Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 539.3

Е. В. Коваленко

О РАСЧЕТЕ ТОНКИХ ПОРИСТЫХ ПОКРЫТИЙ

Рассматривается плоская контактная задача для упругого слоя, поры которого заполнены вязкой сжимаемой жидкостью. Показано, что в случае относительно малой толщины слоя (покрытия) его реологические свойства можно моделировать уравнениями основания Фусса — Винклера с операторным коэффициентом постели (аналог уравнений наследственной упругости). Подробно исследуется случай вдавливания параболического штампа в тонкое пористо-упругое покрытие. Получены асимптотические формулы для основных характеристик контактного взаимодействия: осадки основания под штампом, области контакта, контактного давления, справедливые при малом и большом временах.

Опыт создания и использования антифрикционных покрытий в современной технике приводит к необходимости управления их структурой и функциональными свойствами. К таким покрытиям прежде всего следует отнести пористо-упругие, поверхность которых антифрикционна в силу способности впитывать смазку и затем выделять ее при нагружении. Кроме того, теория деформирования пористо-упругих тел удобна при описании ряда закономерностей производства материалов методами порошковой металлургии [1]. Основы этой теории были разработаны достаточно давно [2], однако решению конкретных смешанных задач уделялось незначительное внимание. В основном это задачи теории консолидации водонасыщенной среды [1, 3, 4], причем в качестве основания выбирались пористо-упругая полуплоскость или полупространство.

1. В рамках плоской теории упругости (плоская деформация) рассмотрим задачу о действии распределенной на участке $|x| \leqslant a$ нормальной нагрузки $q(x)H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда) на верхнюю границу пористого упругого слоя ($0 \leqslant y \leqslant h$), жестко защемленного по основанию. Реологические свойства среды будем описывать уравнениями модели Био [2], считая, что движение вязкой (η — коэффициент вязкости) сжимаемой жидкости в порах подчиняется закону фильтрации Дарси с коэффициентом проницаемости k

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\mu + \lambda_c)\,\mathrm{grad}\,e - \alpha M\,\mathrm{grad}\,\zeta = 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{kM_c}{\eta}\Delta\zeta \quad \left(M_c = \frac{M(2\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda_c}\right) \qquad (1.2)$$

$$p = -\alpha Me + M\zeta,\ \ e = \mathrm{div}\,\mathbf{u},\ \ \zeta = f\,\mathrm{div}\,(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \qquad (1.3)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_c e - \alpha M\zeta),\ \ \lambda_c = \lambda + \alpha^2 M \qquad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u, v\}$, $\mathbf{U}$ — векторы перемещений точек упругого скелета и жидкости соответственно; p — гидростатическое давление жидкости в порах; f — пористость; τ_{ij} — тензор напряжений в пористой среде; e_{ij} — тензор деформаций в упругом скелете; μ, λ, α и M — упругие коэффициенты пористой среды, физический смысл которых и методы определения изложены в [5].

Примем, что поверхность слоя $y = h$ вполне проницаема, а его основание — абсолютно непроницаемо. Тогда граничные условия поставленной задачи запишутся в форме

$$
\begin{gathered}
y = h\colon\ p = 0,\ \tau_{12} = 0\ \ (\,|\,x\,| < \infty) \\
\tau_{22} = -q\,(x)\,H\,(t)\ \ (\,|\,x\,| \leqslant a),\ \tau_{22} = 0\ \ (\,|\,x\,| > a) \\
y = 0\colon\ u = v = \partial p/\partial y = 0\ \ (\,|\,x\,| < \infty)
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

напряжения в слое равны нулю на бесконечности, а начальное условие, соответствующее отсутствию мгновенных объемных деформаций в скелете, имеет вид

$$
e\,(x,\,y,\,0) = 0 \tag{1.6}
$$

Для решения задачи (1.1)—(1.6) подобно тому, как это делалось в [6], введем в рассмотрение две неизвестные функции $E\,(x,\,y,\,t)$ и $S\,(x,\,y)$, связанные с компонентами вектора перемещений в упругом скелете u, v и давлением p выражениями

$$
\begin{gathered}
u = E_{,x} + yS_{,x},\ \ v = E_{,y} + yS_{,y} - S \\
p\alpha = (2\mu + \lambda)\,\Delta E + 2\mu S_{,y},\ e = \Delta E
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

