решение, ограничивается слева характеристикой FM семейства (2.11). Определим уравнение линии GK — криволинейной части характеристики FM (фиг. 1) (FG и KM — отрезки прямых, так как в областях GNF и KMN величина θ принимает постоянные значения). Для этого введем переменную $z = y/(x - x_N)$ и, учитывая, что линию GK пересекают прямолинейные характеристики (2.9) (уравнения которых $z = -\sin \theta / (M + \cos \theta)$), из соотношений (2.11) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения x . Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив начальному условию в точке G , получаем уравнение линии GK в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= C_1 (M + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^\alpha (1 + \cos \theta)^\beta + x_N, \quad \alpha = (\sin \varphi - 1)/4 \\ y &= -C_1 \sin \theta (1 - \cos \theta)^\alpha (1 + \cos \theta)^\beta, \quad \beta = -(\sin \varphi + 1)/4 \quad (2.22) \\ C_1 &= -x_N (\sin \theta_N^- - 2 \sin \varphi \cos (\theta_N^- - \varphi))(1 + \cos \theta_N^-)^\beta (1 - \cos \theta_N^-)^{-\alpha} (2M \cos \theta_N^-)^{-1} \end{aligned}$$

3. Рассмотрим диссипацию энергии вдоль линии FE за фронтом УВР NE . В этом случае условие положительности D имеет вид

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^-}{\partial x} \sin \theta^- + \frac{\partial w^-}{\partial y} \cos \theta^- \right) \geq 0 \quad (3.1)$$

Уравнение линии NE в параметрической форме таково:

$$\begin{aligned} x &= x_N (1 - \sin \varphi \cos \theta^+) / \Omega(\theta^+), \quad y = x_N \sin \varphi \sin \theta^+ / \Omega(\theta^+), \\ \Omega(\theta^+) &= 1 + \sin(\theta^+ - \varphi) \quad (3.2) \end{aligned}$$

Дифференцируя функции $w^- = w^-(x(\theta^+), y(\theta^+))$, $\theta^- = \theta^-(x(\theta^+), y(\theta^+))$ по θ^+ и записывая получившиеся уравнения совместно с ранее полученной [3] системой уравнений движения, будем иметь

$$\frac{\partial w^-}{\partial x} \frac{dx}{d\theta^+} + \frac{\partial w^-}{\partial y} \frac{dy}{d\theta^+} = \frac{\partial w^-}{\partial \theta^+}, \quad \frac{\partial \theta^-}{\partial x} \frac{dx}{d\theta^+} + \frac{\partial \theta^-}{\partial y} \frac{dy}{d\theta^+} = \frac{d\theta^-}{d\theta^+} \quad (3.3)$$

$$\cos \theta^- \frac{\partial \theta^-}{\partial y} - \sin \theta^- \frac{\partial \theta^-}{\partial x} + M^2 \frac{\partial w^-}{\partial x} = 0, \quad \cos \theta^- \frac{\partial w^-}{\partial x} - \sin \theta^- \frac{\partial w^-}{\partial y} + \frac{\partial \theta^-}{\partial x} = 0$$

Воспользовавшись соотношениями (3.2), (2.4), (2.7), можно определить следующие производные:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta^+} &= \frac{x_N (\sin \varphi - \cos \theta^+)}{\Omega^2(\theta^+)}, \quad \frac{dy}{d\theta^+} = \frac{-x_N \sin \varphi (\sin \varphi - \cos \theta^+)}{\Omega^2(\theta^+)} \\ \frac{dw^-}{d\theta^+} &= -M (1 + 2 \sin(\theta^+ - \varphi)), \quad \frac{d\theta^-}{d\theta^+} = -1 \end{aligned}$$

Поэтому систему (3.3) следует рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\partial w^- / \partial x$, $\partial w^- / \partial y$, $\partial \theta^- / \partial x$, $\partial \theta^- / \partial y$, разрешая которую и делая подстановку найденных величин $\partial w^- / \partial x$, $\partial w^- / \partial y$ в неравенство (3.1), после преобразований получим, что условие положительности диссипации энергии будет выполнено, если

$$\cos(\theta^+ - \varphi) \sin \varphi - (1 + 3 \sin(\theta^+ - \varphi)) \cos \varphi \geq 0 \quad (3.4)$$

Но $\theta^+ \in [\pi, \pi + \varphi]$ [5], поэтому неравенство (3.4) не выполняется. Следовательно, в некоторой окрестности линии FE (фиг. 1) за фронтом УВР NE материал находится в упругом состоянии.

