Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 550.3 : 534.1

С. З. Дунин, Г. А. Максимов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДАХ С МАЛОЙ ДИСПЕРСИЕЙ СКОРОСТЕЙ И СПЕКТРОМ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ ВИДА $1/\tau$. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассматривается распространение импульса в среде, дисперсионно-диссипативные свойства которой соответствуют наличию в среде релаксационных механизмов, времена релаксации которых образуют спектр вида $g(\tau) \sim 1/\tau$. В случае малой дисперсии скоростей получено точное решение для формы импульса и показано, что оно эквивалентно описанию распространения импульса в среде с «Ei-памятью».

Распространение акустических волн в реальных средах часто можно рассматривать в рамках линейного приближения наследственной теории упругости (НТУ) [1]. Феноменологические коэффициенты НТУ могут быть получены на основе теории внутренних параметров [2], характеризующихся временами релаксации к состоянию термодинамического равновесия.

Точные решения известны только для некоторых реологических моделей сред: стандартного тела [3], характеризующегося единственным временем релаксации, его предельных случаев-сред Фойгта [4, 5], Максвелла [6, 7]; в случае малой дисперсии скоростей — для модели среды с «E-памятью» [8, 9]. Некоторые решения могут быть получены на основе модифицированной НТУ [1] [10], в которой в качестве исходных выбираются модифицированные ядра (МЯ) НТУ, определенным образом связанные с с обычными ядрами НТУ. Так, среде с «E-памятью» соответствуют МЯ экспоненциального вида, а среде с «Ei-памятью» [10] — МЯ в виде разности двух интегральных экспонент; для последней из названных сред решение получено при некоторых частных значениях параметров.

При описании распространения волн в гео- и биосредах в рамках простейших реологических моделей не удается объяснить ряд экспериментальных фактов, например линейную в широкой области частот зависимость коэффициента затухания волн от частоты [11—15]. В рамках линейных теорий существует следующее объяснение этого факта: как гео-, так и биосреды отличаются сложностью своей микроструктуры и ее иерархией, поэтому релаксационные механизмы могут быть связаны с самыми разными структурными особенностями таких сред, и, как следствие, их релаксационные времена образуют спектр. Подбирая параметры этого спектра, можно добиться чтобы в достаточно широкой, но ограниченной области частот имела место линейная зависимость коэффициента затухания от частоты. В ряде работ показано [13, 14], что для удовлетворительного описания экспериментальных данных спектр времен релаксации должен иметь вид $g(\tau) \sim \tau^{-1}$.

1. Акустические волны малой амплитуды описываются уравнениями линейной теории упругости с уравнением состояния наследственного типа [11]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t [\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t') M(t-t') + \delta_{ij}\varepsilon_{ll}(\mathbf{r}, t') L(t-t')]\, dt'$$

Считая, что все многообразие дисперсионно-диссипативных свойств сред может быть описано в терминах механизмов экспоненциальной релаксации, общий вид ядер $M(t)$ и $L(t)$ можно записать в виде

$$M(t) \sim L(t) \sim \rho_0 \varkappa(t)$$

[1] См. также: *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity Preprint. Tallinn: Academy of Sciences of the Estonian SSR. 1983. 62 p.

$$\varkappa(t) = c_\infty^2 \left[\delta(t) - \frac{\Delta}{B} \int_a^b g(\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\tau \right]$$

$$B = \int_a^b g(\tau) \tau \, d\tau, \quad \Delta = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_\infty^2}$$

где Δ — дисперсия скоростей, c_∞ и c_0 — максимально и минимально возможные скорости распространения волн (продольных или поперечных) в среде.

Спектр времен релаксации $g(\tau)$ обладает следующими свойствами:

$$g(\tau) \geqslant 0, \quad \int_a^b g(\tau) d\tau = 1, \quad g(\tau = 0) = 0$$

Последнее свойство связано с тем, что вклад процессов с нулевым временем релаксации, соответствующих идеальной упругости, представлен отдельно в виде дельта-функции.

Рассмотрим распространение плоских волн. Было показано [16], как на основании решения этой задачи можно получить решения задач с более сложной геометрией.

