

УДК 539.3

© 1990 г.

Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОГО СЛОЯ

На основе точного решения динамической контактной задачи дается оценка границ применимости прикладных методов расчета импедансных характеристик среды, широко используемых в инженерной практике. Анализируется зависимость динамической контактной жесткости слоя от размеров области контакта и частоты установившихся гармонических колебаний.

Известно, что для строгого описания взаимодействия недеформируемого штампа с упругой средой (полупространством или слоем) необходимо путем решения интегрального уравнения найти неизвестное распределение напряжений под штампом и суммарное усилие реакции среды [1]. Несмотря на многообразие методов, разработанных к настоящему времени, решение интегральных уравнений динамических контактных задач достаточно трудоемко. Поэтому на практике нередко для определения упругой реакции среды используются приближенные подходы. Например, распределение контактных напряжений предполагается заданным по некоторому закону без решения контактной задачи, а реакция среды (податливость основания) определяется путем решения первой краевой задачи теории упругости (по заданным поверхностным напряжениям определяются перемещения). Во многих случаях данный подход дает вполне удовлетворительные результаты, однако открытым остается вопрос о границах его применимости.

Ниже проводится сопоставление результатов точного и приближенных подходов, дается краткое описание используемых методов и приводятся наиболее характерные результаты расчетов¹.

1. Рассматривается упругий слой толщиной h , нижняя грань которого жестко скреплена с недеформируемым основанием, а на верхней, свободной от напряжений, расположен круглый штамп радиуса a , вибрирующий под действием вертикальной нагрузки $F e^{-i\omega t}$. Трение между штампом и средой отсутствует (гладкий контакт), колебания штампа и точек среды предполагаются установившимися с круговой частотой ω . Масса штампа m , характеристики слоя: плотность ρ , модуль сдвига μ , коэффициент Пуассона ν .

В дальнейшем все размерные величины приводятся в единицах, выраженных через $l_0 = h$, $\rho_0 = \rho$, $v_0 = \sqrt{\mu/\rho}$; например, $\omega = 2\pi l_0 f/v_0$, f — частота в герцах.

Вертикальные поступательные перемещения штампа определяются выражением

$$w = F/(P_1 - m\omega^2), \quad P_1 = \iint_{\Omega} q_1(x, y) dx dy = P/w \quad (1.1)$$

Здесь P — суммарные усилия, действующие на поверхность среды в области контакта, $q_1(x, y)$ — распределение напряжений под штампом при его вибрации с единичной амплитудой, Ω — область контакта.

¹ Подробное описание вывода расчетных формул, реализации их на ЭВМ и полученных численных результатов содержится в работе: Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Динамическая реакция упругого слоя; сопоставление точного и приближенного подходов. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1989. 38 с.— Деп. в ВИНТИ 07.04.89, № 2250—В89.

Функция $P_1(\omega)$ описывает динамическую контактную жесткость упругой среды. Она является обратной к функции податливости упругого основания.

Напряжения q_1 определяются из интегрального уравнения [2]

$$\iint_{\Omega} k(x - \xi, y - \eta) q_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$K(\alpha) = K_1(\alpha)/\Delta(\alpha), \quad K_1(\alpha) = \frac{1}{2}\kappa_2^2 \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 - \alpha^2 \operatorname{sh} \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1)$$

$$\Delta(\alpha) = 2\mu [2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \delta + \alpha^2 (\delta^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 (\delta^2 + \alpha^4) \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2]$$

$$\delta = \alpha^2 - \frac{1}{2}\kappa_2^2, \quad \sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad n = 1, 2, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$\kappa_1 = \omega/v_P, \quad \kappa_2 = \omega/v_S, \quad v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad v_S = \sqrt{\mu/\rho}$$

Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 совпадают с вещественной осью, отклоняясь от нее в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов. Направление обхода диктуется принципом предельного поглощения [2].

В рамках прикладной теории распределение контактных напряжений определяется не из интегрального уравнения (1.2), а предполагается заданным по некоторому закону $q(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. При этом не выполняются условия контакта штампа со средой: перемещения в области Ω

$$w(r) = \iint_{\Omega} k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha) Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha$$

$$(Q(\alpha) = \iint_{\Omega} q(r) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy = 2\pi \int_0^a q(r) J_0(\alpha r) r dr, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2})$$

не постоянны. Здесь $J_n(\alpha r)$ — функция Бесселя.