Следуя [6], определим интервал изменения скорости волны вторичного пластического нагружения (ВВПН), за фронтом которой происхо-

дит вторичное пластическое деформирование материала. Уравнения динамики идеальной упругопластической среды для антиплоской деформации приведены в [3], откуда, учитывая, что ВВПН является волной слабого разрыва, получаем

$$\left[\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} \right] + \left[\frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \right] - \rho_2 \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial \tau_i}{\partial t} \right] = \mu_2 \left[\frac{\partial w}{\partial x_i} \right] - 2\mu_2 \tau_i [\Lambda] \quad (i = 1, 2) \quad (3.5)$$

Здесь Λ — неопределенный положительный множитель, входящий в ассоциированный закон течений.

Используя геометрические и кинематические условия совместности, уравнения (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tau_1}{\partial n} \right] v_1 + \left[\frac{\partial \tau_2}{\partial n} \right] v_2 + \rho_2 c_1 \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] &= 0, \quad c_1 \left[\frac{\partial \tau_i}{\partial n} \right] = \\ &= \mu_2 \left(2[\Lambda] \tau_i - v_i \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь v_i — проекции вектора нормали к ВВПН на координатные оси, c_1 — скорость ВВПН.

Исключая в системе уравнений (3.6) величины $[\partial \tau_1 / \partial n]$, $[\partial \tau_2 / \partial n]$, получаем

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] (\rho_2 c_1^2 - \mu_2) + 2\mu_2 [\Lambda] (\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2) = 0 \quad (3.7)$$

За фронтом ВВПН выполняется условие текучести, дифференцирование которого дает

$$\tau_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial n} + \tau_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial n} = 0 \quad (3.8)$$

Перед фронтом ВВПН материал находится в упругом состоянии, поэтому

$$\tau_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial n} + \tau_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial n} \leq 0, \quad [\Lambda] = \Lambda^+ - \Lambda^- = -\Lambda^- < 0, \quad \Lambda^+ = 0 \quad (3.9)$$

Вследствие того, что на ВВПН напряжения непрерывны, из соотношений (3.8) и (3.9) следует

$$\tau_1 \left[\frac{\partial \tau_1}{\partial n} \right] + \tau_2 \left[\frac{\partial \tau_2}{\partial n} \right] = \frac{[\Lambda] \Omega_1}{|c_1|}$$

Здесь Ω_1 — некоторая неотрицательная величина.

Исключая в полученном уравнении при помощи двух последних уравнений (3.6) величины $[\partial \tau_1 / \partial n]$, $[\partial \tau_2 / \partial n]$, получаем

$$[\Lambda] (2\mu_2 k^2 - \Omega_1 c_1) - \mu_2 [\partial w / \partial n] (v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2) = 0 \quad (3.10)$$

Система двух линейных однородных уравнений относительно $[\Lambda]$, $[\partial w / \partial n]$ (3.7) и (3.10) имеет решение в том случае, когда ее определитель равен нулю, откуда следует, что

$$\rho_2 c_1^2 = \mu_2 - 2\mu_2 (\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2)^2 / (2\mu_2 k^2 - \Omega_1)$$

Так как $\Omega_1 > 0$, то $\rho_2 c_1^2 > \mu_2$ при $2\mu_2 k^2 < \Omega_1 < \infty$ и $0 < \rho_2 c_1^2 < \rho_2 (c_p)^2 = \mu_2 (1 - (\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2)^2 / k^2)$ при $0 < \Omega_1 < 2\mu_2 (1 - (\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2)^2 / k^2)$ (c_p — скорость пластических волн). Таким образом, ВВПН может распространяться либо медленнее пластических волн, либо быстрее упругих волн. Отметим, что ВВПН может распространяться только из точки F (фиг. 1).

Если предположить обратное, т. е. что ВВПН распространяется из произвольной точки отрезка GF , например из точки G , то на отрезке GF для уравнений теории упругости имеем задачу Коши, решение которой будет постоянно (так как на GF напря-

жения и скорость перемещений принимают постоянное значение), что противоречит условиям на ударной волне NE и решению в области пластического нагружения перед фронтом волны NE [5].