Подставляя (1.7) в уравнения (1.1), (1.2) и (1.4), будем иметь

$$
\Delta S = 0,\ \ \Delta E_{,t} = c\Delta^2 E\ \ (c = kM_c/\eta) \tag{1.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\tau_{11} = 2\mu\,(-E_{,xx} + yS_{,yy} - S_{,y}), \\
\tau_{12} = 2\mu\,(E_{,xy} + yS_{,xy})
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Используя теперь формулы (1.7) и (1.9), преобразуем граничные (1.5) и начальное (1.6) условия к виду

$$
\begin{gathered}
y = h\colon\ (2\mu + \lambda)\,\Delta E + 2\mu S_{,y} = 0,\ E_{,xy} + hS_{,xy} = 0 \\
-E_{,xx} + hS_{,yy} - S_{,y} = -{}^1/_2 q\,(x)\,\mu^{-1}\,[(H\,(x + a) + \\
+ H\,(x - a)]\,H\,(t)
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

$$
\begin{gathered}
y = 0\colon\ E_{,x} = E_{,y} - S = (2\mu + \lambda)\,\Delta E_{,y} + 2\mu S_{,yy} = 0\ (\,|\,x\,| < \infty) \\
t = 0\colon\ \Delta E = 0
\end{gathered} \tag{1.11}
$$

Краевая задача (1.8)—(1.11) может быть точно решена при помощи интегральных преобразований Фурье по координате x и Лапласа — Карсона по времени t [7]. Опуская выкладки, имеем для трансформанты Лапласа — Карсона от вертикального перемещения точек верхней грани слоя (ν — коэффициент Пуассона материала скелета)

$$
v^L\,(x,\,h,\,s) = -\frac{1}{\pi\mu}\int\limits_{-a}^{a} q\,(\xi)\,d\xi \int\limits_0^\infty K\,(u,\,s)\cos\frac{u}{h}\,(\xi - x)\,du \tag{1.12}
$$

$$
\begin{gathered}
K\,(u,\,s) = D_1\,(u,\,s)/[uD_2\,(u,\,s)] \\
D_1\,(u,\ s) = 2u^2\,\mathrm{sh}\,u - u\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma + {}^1/_2\varepsilon^{-1}ums\,\mathrm{ch}\,\gamma + \\
+ u^3\gamma^{-1}\,\mathrm{sh}^2\,u\,\mathrm{sh}\,\gamma - {}^1/_4\varepsilon^{-1}\,[\gamma^2 - \nu\,(1 - \nu)^{-1}u^2]\,\mathrm{sh}\,2u\,\mathrm{ch}\,\gamma \\
D_2\,(u,\ s) = 4u^2\,(\mathrm{ch}\,u - u\,\mathrm{sh}\,u - \mathrm{ch}^2\,u\,\mathrm{ch}\,\gamma) + u\gamma^{-1}\,\mathrm{sh}\,\gamma\,\times \\
\times\,(u^2 + \gamma^2)\,(\mathrm{sh}\,2u + 2u) - \varepsilon^{-1}ms\,\mathrm{ch}\,\gamma\,(u^2 + \mathrm{ch}^2\,u) - \\
- 4\varepsilon\,(ms)^{-1}u^3\,\mathrm{ch}\,u\,[2u\,(\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,\gamma - 1) - \\
- (u^2 + \gamma^2)\,\gamma^{-1}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,\gamma] \\
\gamma^2 = u^2 + ms,\ \ m = h^2/c,\ \ \varepsilon = {}^1/_2\,(1 - 2\nu)\,(1 - \nu)^{-1}
\end{gathered}
$$

Решая поставленную задачу при $t = 0$, запишем

$$
v\,(x,\,h,\,0) = -\frac{1 - \nu}{\pi\mu}\int\limits_{-a}^{a} q\,(\xi)\,k\left(\frac{\xi - x}{h}\right)d\xi \tag{1.13}
$$

$$
k\,(z) = \int\limits_0^\infty \frac{(2\varkappa\,\mathrm{sh}\,2u - 4u)\cos uz\,du}{(2\varkappa\,\mathrm{ch}\,2u + 4u^2 + \varkappa^2 + 1)\,u},\ \ \varkappa = 3 - 4\nu
$$