Функция Грина плоской задачи подчиняется следующему волновому уравнению (по временной переменной сделано преобразование Лапласа $(t \to p)$)

$$[\partial^2/\partial x^2 - K^2(p)] \, I(x, p) = \delta(x), \quad K^2(p) = p^2/\varkappa(p)$$

решение которого может быть представлено в виде интеграла Меллина

$$I(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \exp\{pt - xK(p)\} \, dp, \quad \gamma = (-i\infty, +i\infty) \tag{1.1}$$

Свойства этого интеграла определяются видом зависимости

$$\varkappa(p) = c_\infty^2 \left[1 - \frac{\Delta}{B} \int_a^b \frac{g(\tau)}{p + 1/\tau} d\tau \right]$$

В случае спектра времен релаксации $g(\tau) = (\tau \ln(b/a))^{-1}$, $\tau \in [a, b]$ (учтено условие нормировки спектра) получим

$$K(p) = c_\infty^{-1} p \, [1 - \Delta (b - a)^{-1} P(p)]^{-1/2},$$
$$P(p) = p^{-1} \ln((bp + 1)/(ap + 1)) \tag{1.2}$$

Функция $P(p)$ аналитична в области $\operatorname{Re} p > -1/b$ и, следовательно, достигает своего наибольшего значения на границе области, а именно при $p = -1/b$. Поэтому при малой дисперсии скоростей $\Delta \ll 1$ существует область $\operatorname{Re} p > \delta > -1/b$, в которой модуль второго слагаемого в квадратных скобках в (1.2) будет меньше единицы. Для оценки величины δ можно получить выражение

$$\delta = -b^{-1} [1 - \exp\{-\Delta^{-1} (1 - a/b)\}]$$

из которого следует, что $\delta \in (-1/b, 0]$. В частности, в области $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ возможно разложение по малому параметру $\Delta \ll 1$. Учитывая первые два члена этого разложения, перейдем к вычислению интеграла (1.1):

$$I(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{bp + 1}{ap + 1} \right)^{-\Omega} \exp(pt') \, dp, \quad t' = t - \frac{x}{c_\infty}, \quad \Omega = \frac{\Delta x}{2(b - a) c_\infty} \tag{1.3}$$

Воспользовавшись теоремой Эфроса об обобщенной свертке [17], можно преобразовать этот интеграл к виду

$$I(t, x) = \int_0^\infty F(\Omega, \zeta)\, Q(t', \zeta)\, d\zeta, \quad F(\Omega, \zeta) = \frac{\zeta^{\Omega-1}}{\Gamma(\Omega)} \tag{1.4}$$

$$Q(t', \zeta) = \exp\left\{-\frac{t'}{a} - \zeta\frac{b}{a}\right\}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\Theta(t')\, I_0\left(2\sqrt{\frac{b-a}{a^2}t'\zeta}\right)\right\}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $\Theta(z)$ — единичная функция Хевисайда. Вычисляя интеграл (1.4) [18, 19], получим

$$I(t, x) = \left(\frac{a}{b}\right)^\Omega \exp\left(-\frac{t'}{a}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\{\Theta(t')\,{}_1F_1(\Omega, 1, \lambda t')\}, \quad \lambda = \frac{b-a}{ab} \tag{1.5}$$

где ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция первого рода (функция Куммера).

Выражение (1.3) формально совпадает с тем, что получается для импульса, распространяющегося в среде с «Ei-памятью». При $\Omega = 1$ как непосредственно из (1.3), так и из (1.5) получается решение, приведенное в [10], поскольку, например, имеет место соотношение [20]: ${}_1F_1(a, a, z) = e^z$.

2. Отметим, что в пределе при $b \to a \equiv \tau$ выражение (1.5) совпадает с выражением, соответствующим решению для среды с единственным временем релаксации τ (т. е. спектру времен релаксации вида $g(\tau') = \delta(\tau' - \tau)$). Действительно, $\Omega \to \infty$ при $b \to a$, поэтому, используя предельные соотношения для вырожденной гипергеометрической функции [20], получим выражение

$$I(t, x) = \exp\left\{-\frac{t'}{\tau} - \Omega'\right\}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\Theta(t')\, I_0\left(2\sqrt{\frac{\Omega' t'}{\tau}}\right)\right\}$$

$$\Omega' = \frac{\Delta x}{2c_\infty \tau} = \lim_{b\to a\equiv\tau}\left\{\Omega\left(1 - \frac{a}{b}\right)\right\} \tag{2.1}$$

в точности совпадающее с результатом работы [9].

Рассмотрим другие предельные случаи, вытекающие из представления (1.5), которое для удобства перепишем в виде

$$I(t, x) = \left(\frac{a}{b}\right)^\Omega \delta(t') + \Omega\lambda\left(\frac{a}{b}\right)^\Omega \exp\left(-\frac{t'}{a}\right){}_1F_1(\Omega + 1, 2, \lambda t')\,\Theta(t') \tag{2.2}$$

При этом были учтены свойства функции Куммера [20].