4. Рассмотрим алгоритм построения ВВПН, распространяющейся в рассматриваемом случае со скоростью, которая не превышает скорость распространения пластических волн. Зададим на ВВПН точку L (фиг. 1), т. е. положим $y_L = \delta$. Через точку L проведем характеристики семейств (1.2), (1.3) LP и LR . Тогда $y_R = y_L = \delta$, $x_R = x_N - \kappa\delta$. Решение в произвольной точке (x, y) перед фронтом УВР NE известно [5]

$$\tau_1^+ = \sin \theta^+, \quad \tau_2^+ = \cos \theta^+, \quad w^+ = M^{-1}(1 + \pi + \varphi - \theta^+), \quad y(M - \cos \theta^+) = x \sin \theta^+ \quad (4.1)$$

Вдоль линии LR имеет место соотношение (1.3), которое, используя формулы (4.1) и (2.2), запишем в виде

$$\tau_{1L} + w_L = \tau_{1R}^- + w_R^- = \tau_{1R}^+ + w_R^+ = \sin \theta_R^+ + \sin \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_R^+) = f_1(\theta_R^+) \quad (4.2)$$

Через точку L проходит характеристика LS семейства (1.4), которая пересекает область GNF (фиг. 1), где напряжения, скорость перемещений постоянны и определяются по формулам (2.10). Поэтому соотношение вдоль характеристики LS принимает вид

$$\theta_L + Mw_L = 1 + 3\varphi + (2(\pi - \theta_N^+ + \cos(\theta_N^+ - \varphi))) = C_1 \quad (4.3)$$

На ВВПН напряжения непрерывны, поэтому положим $\tau_1 = \sin \theta_L$, $\tau_2 = \cos \theta_L$. Тогда уравнения (4.2), (4.3) представляют собой систему уравнений для определения w_L и θ_L , решая которую, имеем

$$\theta_L = \theta^*, \quad w_L = \sin \varphi (C_1 - \theta^*)$$

Здесь θ^* — корень уравнения $\theta_L - M \sin \theta_L + C_1 - M f_1(\theta_R^+) = 0$.

Вдоль характеристики LP имеет место соотношение (1.2), из которого при помощи соотношений (4.1) и (2.2) получаем уравнение для определения θ_p^+

$$\cos \theta_p^+ + \cos \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_p^+) = \cos \theta_L^* + \cos \varphi (C_1 - \theta_L^*) \quad (4.4)$$

Пусть $\theta_p^+ = \theta_p^*$ — корень уравнения (4.4), тогда из условия пересечения линий NE и PO определяются координаты точки P

$$x_p = x_N (1 - \sin \varphi \sin \theta_p^*) / \Omega(\theta_p^+), \quad y_p = x_N \sin \varphi \sin \theta_p^* / \Omega(\theta_p^*)$$

Абсцисса точки L определяется из уравнения характеристики LP

$$x_L = \kappa(\delta - y_p) + x_p$$

Построение ВВПН по приведенному алгоритму проводится до тех пор, пока ВВПН не пересечет характеристику TG семейства (1.4). Заметим, что вследствие того, что на отрезке FG решение постоянно, константа в соотношении вдоль характеристик (1.4) будет одна и та же для всех характеристик этого семейства, пересекающих отрезок FG , и поэтому соотношение (4.3) следует рассматривать как интеграл уравнений движения в области TGF . Характеристики семейства (1.3) в области TGF прямолинейные, напряжения и скорость перемещений вдоль них будут оставаться постоянными.

Таким образом, после построения решения в области TGF на характеристике TG будут известны θ и w . Начальные условия на характеристике GM задаются соотношениями (2.22). Следовательно, для уравнений теории пластичности (1.3), (1.4) в области $TGMU$ получаем задачу Гурса,

после решения которой на характеристике UM будут заданы θ и w . На линии MI имеет место краевое условие (2.1) и для уравнений (1.3), (1.4) в области UMI получаем смешанную задачу.