Введем в рассмотрение параметр $\Lambda = ha^{-1}$ и будем считать $\Lambda \ll 1$. Упрощая далее асимптотически соотношения (1.12) и (1.13), т. е. пренебрегая в них членами порядка Λ^2 и выше, характеризующими деформацию упругого скелета, найдем

$$v^L(x, h, s) = -\frac{\varepsilon h \operatorname{th}\sqrt{ms}}{\mu\sqrt{ms}}\, q(x), \quad v(x, h, 0) = -\frac{\varepsilon h}{\mu} q(x) \quad (|x| \leqslant a) \tag{1.14}$$

Из равенств (1.14) заключаем, что относительно тонкий пористый упругий слой работает на сжатие подобно основанию Фусса — Винклера с операторным коэффициентом постели, вид которого можно определить, применив к обеим частям первого равенства (1.14) обратное преобразование Лапласа — Карсона. С учетом второго соотношения (1.14) будем иметь

$$v(x, h, t) = -\frac{\varepsilon h}{\mu} q(x)\left[1 + \frac{1}{m}\int_0^t \theta_2\left(0, \frac{t-\tau}{m}\right) d\tau\right] \tag{1.15}$$

$$(|x| \leqslant a, t \geqslant 0)$$

$$\theta_2(u, x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\pi^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 x\right] \cos\pi(2n+1)u$$

($\theta_2(u, x)$ — тета-функция). Решение для мгновенной распределенной нагрузки $\tau_{22} = -q(x)\,\delta(t)$, приложенной на участке $|x| \leqslant a$ границы слоя $y = h$, получается дифференцированием равенства (1.15) по t

$$v_{,t}(x, h, t) = -\frac{\varepsilon h}{\mu} q(x)\left[\delta(t) + \frac{1}{m}\theta_2\left(0, \frac{t}{m}\right)\right] \tag{1.16}$$

причем

$$\theta_2(0, t) = \begin{cases} 2\exp(-\pi^2 t/4), & t \to \infty \\ (\pi t)^{-1/2}, & t \to 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

2. Зная функцию $v_{,t}(x, h, t)$, описывающую осадку точек основания под мгновенной распределенной нагрузкой, изучим контактную задачу о вдавливании силой $P(t)$ параболического штампа $y = x^2(2R)^{-1}$ в поверхность тонкого упругого пористого слоя (1.1)—(1.4), жестко защемленного по нижней грани. При этом будем считать, что сила $P(t)$ изменяется во времени таким образом, что полуширина области контакта $a(t)$ штампа с основанием с течением времени монотонно возрастает. В этом случае существует обратная к $a = a(t)$ функция $t = b(a)$, а ее однозначность позволяет использовать величину $a(t)$ в качестве временного параметра [8]. Вводя безразмерные переменные $x^* = xR^{-1}$, $t^* = tm^{-1}$ и обозначая

$$a^*(t^*) = a(t)R^{-1},\ \beta^*(t^*) = \beta[a(t)]R^{-1},\ q^*(x^*, t^*) = \varepsilon hq[x, a(t)](\mu R)^{-1},\ N_0(t^*) = \varepsilon hP[a(t)](\mu R^2)^{-1}$$

(звездочку ниже опустим), запишем интегральное уравнение поставленной задачи относительно неизвестного под штампом контактного давления $q(x, t)$ в виде

$$q(x, t) + \int_0^t q(x, \tau)k(t-\tau)\,d\tau = \beta(t) - \frac{x^2}{2} \tag{2.1}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant a(t),\ 0 \leqslant t < \infty),\ k(t) = \theta_2(0, t)$$

Для замыкания постановки задачи к уравнению (2.1) необходимо добавить условие квазиравновесия

$$N_0(t) = 2\int_0^a q(x, t)\, dx \tag{2.2}$$

и соотношение

$$q(x, t) = 0 \quad (x \geqslant a(t)) \tag{2.3}$$

служащее для нахождения неизвестной области контакта штампа с пористым основанием.

Заметим, что равенство (2.3) позволяет переписать интегральное уравнение (2.1) в виде следующей системы:

$$q(x, t) + \int_{\psi(x)}^{t} q(x, \tau)\, k(t-\tau)\, d\tau = \beta(t) - \frac{x^2}{2} \quad (\psi(x) \leqslant t < \infty) \tag{2.4}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant a_0) \\ b(x) & (a_0 < x \leqslant a) \end{cases}, \quad a_0 = a(0) \tag{2.5}$$

для решения которой воспользуемся известным алгоритмом [8].