Из соотношения (2.1) следует, что существует фронт импульса, движущийся со скоростью c_∞ (т. е. $I(t, x) \equiv 0$ при $t < x/c_\infty$). Первое слагаемое в (2.2) описывает распространяющийся вместе с фронтом предвестник, затухающий с расстоянием по экспоненциальному закону $\exp\{-\Omega \ln(b/a)\}$. Главная часть импульса (его тело) описывается вторым слагаемым в (2.2).

Для выяснения характера поведения тела импульса воспользуемся представлениями функции ${}_1F_1$ в различных предельных случаях [20]. Используя разложение функции ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ при малых значениях z, можно убедиться, что в окрестности фронта $\frac{1}{2}(\Omega + 1)t'\lambda \ll 1$ амплитуда импульса возрастает при удалении от фронта, если импульс прошел достаточно большое расстояние $\Omega > (b + a)/(b - a)$, и убывает в противном случае. Заметим, что такое же поведение импульса вблизи фронта наблюдается и для среды с единственным временем релаксации, но на расстояниях $\Omega' \gtrsim 1/2$.

При помощи разложения функции ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ при больших значениях z получим профиль тела импульса при больших временах $\lambda t' \gg 1$ (использовано также асимптотическое представление гамма-функции):

$$I(t, x) = (2\pi\Omega)^{-1/2} \frac{\Omega}{t'} \exp\left\{-\frac{t'}{b} + \Omega \ln\left(\frac{t'}{\Omega} \frac{b-a}{b^2} e\right)\right\} \tag{2.3}$$

При $b > a$ показатель экспоненты в этом выражении всегда меньше нуля. Таким образом, соотношение (2.3) описывает экспоненциально затухающую «хвостовую» часть импульса.

На достаточно больших расстояниях от источника $\Omega \gg 1$ для интервала времен, удовлетворяющих условию $1 < \lambda t' < \Omega^{1/3}$, так что для ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ справедлива асимптотика [20]

$$ {}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \Gamma(\beta)\, e^{z/2} (z(\beta/2 - \alpha))^{1/2-\beta/2} J_{\beta-1}(2\sqrt{z(\beta/2-\alpha)})$$
$$\alpha \gg 1, \ |z| = |\beta/2 - \alpha|^{\rho}, \ 0 \leqslant \rho < 1/3$$

можно получить представление

$$I(t, x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\Omega} \exp\left\{-\frac{\mu t'}{2}\right\} \left(\frac{\lambda\Omega}{t'}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\lambda\Omega t'}), \quad \mu = \frac{b+a}{ab} \tag{2.4}$$

которое при $b \to a$ совпадает с представлением (2.1) в предельном случае. Выражение (2.4) не дает описания наиболее интересной области, где тело импульса имеет максимум. В этом можно убедиться, если воспользоваться асимптотическим представлением функции Бесселя мнимого аргумента и определить значение показателя экспоненты в точке, где он достигает максимума. Именно, при $t' = 4\Omega\lambda/\mu^2$ выражение в показателе экспоненты меньше нуля во всех случаях, кроме $b = a$.

Чтобы получить выражение, описывающее окрестность максимума тела импульса, воспользуемся представлением (1.4). На больших расстояниях $\Omega > 1$ вкладом от окрестности нижнего предела интегрирования можно пренебречь в силу второй формулы (1.4), тогда при условии $b/a\,[\lambda t'/(\Omega - 1)]^{1/2} \gtrsim 1$ вместо функции Бесселя мнимого аргумента в последнем соотношении (1.4) можно использовать ее асимптотическое представление. Выполняя после этого интегрирование по ζ в (1.4) [21], для тела импульса получим (предвестник тот же, что и в (2.2)):

$$I(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{2b}\right)^{\Omega} \frac{\Gamma(2\Omega + 1/2)}{\Gamma(\Omega)} \left(\frac{\lambda}{2t'}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{\mu t'}{2}\right\} D_{-2\Omega-1/2}(-\sqrt{2\lambda t'})$$

где $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра ($D_{-a-1/2}(x) \equiv U(a, x)$ — функция Уиттекера). Используя асимптотики гамма-функций при $\Omega \gg 1$, а также разложение Дарвина для функции Уиттекера [20] ($a > 0$, $x^2 + 4a \gg 1$), после преобразований получим

$$I(t, x) = (2\pi t')^{-1/2} \Lambda^{-1/4} \exp\{-{}^1\!/_2 \mu t' + {}^1\!/_2 \lambda t' \Lambda^{1/2} -$$
$$-\Omega \ln(b/a) + \Omega \ln[1 + {}^1\!/_2 (\lambda t'/\Omega)(1 + \Lambda^{1/2})]\},$$
$$\Lambda = 1 + 4\Omega/(\lambda t') \tag{2.5}$$