В качестве меры смещения штампа в этом случае принимают осредненные по области контакта перемещения поверхности среды

$$w_0 = \frac{1}{\pi a^2} \iint_{\Omega} w(r) d\Omega = \frac{1}{\pi a} \int_{\Gamma} K(\alpha) Q(\alpha) J_1(a\alpha) d\alpha$$

При этом

$$P_1 \approx \frac{P}{w_0}, \quad P = 2\pi \int_0^a q(r) r dr \quad (1.3)$$

В дальнейшем рассматриваются два вида нагрузки:

равномерно-распределенная

$$q(r) = \begin{cases} P/(\pi a^2), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad Q(\alpha) = 2P \frac{J_1(a\alpha)}{a\alpha} \quad (1.4)$$

распределенная по параболическому закону

$$q(r) = \begin{cases} P/(2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad Q(\alpha) = \frac{P \sin a\alpha}{a\alpha} \quad (1.5)$$

В случае круговой области контакта решение интегрального уравнения (1.2) может быть построено разными методами. Наиболее эффективен метод факторизации [2, 3], с помощью которого задача сводится к бесконечной линейной алгебраической системе с экспоненциально убывающими

внедиагональными коэффициентами. Однако здесь при определении $P_1 = Q_1(0)$ возникают трудности, связанные с устранением при $\alpha = 0$ логарифмических особенностей, вносимых функциями Ганкеля $H_0^{(1,2)}(a\alpha)$. Поэтому для проведения расчетов было использовано непосредственное сведение уравнения (1.2) к бесконечной системе с последующей ее регуляризацией по схеме, разработанной [4] для статических задач.

Имеем

$$Q_1(\alpha) = \frac{F(\alpha) + \Phi(\alpha)}{K(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \iint_{\Omega} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy = 2\pi \frac{J_1(a\alpha)}{\alpha}$$

$$\Phi(\alpha) = 2\pi \int_a^{\infty} \varphi(r) J_0(\alpha r) r dr \quad (1.6)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha) Q_1(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = \sum_{|k|=1}^{\infty} t_k H_0^{(1)}(\zeta_k r), \quad r > a$$

$$t_k = 1/2 i \operatorname{res} K(\alpha) |_{\alpha=\zeta_k} Q_1(\zeta_k) \zeta_k$$

где ζ_k — полюсы $K(\alpha)$, расположенные выше контура σ , идущего вдоль вещественной оси $\operatorname{Im} \alpha = 0$ и отклоняющегося от нее только при обходе вещественных полюсов в соответствии с принципом предельного поглощения.

Из (1.6) следует

$$\Phi(\alpha) = 2\pi a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{\alpha^2 - \zeta_k^2} [\zeta_k H_1^{(1)}(\zeta_k a) J_0(a\alpha) - \alpha H_0^{(1)}(a\zeta_k) J_1(a\alpha)] \quad (1.7)$$

Функция $Q_1(\alpha)$ — целая, поэтому в представлении (1.6) полюсы, вносимые нулями $K(\alpha)$, должны быть устранимыми, т. е. должно выполняться условие

$$F(z_l) + \Phi(z_l) = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

(z_l — нули $K(\alpha)$), которое дает систему для определения t_k

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{g}; \quad b = \|b_{lk}\|_{l,k=1}^{\infty} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots\}, \quad \mathbf{g} = \{g_1, g_2, \dots\}$$

$$B_{lk} = \frac{1}{z_l^2 - \zeta_k^2} \left[\zeta_k \frac{H_1^{(1)}(a\zeta_k) J_0(az_l)}{H_0^{(1)}(a\zeta_k) J_1(az_l)} - z_l \right], \quad g_l = -\frac{1}{z_l}, \quad t_k = \frac{s_k}{H_0^{(1)}(a\zeta_k)}$$

Для двукратных неустраняемых нулей z_n к условиям (1.8) необходимо добавить условия

$$\Phi'(z_n) + F'(z_n) = 0$$

Однако для четных $\Phi(\alpha)$, $F(\alpha)$ данное условие при $z_n = 0$ выполняется тождественно и дополнительных уравнений в (1.9) не дает.

Элементы матрицы \mathbf{B} имеют поведение:

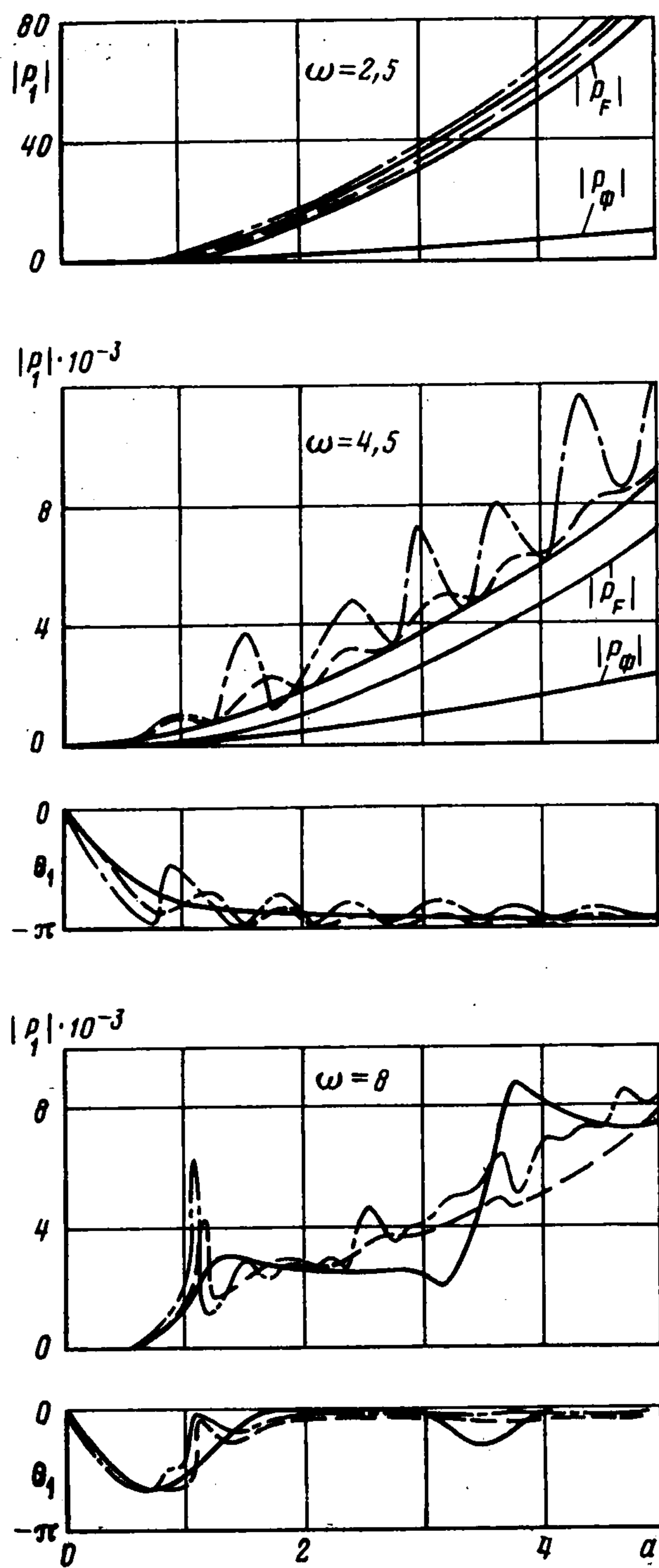
$$b_{lk} \sim (\zeta_k - z_l)^{-1}, \quad l, k \rightarrow \infty$$

что позволяет в случае отсутствия кратных нулей выделить и обратить главную часть системы в явном виде.

