Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 532.5 : 534.1

Н. А. Кудряшов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В МЕХАНИКЕ

Получены аналитические решения в виде уединенных и кноидальных волн нелинейных уравнений Бюргерса — Кортевега — де Вриза, Курамото — Сивашинского и уравнения Кавахары, встречающихся при описании волновых процессов в механике.

Вейсом, Табором и Карневейлом был предложен [1] эффективный метод, позволяющий находить преобразования Бэклунда и пары Лакса для нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Суть этого метода состоит в разложении решения исходного уравнения вблизи сингулярного многообразия. Например, для уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{0.1}$$

описывающего нелинейные волны в диспергирующей среде, представление решения в виде

$$u=u_0/F^2+u_1/F+u_2$$

после подстановки в (0.1) и приравнивания выражений при одинаковых степенях $F(x, t)$ нулю, приводит к преобразованию Бэклунда для решений уравнения КдВ, которое существенно упрощает нахождение решений уравнения КдВ.

Ниже будет показано, что подобный подход применим при поиске точных решений ряда неинтегрируемых МОЗР нелинейных уравнений, встречающихся в механике и физике.

1. Уравнение Бюргерса — Кортевега — де Вриза (БКдВ). Это уравнение обобщает уравнение КдВ на случай учета диссипативных процессов при распространении волн на мелкой воде [2], в жидкости с пузырьками газа [3], в плазме [4] и т. д. Она отличается от (0.1) наличием члена $\nu\partial^2 u/\partial x^2$ в правой части. Было показано [5, 6], что решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$u(x, t)=12\beta\partial^2\ln F/\partial x^2-12\nu/5\partial\ln F/\partial x+u_3 \tag{1.1}$$

Используя представление (1.1), можно найти точные решения уравнения БКдВ. Будем искать решение в системе координат бегущей волны $u(x, t)=U(\xi)$, $\xi=x-c_0t$ (c_0 — скорость волны). Уравнение БКдВ в этом случае запишется в виде

$$\beta U_{\xi\xi}''-\nu U_\xi'+{}^1/_2U^2-c_0U+q=0,\ q=\text{const} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) описывает нелинейный осциллятор при наличии затухания из-за сил трения и является распространенной моделью теории колебаний. Подставив в это уравнение преобразование решений (1.1) в виде

$$U=C_1+12\beta\theta^2R(\theta),\quad R(\theta)=\frac{d^2\ln F}{d\theta^2},\quad \theta=\frac{5\beta}{\nu}\exp\left(\frac{\nu\xi}{5\beta}\right)$$

получим

$$\frac{\nu^2}{25\beta^2}R''+6R^2+\frac{1}{\beta}\left(C_1-c_0-\frac{6\nu^2}{25\beta}\right)R\theta^{-2}+\frac{1}{12\beta}\left(q-c_0c_1+\frac{C_1^2}{2}\right)\theta^{-4}=0 \tag{1.3}$$

Последнее уравнение удобно для приближенного решения БКдВ, однако из него находятся и точные решения при выборе q и C_1 таким образом, чтобы выражения в скобках в (1.3) обратились в нуль. В последнем случае, умножив обе части уравнения (1.3) на R_θ' и проинтегрировав по θ, приходим к уравнению

$$R'^2 + 100\beta^2\nu^{-2}(R^3 + C_2) = 0 \tag{1.4}$$

Решение уравнения БКдВ при учете (1.4) выражается через функцию Вейерштрасса:

$$U(\xi) = C_1 - \frac{12\nu^2}{25\beta}\exp\left(\frac{2\nu\xi}{5\beta}\right)\wp\left(\frac{5\beta}{\nu}\exp\left(\frac{\nu\xi}{5\beta}\right), 0, C_3\right) \tag{1.5}$$