Дальнейшее построение решения проводится следующим образом. На характеристике TI зададим точку J , достаточно близко к точке T и проведем через нее характеристику семейства (1.4) до пересечения с ВВПН в точке Z (фиг. 1). Вследствие близости точек T, J, Z отрезок ZJ будем считать прямолинейным. Далее через точку Z проводятся характеристики семейств (1.2), (1.3) ZH и ZQ . Аналогично изложенному выше, записывая совместно уравнения проведенных характеристик, соотношения вдоль этих характеристик и уравнения, определяющие положение точек H и Q , как точек пересечения УВР NE и соответствующих характеристик семейства (1.5), исходящих из точки O , получаем

$$y_H \kappa + x_H = x_N, \quad y_Z \kappa + x_Q = x_N, \quad (y_Z - y_J)(M + \cos \theta_J) + (x_Z - x_J) \sin \theta_J = 0 \quad (4.5)$$

$$y_Z (M - \cos \theta_Q^+) - x_Q \sin \theta_Q^+ = 0, \quad \kappa (y_Z - y_H) - x_Z + x_H = 0, \\ y_H (M - \cos \theta_H^+) - x_H \sin \theta_H^+ = 0$$

$$\kappa w_Z + \cos \theta_Z = \cos \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_H^+) + \cos \theta_H^+, \quad M w_Z + \theta_Z = M w_J + \theta_J$$

$$w_Z + \sin \theta_Z = \sin \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_Q^+) + \sin \theta_Q^+$$

Девять уравнений (4.5) образуют замкнутую систему для определения девяти неизвестных $y_H, x_H, y_Z, x_Z, x_Q, w_Z, \theta_H^+, \theta_Q^+, \theta_Z$, нахождение решения которой сводится к решению трех уравнений относительно $\theta_H^+, \theta_Q^+, \theta_Z$.

После определения координат и решения в точке Z дальнейшее построение решения проводится аналогично изложенному, т. е. в области $ZJIV$ решается задача Гурса и т. д.

Введем новые переменные

$$\xi = (\theta - Mw)/2, \quad \eta = (\theta + Mw)/2 \quad (4.6)$$

Предполагая, что якобиан преобразования Δ_1 отличен от нуля, решение системы уравнений (1.3), (1.4) можно искать в неявном виде $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$. Тогда из соотношений (4.6), (1.3), (1.4) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} (M - \cos(\xi + \eta)) = \sin(\xi + \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} (M + \cos(\xi + \eta)) = -\sin(\xi + \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.7)$$

Система уравнений (4.7) линейна, в фазовой плоскости (ξ, η) краевые задачи формулируются на отрезках прямых $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$. Это обуславливает большую привлекательность системы (4.7) для численного интегрирования по сравнению с системой (1.3), (1.4).

Рассмотрим условие положительности диссипации энергии в фазовой плоскости, где $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$. Дифференцируя эти выражения по x и y , получим систему четырех уравнений, разрешая которую относительно $\partial \xi / \partial x, \partial \xi / \partial y, \partial \eta / \partial x, \partial \eta / \partial y$, получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.8), (4.7), (2.20) следует, что условие положительности диссипации энергии в фазовой плоскости (ξ, η) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta_1} \left[\cos(\xi + \eta) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) - \sin(\xi + \eta) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right] \geq 0 \quad (4.9)$$

Начальная точка волны разгрузки определяется нарушением условия (4.9) на границе раздела. Применяя для определения начальной скорости волны разгрузки c_0 алгоритм, изложенный в [3], получим, что величина c_0 — корень уравнения

$$\left[\frac{\partial(\eta - \xi)}{\partial x} + c_0 \frac{\partial(\eta - \xi)}{\partial y} \right] (1 - c_0 \kappa^2 \mu \operatorname{tg} \varphi_1) + \left[\frac{\partial(\eta + \xi)}{\partial x} + c_0 \frac{\partial(\xi + \eta)}{\partial y} \right] M (1 - \mu \operatorname{tg} \varphi_1) \sin(\xi + \eta) = 0$$

Здесь $\partial x/\partial \xi$, $\partial x/\partial \eta$ аппроксимируются конечными разностями, а производные $\partial y/\partial \xi$ и $\partial y/\partial \eta$ определяются из уравнений (4.7). Для дальнейшего построения волны разгрузки в рассматриваемом случае удобно использовать метод характеристик [7].