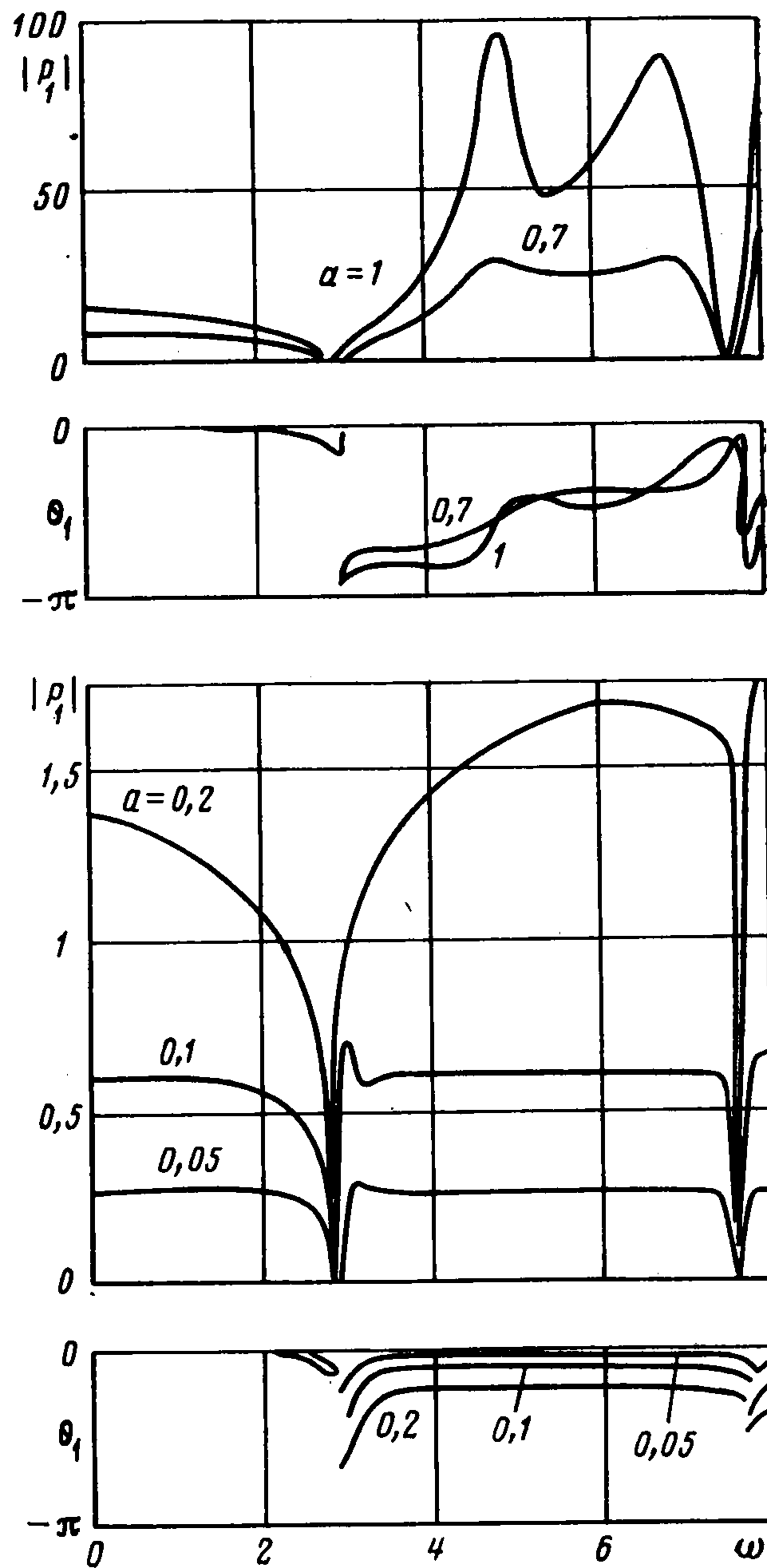
Обратная матрица для матрицы $\mathbf{C} = \|c_{lk}\|_{l,k=1}^{\infty}$, $c_{lk} = 1/(\zeta_k - z_l)$ построена в [4].

Домножив систему (1.9) слева на \mathbf{C}^{-1} , приходим к регуляризованной системе (\mathbf{E} — единичная матрица)

$$(\mathbf{E} + \mathbf{R}) \mathbf{s} = \mathbf{f}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{C}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{g} \quad (1.10)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Определив s из системы (1.10), находим

$$P_1(\omega) = Q_1(0) = P_F + P_\Phi = \frac{\pi a^2}{K(0)} - \frac{2\pi a^2}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \frac{H_1^{(1)}(a\zeta_k)}{H_0^{(1)}(a\zeta_k) \zeta_k} \quad (1.11)$$

Величина $P_F = F(0)/K(0)$ совпадает с решением несмешанной задачи с заданными поверхностными перемещениями (в области Ω — единичные, вне Ω — нулевые), $P_\Phi = \Phi(0)/K(0)$ учитывает наличие перемещений вне области Ω .

2. На фиг. 1, 2 изображены зависимости от a и ω амплитуды $|P_1|$, определенной точно по формуле (1.11) (сплошная линия) и приближенно для равномерной (P_2 — штриховая линия) и параболической (P_3 — штрихпунктирная линия) нагрузки при $\nu = 0,3$. Там, где результаты совпадают (в масштабе чертежа), приводится только одна линия. Дисперсионные кривые (зависимости $\zeta_n(\omega)$, $z_n(\omega)$) для рассматриваемого случая см. в работах [2, 5], вид комплексных ветвей данных кривых приведен в работе, указанной в сноске на с. 474.

Анализ результатов показывает, что на низких частотах ($\omega < 3$) в рассматриваемом диапазоне изменения $a \in [0,5]$ приближенные значения P_2 , P_3 вполне удовлетворительно согласуются с точной зависимостью $P_1(a)$. При этом для малых a к $P_1(a)$ ближе подходит кривая $P_3(a)$ (параболическая нагрузка), а для больших a во многих случаях ближе оказывается кривая $P_2(a)$ (равномерная нагрузка).