При $C_3 = 0$ решение (1.5) имеет вид волнового фронта [6]

$$\begin{gathered} u(x, t) = C_1 + \frac{12\nu}{5}\left(\frac{\nu}{5\beta} - k\right)\frac{E}{1+E} - \frac{12\nu^2E^2}{25\beta(1+E)^2} \\ E = \exp(kx + \omega t), \quad k = \pm\frac{\nu}{5\beta} \\ \omega = -C_1k + \frac{6\nu^3}{125\beta^2} \end{gathered} \tag{1.6}$$

2. Уравнение Курамото — Сивашинского. Другим формальным обобщением уравнения КдВ является уравнение Курамото — Сивашинского, которое описывает нелинейные волны в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью: волны при стекании тонких пленок жидкости по наклонной плоскости [7, 8], волны дрейфа электростатического потенциала в тороидальных системах [9], концентрацию вещества при химических реакциях [10, 11] и т. д. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{2.1}$$

Было показано [5, 6], что решение уравнения (2.1) может быть представлено формулой

$$u(x, t) = \frac{15}{76}\left(16\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\frac{\partial \ln F}{\partial x} + 15\beta\frac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2} + 60\gamma\frac{\partial^3 \ln F}{\partial x^3} + u_4 \tag{2.2}$$

Это преобразование можно использовать для нахождения аналитических решений. В частности, при $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 4$, $u_4 = C_1 = \mathrm{const}$, подставляя

$$\begin{gathered} u(x, t) = U(\xi), \ \xi = x - c_0t \\ U(\xi) = C_1 + R + R_\xi', \ R = 60d^2 \ln F/d\xi^2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

в уравнение (2.1), записанное в системе координат бегущей волны

$$U_{\xi\xi\xi}''' + 4U_{\xi\xi}'' + U_\xi' + {}^1/_2U^2 - c_0U + q = 0 \tag{2.4}$$

приходим к уравнению

$$Z_{\xi\xi}'' + 5Z_\xi' + (5 - A)Z - {}^1/_5RZ + {}^3/_5\int ZR_\xi'd\xi = 0 \tag{2.5}$$

Здесь

$$Z = R_{\xi\xi}'' + R^2/10 + AR - {}^5/_2(1 - A^2), \ A = (C_1 - c_0 + 1)/5 \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.6) следует, что каждое решение уравнения $Z = 0$ является также решением и уравнения (2.5), а следовательно, функция $U(\xi)$, которая находится по формуле (2.3), служит решением уравнения (2.1).

Умножив (2.6) на R_ξ' и проинтегрировав полученное выражение по ξ, приходим к уравнению

$$R_\xi'^2 + R^3/15 + AR^2 - 5(1 - A^2)R - 10D/3 = 0 \tag{2.7}$$

Постоянная D здесь связана с постоянными q, c_0, C_1 и A соотношением

$$D = C_1\left(c_0 - \frac{C_1}{2}\right) - \frac{5}{2}(5 - A)(1 - A^2) - q$$

Решение уравнения (2.7) выражается через эллиптическую функцию Якоби

$$R(\xi) = R_2 + (R_1 - R_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{R_1 - R_2}{15}}, s\right), \quad s^2 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_3} \qquad (2.8)$$

где R_1, R_2 и R_3 ($R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3$) — действительные корни кубического уравнения

$$R^3 + 15AR^2 - 75(1 - A^2)R - 50D = 0$$

При $A = -1$ решение (2.8) переходит в уединенную волну

$$R(\xi) = 15(1 - \mathrm{th}^2(\xi/2)) \qquad (2.9)$$

Подставляя (2.8) в (2.3), найдем решение уравнения (2.1) в виде периодической (кноидальной) волны, которая при $A = -1$ переходит в уединенную волну. Эти решения совпадают с результатами численного моделирования волновых структур [1], описываемых уравнением (2.1). Используя преобразования (2.2), можно найти и другие точные решения уравнения (2.1).