5. Особо следует рассмотреть случай, когда перед фронтом УВР NE образуется зона проскальзывания, т. е. характеристика OF становится параллельной оси x [5]. Введем полярную систему координат

$$x = x_N + r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi \quad (5.1)$$

Система уравнений, описывающая движение среды в пластической области, в полярной системе координат (5.1) принимает вид

$$\cos \theta R(\theta) - \sin \theta R_1(\theta) + M^2 R(w) = 0, \quad \cos \theta R(w) - \sin \theta R_1(w) + R(\theta) = 0 \quad (5.2)$$

$$B(f) = r \cos \psi \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \psi \frac{\partial f}{\partial \psi}, \quad R_1(f) = r \sin \psi \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \psi \frac{\partial f}{\partial \psi}$$

Решение системы (5.2) будем искать в виде степенных рядов

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(\psi) r^k, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\psi) r^k \quad (5.3)$$

Подставляя разложения (5.3) в уравнения (5.2) и приравнявая к нулю члены при r^k , будем иметь для определения соответствующих коэффициентов θ_k и w_k систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений. При $k=0$ получаем

$$\sin(\psi + \theta_0) \frac{d\theta_0}{d\psi} + M^2 \sin \psi \frac{dw_0}{d\psi} = 0, \quad \sin \psi \frac{d\theta_0}{d\psi} + \sin(\psi + \theta_0) \frac{dw_0}{d\psi} = 0 \quad (5.4)$$

Системе (5.4) удовлетворяет, по-первых, тривиальное решение

$$\theta_0 = A_0 = \text{const}, \quad w_0 = A_1 = \text{const} \quad (5.5)$$

Во-вторых, когда определитель системы (5.4) равен нулю, имеем

$$\theta_0 = \arcsin(\pm M \sin \psi) - \psi, \quad w_0 = \mp (\theta_0 - A_2)/M, \quad A_2 = \text{const} \quad (5.6)$$

При $k=1$ для определения коэффициентов θ_1 , w_1 получаем

$$\cos(\theta_0 + \psi) \theta_1 \left(1 - \frac{d\theta_0}{d\psi} \right) + M^2 \left(w_1 \sin \psi - \sin \psi \frac{dw_1}{d\psi} \right) - \sin(\psi + \theta_0) \frac{d\theta_1}{d\psi} = 0 \quad (5.7)$$

$$\cos(\theta_0 + \psi) \left(w_1 - \theta_1 \frac{dw_0}{d\psi} \right) + \theta_1 \cos \psi - \sin(\psi + \theta_0) \frac{dw_1}{d\psi} - \sin \psi \frac{d\theta_1}{d\psi} = 0$$

В случае, когда $\theta_0 = \text{const}$, $w_0 = \text{const}$, общее решение системы уравнений (5.7) имеет вид

$$w_1 = A_3 f^+ + A_4 f^-, \quad \theta_1 = M [A_3 f^+ - A_4 f^-], \quad A_3 = \text{const} \\ A_4 = \text{const}, \quad f^\pm = M \sin \psi \pm \sin(\psi + \theta_0) \quad (5.8)$$

В случае, когда выполняются соотношения (5.6), интегралы системы (5.7) таковы:

$$Mw_1 \mp 3\theta_1 = 0, \quad \theta_1 \pm Mw_1 = A_i \sqrt{\sin \psi} \exp(\pm F(\psi)/M), \quad A_i = \text{const} \\ (i = 5, 6) \quad (5.9)$$

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{\cos(\theta_0 + \psi)}{\sin \psi} d\psi$$

Ограничимся в разложениях (5.3) двумя членами рядов.

В упругой области и в зоне разгрузки движение среды описывается системой уравнений [3], которая в полярной системе координат принимает вид

$$R(\tau_2) + R_1(w) = 0, \quad R_1(\tau_2) + \kappa R(w) = 0 \quad (5.10)$$

Решение системы (5.10) будем искать в виде степенных рядов

$$\tau_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_2^{(k)}(\psi) r^k, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w^{(k)}(\psi) r^k \quad (5.11)$$

Подставляя разложения (5.11) в уравнения (5.10) и приравнявая к нулю коэффициенты при r^k , для определения коэффициентов $\tau_2^{(k)}$, $w^{(k)}$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой запишем следующим образом:

$$w^{(k)} = \kappa^{-1} [T_k f_k^- + B_k f_k^+], \quad \tau_2^{(k)} = T_k f_k^- - B_k f_k^+ \quad (5.12) \\ f_k^\pm = (\cos \psi \pm \kappa \sin \psi)^k, \quad T_k = \text{const}, \quad B_k = \text{const}$$