Полагая в (2.4) $x = a(t)$ и принимая во внимание условие (2.3), определим функцию осадки основания

$$\beta(t) = {}^1\!/_2 a^2(t) \tag{2.6}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (2.1) по x в пределах от 0 до $a(t)$. Используя выражения (2.2), (2.6) и изменяя в полученном интеграле порядок интегрирования, что правомерно [9], поскольку область контакта описывается монотонно возрастающей во времени функцией, будем иметь

$$a^3(t) = \frac{3}{2}\left\{N_0(t) + \int_0^t N_0(\tau)\, k(t-\tau)\, d\tau\right\} \tag{2.7}$$

Ограничиваясь далее вариантом $N_0(t) = N_0 = \text{const}$, из (2.7) с учетом (1.17) найдем

$$a^3(t) = 3N_0\left[1 - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\pi^2(n+{}^1\!/_2)^2 t]}{(n+{}^1\!/_2)^2}\right] \tag{2.8}$$

$$a^3(t) = \frac{3}{2} N_0 \begin{cases} \{1 + 8\pi^{-2}[1 - \exp(-\pi^2 t/4)]\} & (t \to \infty) \\ \left(1 + 2\sqrt{t/\pi}\right) & (t \to 0) \end{cases}$$

Решение системы интегральных уравнений (2.4), (2.5) при достаточно большом времени получено в [8] и имеет вид

$$q(x, t) = \begin{cases} I(0, t) + {}^1\!/_2[a^2(t) - x^2] & (0 \leqslant x \leqslant a_0) \\ I(b(x), t) & (a_0 < x \leqslant a(t)) \end{cases} \tag{2.9}$$

$$I(\alpha, t) = -\int_\alpha^t \exp[-(2 + {}^1\!/_4\pi^2)(t-\tau)]\,[a^2(\tau) - x^2]\, d\tau$$

$$b(x) = -4\pi^{-2} \ln[1 + {}^1\!/_8\pi^2(1 - {}^2\!/_3 x^3 N_0^{-1})]$$

При $t \to 0$ решение можно найти при помощи интегрального преобразования Лапласа — Карсона по времени. Опуская выкладки, запишем его в форме (2.9), где

$$I(\alpha, t) = \int_\alpha^t \left[e^{t-\tau}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t-\tau}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right] \frac{a^2(\tau) - x^2}{2}\, d\tau \tag{2.10}$$

$$b(x) = {}^1\!/_4\pi\,({}^2\!/_3 x^3 N_0^{-1} - 1)^2$$

Таким образом, формулы (2.6), (2.8)—(2.10) дают решение поставленной задачи о вдавливании параболического штампа в тонкое пористое упругое покрытие при $t \to \infty$ и $t \to 0$.

Выясним вопрос: стыкуются ли между собой построенные асимптотические формулы для малого и большого времени? В таблице приведены значения величины $a(t)(3N_0)^{-1/3} \cdot 10^3$, согласно точному решению (первая строка), и рассчитанные по формулам (2.8) для $t \to 0$ (вторая строка) и $t \to \infty$ (третья строка). Видно, что асимптотика

$t=0$	0,1	0,2	0,5	0,7	1	2	∞
794	879	909	959	975	989	999	1000
794	879	910	965	991	1021	1091	∞
794	838	870	923	941	955	966	967

малого времени работает практически до $t = 1$ (погрешность этого решения по сравнению с точным при $t = 1$ не превосходит 3,2%). В то же время асимптотическим решением при $t \to \infty$ можно пользоваться, когда $t \geqslant 0,7$ (максимальная ошибка результатов составляет не более 3,6%).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко М. Д., Селявко В. В.* Метод граничных интегральных уравнений для задач контактного взаимодействия починисто-упругих тел // Трение, износ и смазочные материалы: Тр. междунар. научн. конф. Ташкент, 1985. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1985. Ч. 1. С. 45—48.
2. *Biot M. A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1482—1498.
3. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Контактная задача механики деформации пористых вязкоупругих сред // Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 329—339.
4. *Керчман В. И.* Контактная задача теории консолидации водонасыщенной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 102—109.
5. *Biot M. A., Willis D. G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 4. P. 594—601
6. *McNamee J., Gibson R. E.* Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1960. V. 13. № 1. P. 98—111.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В., Фурин В. В.* Контактная задача теории ползучести для стареющего слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 105—110.
9. *Белоконь А. В., Ворович И. И.* Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 63—73.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1989