Близость P_1 и P_3 при малых a объясняется тем, что главные члены асимптотики этих функций при $a \rightarrow 0$ совпадают:

$$P_m(a) = A_m \mu (1 - \gamma^2) a + O(a^2), \quad a \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$A_1 = A_3 = 8, \quad A_2 = 3/4\pi^2; \quad \gamma = v_S/v_P$$

(величина ω фиксирована).

Представление (2.1) показывает, что при малых a динамическая контактная жесткость практически не зависит от частоты и совпадает со статической жесткостью однородного полупространства. Это совпадение сохраняется в достаточно широком диапазоне частот, исключая окрестности собственных частот колебаний слоя.

Совпадение с требуемой точностью при малых a значений P_1 , найденных по формулам (1.11) и (2.1), явилось хорошим контролем используемого метода, так как он имеет ограничения по a снизу и его точность повышается с ростом a (в (1.10) $\|R\| \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$). Таким образом, P_1 с требуемой точностью определяется во всем диапазоне изменения $a \in (0, \infty)$.

При $\omega > 3$ кривые $P_2(a)$ и $P_3(a)$ в определенном диапазоне $a < a_0(\omega)$ согласуются с зависимостью $P_1(a)$, а при $a > a_0(\omega)$ наблюдаются периодически повторяющиеся отклонения приближенных кривых от точной. Зависимость верхней границы удовлетворительного согласования результатов a_0 от частоты имеет вид гиперболы: $a_0(\omega) \approx c/\omega$.

При $a < a_0$ диаметр области контакта существенно меньше длины поверхностных волн, возбуждаемых в слое, поэтому под действием заданной гармонической нагрузки поверхность слоя в области ее приложения целиком смещается в одну сторону от положения равновесия. Осредненные перемещения w_0 , определяемые путем интегрирования смещения поверхности в области приложения нагрузки, в этом случае описывают среднее отклонение поверхности от положения равновесия.

С ростом ω длина волны уменьшается и в области приложения нагрузки появляются зоны выпучивания. В этом случае величина w_0 уменьшается, что приводит к увеличению P_2, P_3 по сравнению с P_1 .

Рассмотрим изменение фазы θ_1 , которая определяет резонансные свойства среды при вибрации массивных тел на ее поверхности. При $\theta_1 = 0$ возможны бесконечные резонансы, при малых θ_1 — ограниченные, а в остальных случаях резонансов нет [6].

В зоне квазистатики $0 \leq \omega \leq \pi/2$ имеем $\theta_1 \equiv 0$ при любых a , т. е. всегда возможны бесконечные резонансы. А вот условия возникновения ограниченных резонансов в зоне бегущих волн $\omega > \pi/2$ существенно зависят от ω и a . Ранее² на основании анализа зависимости $\theta_1(\omega)$ для прямоугольного штампа размером 3×4 был сделан вывод, что диапазоны, в которых возможны ограниченные резонансы ($\theta_1 \approx 0$), чередуются с теми, в которых резонансов быть не может ($\theta_1 \approx -\pi$), и границами диапазонов являются собственные частоты колебаний слоя (частоты появления неустраиваемых двукратных полюсов $\zeta_k = 0$). Данный вывод остается в целом справедливым при a , соизмеримых с толщиной слоя, а при $a \rightarrow 0$ для всех частот $\theta \rightarrow 0$ (фиг. 1).

Таким образом, возможность ограниченных резонансов зависит не только от ω , но и от a : при $a \rightarrow 0$ ограниченный резонанс по массе возможен на любой частоте $\omega > \pi/2$.

Самостоятельный интерес представляет изучение зависимости контактной жесткости от частоты. Ранее такие результаты были получены для больших прямоугольных штампов (см. [5] и указанную там литературу). На фиг. 2 приводятся зависимости $|P_1(\omega)|$, $\theta_1(\omega)$ для разных значений a .

Как отмечалось выше, существенно новым моментом здесь является то, что при малых a величина P_1 остается постоянной в широком диапазоне частот. На частотах собственных колебаний слоя ($\omega = 2,89; 2,93; 7,64; 8,82$), как и ранее, $P_1 = 0$, в том числе и при двукратных $\zeta_k \neq 0$ на левой границе диапазонов обратной волны (зависимость $P_1(\omega)$ в диапазоне обратной волны в крупном масштабе проводилась ранее²).

Авторы благодарят В. А. Бабешко за обсуждение результатов.

² Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. О резонансных свойствах системы штампы — упругий [слой // Краснодар, Кубан. гос. ун-т. 1985. 39 с. — Деп. в ВИНТИ 4.12.85, № 8329—В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 4. С. 777—780.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Глушков Е. В.* Вибрация системы массивных штампов на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 142—147.
6. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076—1079.

Краснодар

Поступила в редакцию
16.III.1989