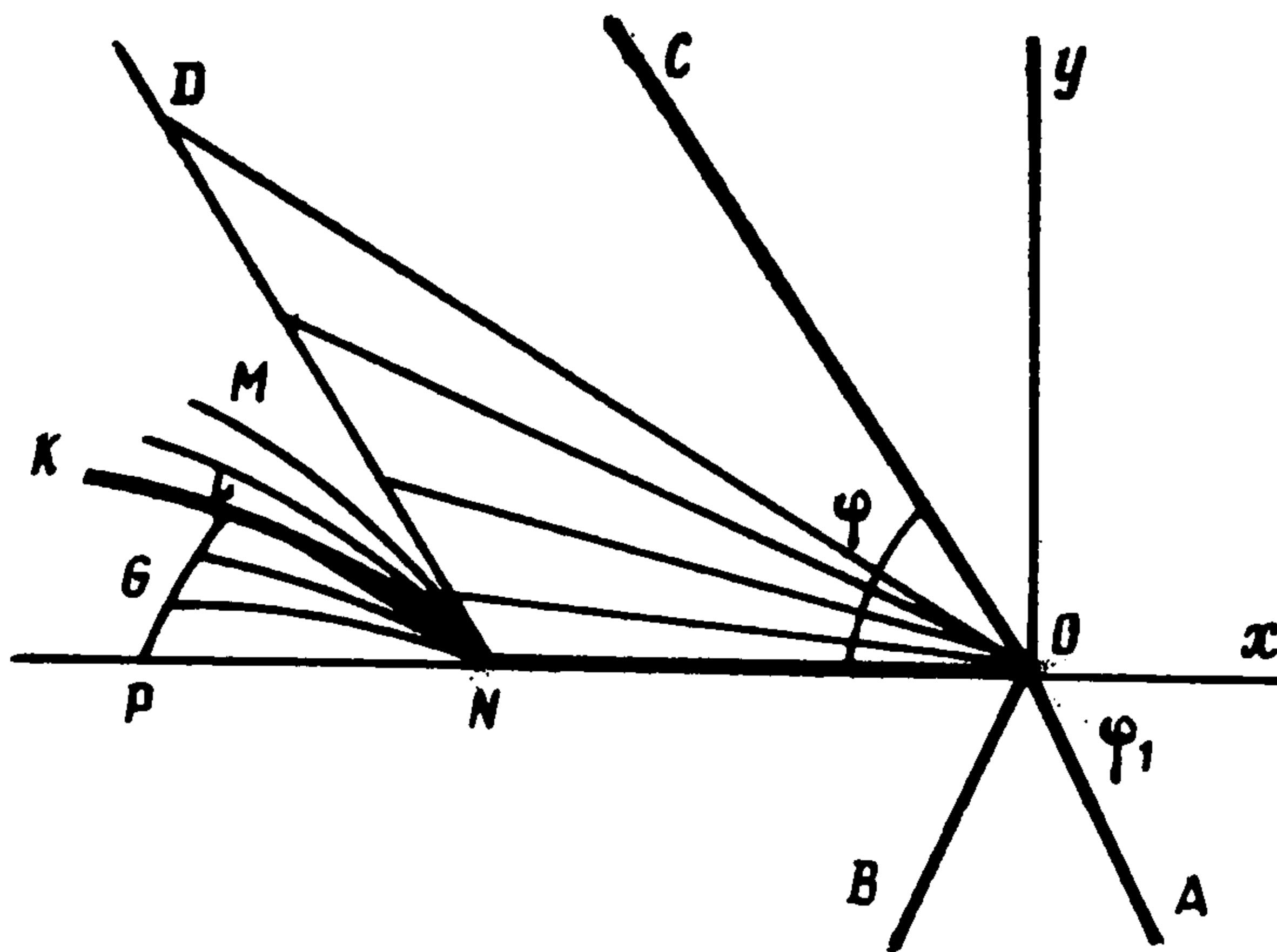
Используя разложение (5.11), из соотношений (1.3) имеем

$$\tau_1 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (L_k(\psi) - w^{(k)}(\psi)) \quad (5.13)$$