3. Уравнение Кавахары. Магнитоакустические волны в плазме [12], длинные волны в жидкости под ледяным покровом [13], связанные состояния двух солитонов [14] и т. д. описываются нелинейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \qquad (3.1)$$

Это уравнение имеет также преобразование решений типа Бэклунда

$$u = \frac{280}{13}\frac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2} - 280\frac{\partial^4 \ln F}{\partial x^4} + u_5$$

используя которое, найдем решение уравнения Кавахары (3.1) в системе координат бегущей волны. Подставляя

$$u(x, t) = U(\xi), \ \xi = x - c_0 t \qquad (3.2)$$

$$U(\xi) = C_1 + R/13 - R'', \ R = 280d^2 \ln F/d\xi^2$$

в уравнение

$$U^{\mathrm{IV}}_{\xi\xi\xi\xi} - U_{\xi\xi}'' - {}^1/_2 U^2 + c_0 U - q = 0$$

получим, что оно имеет решение в виде (3.2), если

$$R_{\xi\xi}'' + 3R^2/140 - (A + 1/13)R - B = 0 \qquad (3.3)$$

$$B = 5(c_0 - C_1) - \frac{35A}{3}\left(A + \frac{12}{13}\right) - \frac{180}{169}, \quad A = \mathrm{const}$$

Из (3.3) следует уравнение

$$R_\xi'^2 + R^3/70 - (A + 1/13)R^2 - 2BR - 28D/9 = 0 \qquad (3.4)$$

где постоянная D связана с A, c_0, C_1 и B соотношением

$$D = 35A^2(1 - A) + 35A\left(C_1 - c_0 + \frac{12}{169}\right) - \frac{36B}{13} - 8AB$$

Если R_1, R_2 и R_3 ($R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3$) — действительные корни кубического уравнения

$$R^3 - 70\left(A + \frac{1}{13}\right)R^2 - 140\left(BR + \frac{14D}{9}\right) = 0$$

---

[1] *Алексеев А. А., Кудряшов Н. А.* Численное моделирование процесса самоорганизации в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью. Препринт № 027—88. М.: МИФИ, 1988. 24 с.

то решение уравнения (3.4) выражается формулой (2.8) при условии

$$q = C_1\left(c_0 - \frac{C_1}{2}\right) + B(C_1 - c_0) - AB\left(A - \frac{12}{13}\right) + \frac{2D}{3}\left(A - \frac{9}{65}\right) - \frac{13B^2}{35}$$

В случае $A = B = D = C_1 = q = 0$, $c_0 = 36/169$ из (3.4) находим

$$R(\xi) = \frac{70}{13}\,\mathrm{ch}^{-2}(\xi/\sqrt{52}) \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.2), находим решение уравнения Кавахары в виде уединенной волны

$$U(\xi) = \frac{105}{169}\,\mathrm{ch}^{-4}(\xi/\sqrt{52})$$

При других значениях постоянных получаем решения уравнения Кавахары в виде периодических волн.

Автор благодарит С. С. Кучеренко и А. А. Алексеева за проверку решений уравнений, приведенных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522—526.
2. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
3. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. II. М.: Наука, 1987. 359 с.
4. *Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.* Нелинейные волны // Успехи физ. наук. 1971. Т. 103. № 2. С. 193—232.
5. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса—Кортевега — де Вриза // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 342—345.
6. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465—470.
7. *Topper J., Kawahara T.* Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 2. P. 663—666.
8. *Шкадов В. Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. 63—66.
9. *Cohen B. J., Krowes J. A., Tang W. M., Rosenbluth M. N.* Nonlinear Saturation of the dissipative trappedion mode by mode coupling // Nuclear Fusion. 1976. V. 16. № 6. P. 971—992.
10. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media for from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356—369.
11. *Sivashinsky G. I.* Instabilities, pattern formation and turbulence in flames //Annual Review Fluid Mechanics. Paco Alto, Calif.: Ann. Rev. Inc., 1983. V. 15. P. 179—199.
12. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in Dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. № 1. P. 260—264.
13. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230—234.
14. *Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.* Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 2. С. 585—593.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1989