Выражение, стоящее под знаком экспоненты в (2.5), как будет показано ниже, имеет нулевой максимум при $t' = \Omega(b - a)$. Таким образом, соотношение (2.5) описывает тело импульса в окрестности его максимума. Уменьшение амплитуды последнего при увеличении пройденного расстояния происходит по степенному закону:

$$(2\pi\Omega(b^2 - a^2))^{-1/2} \equiv (\pi \Delta x (b + a)/c_\infty)^{-1/2}$$

3. Ряд результатов, полученных выше при анализе точного решения (1.5), можно получить более простым способом, используя приближенные методы непосредственно для вычисления интеграла (1.1). Например, в окрестности фронта структура $I(t, x)$

определяется разложением $K(p)$ при $p \to \infty$ и имеет вид [22, 23]

$$I(t, x) = (a/b)^{\Omega}[\delta(t') + (A\Omega/t')^{1/2} I_1(2(A\Omega t')^{1/2})\Theta(t')] \qquad (3.1)$$
$$A = \lambda - {}^3/_4\Delta(b-a)^{-1}\ln^2(b/a)$$

В случае $\Delta \ll 1$ выражение (3.1) полностью согласуется с (2.4) и (2.2).

На больших расстояниях от источника ($\Omega \gg 1$) приближенное выражение для профиля импульса можно получить, используя метод перевала:

$$I(t, x) = (2\pi\Omega S_2(p_n))^{-1/2}\exp\{\Omega S(p_n)\}. \qquad (3.2)$$
$$S(p_n) = -\frac{p_n(b-a)}{(p_nb+1)(p_na+1)} - \ln\frac{bp_n+1}{ap_n+1}, \quad S_2(p_n) = \frac{(b-a)(2abp_n+b+a)}{(p_nb+1)^2(p_na+1)^2}$$
$$p_n = -\mu/2 + \lambda\Lambda^{1/2}/2$$

Выражение (3.2) полностью эквивалентно выражению (2.5). В этом можно убедиться, выразив все параметры через отношение Ω/t' и произведя необходимые преобразования.

Из последней формулы (3.2) следует, что соответствие между перевальной точкой $p_n > -1/b$ и параметром Ω/t' взаимно однозначно. Поэтому максимум тела импульса можно определить из условия $S'(p_n) = 0$, из которого следует, что $p_n = 0$. Это соответствует значению $t' = \Omega(b-a)$.

Авторы благодарят Е. Д. Соломенцева за советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975, 472 с.
3. *Morrison J. A.* Wave propagation in rods of Voight material and visco-elastic materials with three-parameter models // Quart. Appl. Math. 1956. V. 14. № 2. P. 153—169.
4. *Зверев И. Н.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластичном стержне // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 295—302.
5. *Clark G. B., Rupert G. B.* Plane and spherical waves in a Voigt medium // J. Geophys. Res. 1966. V. 71. № 8. P. 2047—2053.
6. *Berry B. S.* Stress propagation in visco-elastic bodies // J. Mech. and Phys. of Solids. 1958. V. 6. № 3. P. 177—185.
7. *Lee E. H., Kanter I.* Wave propagation in finite rods of viscoelactis material // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. № 9. P. 1115—1122.
8. *Achenbach J. D., Chao C. C.* A three-parameter viscoelastic model particularly suited for dynamic problems // J. Mech. and Phys. of Solids. 1962. V. 10. No 3. P. 245—252.
9. *Дунин С. З.* Распространение волн в слабо диспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138—141.
10. *Нигул У. К.* Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды / Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 142—152.
11. *Коган С. Я.* Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1966. № 11. С. 3—29.
12. *Edmonds P. D., Bould T. J., Dyro J. F., Hyssey M.* Ultrasonic absorption of aqueous hemoglobin solutions // Biochim. Biophys. Acta. 1970. V. 200. P. 174—177.
13. *Pauly H., Schwan H. P.* Mechanism of absorption of ultrasound in liver tissue // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 50. № 2. P. 692—699.
14. *Jongen H. A. H., Thijssen J. M., Van den Aarsen M. L., Verhoef W. A.* A general model for the absorption of ultrasound by biological tissues and experimental verification // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 2. P. 535—540.
15. *Гуревич Г. И.* Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. М.: Наука, 1974. 483 с.
16. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Особенности структуры объемных волн в диспергионно-диссипативных средах // Изв. АН СССР. Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 94—100.
17. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
18. *Лебедев Н. И.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
19. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
20. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
21. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
22. *Вайнштейн Л. А.* Распространение импульсов // Успехи физ. наук. 1976. Т. 118. № 2. С. 339—367.
23. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.

Москва

Поступила в редакцию 11.VII.1988