6. Постоянные, входящие в соотношения (5.5), (5.6), (5.9), (5.12), (5.13), определяются из условий сопряжения полученных интегралов в окрестности точки N (фиг. 2). Разлагая в ряды по степеням r в окрестности точки N (учитывая при этом по два члена в разложениях) решение перед фронтом УВР, скачок скорости w , будем иметь

$$\theta^+ = \theta_0^+ + \theta_1^+ r = \pi - r\Delta_3, \quad \tau_1^+ = \sin \theta_0^+ + \cos \theta_0^+ \theta_1^+ r = r\Delta_3 \quad (6.1) \\ w^+ = M^{-1} (1 + \pi + \varphi + \theta^+) = (1 + \varphi)/M + r\Delta_3/M, \quad [w] = E_0 + E_1 r \\ \tau_2^+ = \cos \theta_0^+ - \sin \theta_0^+ \theta_1^+ r = -1, \quad \Delta_3 = (1 + \sin \varphi)/x_N$$

На линии ND имеем $\psi = \pi - \varphi$. Сопрягая на линии ND в окрестности точки N упругое решение (5.11)–(5.13) (учитывая по два члена



Фиг. 2

в разложениях) и решение в пластической области перед фронтом УВР (6.1) с учетом соотношений на линии сильного разрыва (2.2), получаем

$$\begin{aligned} L_0 + L_1 \sin \psi r - \kappa^{-1} (T_0 + B_0) + 2\kappa^{-1} \cos \varphi T_1 r &= E_0 + E_1 r + \Delta_3 r \quad (6.2) \\ \kappa^{-1} (T_0 + B_0) + \kappa^{-1} 2 \cos \varphi T_1 r + (1 + \varphi)/M + \Delta_3 r/M &= E_0 + E_1 r \\ T_0 - B_0 - 2 \cos \varphi T_1 r &= \kappa (E_0 + E_1 r) - 1 \end{aligned}$$

При $r = 0$ в точке N должно выполняться условие текучести (2.3). Учитывая это и приравнявая к нулю в соотношениях (6.2) коэффициенты при одинаковых степенях r , для определения $L_0, L_1, T_0, T_1, B_0, E_0, E_1$, получаем систему линейных уравнений, откуда

$$\begin{aligned} L_0 &= (1 + \varphi)/M, \quad L_1 = (1 + \sin \varphi) \Delta_3 / \sin \varphi, \quad T_0 = ((1 + \varphi) \kappa M^{-1} - 1)/2 \\ B_0 &= -2\kappa^2/M^2 + 1/2 + \kappa (1 + \varphi)/(2M), \quad E_0 = 2\kappa/M^2, \quad E_1 = \sin \varphi \Delta_3 / 2, \\ T_1 &= -\Delta_3 / 4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

В окрестности точки N разворачивается веер криволинейных характеристик (1.4), тангенс угла наклона которых к оси x должен быть отрицательным. Из соотношений (1.4), (6.3) и (5.6) (с верхним знаком) получаем

$$\operatorname{tg} \psi^* = \sin \theta_0 (M - \cos \theta_0) = 2\kappa (M^3 - M^2 + 2) > 0$$

Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место интеграл (5.6) с нижним знаком; используя последний и соотношения (1.4), (6.3), получаем

$$\operatorname{tg} \psi^* = -\sin \theta_0 / (M + \cos \theta_0) = -2\kappa (M^3 + M^2 - 2) < 0 \quad (6.4)$$

Величина ψ^* , задаваемая равенством (6.4), определяет положение первой характеристики веера NM (фиг. 2). Из соотношений (6.2), (2.4), (2.7) определяется постоянная во втором соотношении (5.6) (с нижним знаком)

$$M \omega_0 - \theta_0 = 1 + \varphi - 2 \cos \varphi \quad (6.5)$$

Используя соотношение (6.5), краевое условие на границе раздела (2.1) можно представить в виде

$$1 - \varphi - 2 \cos \varphi + \theta_0 = M \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \theta_0 \quad (6.6)$$

Корень уравнения (6.6) $\theta_0 = \theta_0^*$ определяет угол наклона к оси x последней характеристики веера NG (фиг. 2)

$$\operatorname{tg} \psi_0^* = -\sin \theta_0^* / (M - \cos \theta_0^*) \quad (6.7)$$

Веер криволинейных характеристик, исходящих из точки N , будет отсекается ВВПН NK (фиг. 2). Пусть уравнение ВВПН имеем вид $\psi = \psi(r)$. Разлагая функцию $\psi(r)$ в ряд по степеням r и ограничиваясь двумя членами ряда, имеем

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 r \quad (6.8)$$

Сопрягая на фронте ВВПН (6.8) в окрестности точки N упругое решение (5.11)–(5.13) (ограничиваемся двумя членами в разложениях) и пластическое решение (5.6) и (5.9) (с нижними знаками), учитывая при этом, что на фронте ВВПН напряжения и скорость перемещений непрерывны, получим систему трех уравнений. Отсюда, приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях r , получим системы линейных уравнений для определения $B_1, A_2, A_5, \psi_0, \psi_1$, решая которые, найдем

$$B_1 = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi_0)} \left(F_1 - \frac{8 \sin \varphi (F_2 - 2F_1)}{\Delta_2} \right), \quad F_1 = \frac{T_1 \sin(\varphi - \psi_0)}{\sin \varphi \cos \varphi} \quad (6.9)$$

$$A_5 = \frac{4}{\Delta_2 \sqrt{\sin \psi_0}} [2F_2 (1 + \cos 2\varphi) + F_1 (2 \sin \varphi - 1)], \quad F_2 = L_1 \sin \psi_0$$

$$\psi_1 = F_3(\psi_0) \left[\frac{F_2 (3 + 2 \sin \varphi) + 2 (\cos 2\varphi - 3) F_1}{\Delta_2} \right],$$

$$F_3(\psi) = \left(1 + \frac{M \cos \psi}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \psi}} \right)^{-1}$$

$$\psi_0 = \operatorname{arctg} (-\sin 2\varphi / (M + \cos 2\varphi)), \quad A_2 = \varphi - 1 + 2 \cos \varphi - \psi_0,$$

$$\Delta_2 = -4 (2 \sin \varphi + \cos 2\varphi)$$

Аналогично, проводя сопряжение решения (5.5), (5.8) с решением (5.6), (5.9) в окрестности последней характеристики веера NG (фиг. 2), для которой имеет место разложение (причем величина ψ_0^* определяется из соотношения (6.7)) $\psi^* = \psi_0^* + \psi_1 r$, находим остальные постоянные

$$A_0 = \arcsin (-M \sin \psi_0^*) - \psi_0^*, \quad \psi_1^* =$$

$$= -A_5 \sqrt{\sin \psi_0^*} \exp (-F(\psi_0^*)/M) F_3(\psi_0^*)/4$$

$$A_4 = -\frac{A_5 \exp (-F(\psi_0^*)/M)}{(2M)^2 \sqrt{\sin \psi_0^*}}, \quad A_3 = \frac{A_4 (1 + \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \sin A_0)}{1 - \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \sin A_0},$$

$$A = (A_0 - A_2)/M$$

Таким образом, в окрестности точки N решение полностью определено. В дальнейшем, задаваясь на ВВПН точкой L , лежащей достаточно близко к точке N (фиг. 2), и проводя через нее характеристику семейства (2.8) LP , построение решения проводим по алгоритму, ранее изложенному для случая отсутствия зоны проскальзывания перед фронтом УВР.

Процесс пластического деформирования за фронтом отраженной УВР исследовался в [8—10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковшов А. Н. О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 82—88.
2. Ковшов А. Н. О преломлении волны сдвига в грунт // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 8. С. 36—41.
3. Быковцев А. Г. Преломление плоскополяризованных волн на границе упругого и упруго-пластического полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 307—315.
4. Быковцев А. Г. О преломлении волны сдвига в нелинейно-упругое и упругопластическое полупространство // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 490—497.
5. Быковцев А. Г. О преломлении ударных волн чистого сдвига в упругопластическое полупространство // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 309—318.
6. Мандель Ж. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. № 5. С. 119—141.
7. Разматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
8. Зволинский Н. В. Отражение и преломление плоской пластической волны при наличии граничной плоскости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 848—860.
9. Włodarczyk E. On the loading process behing the front of reflected and refracted shock waves in plastic layered media // Proc. Vibrat. Probl. 1971. V. 12. № 4. P. 433—441.
10. Włodarczyk E. On loading process behing the front of a shock wave reflected from a solid moving partition in non-elastic medium // J. Tech. Phys. 1977. V. 18. № 2. P. 163—170.