

УДК 532.5 : 534.26

© 1990 г.

И. В. Андронов, Б. П. Белинский

**О ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ
ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ,
ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ ПЛАСТИНОЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Предлагается подход к описанию дифракционных полей акустических волн в вертикально стратифицированной среде, покрытой сверху упругой пластиной. На пластине имеется конечное число точечных или параллельных линейных неоднородностей (трещины, сосредоточенные массы и моменты инерции и т. п.). Ранее аналогичные исследования проводились для однородной среды с использованием техники интегральных преобразований. Для рассматриваемых сред следует привлечь также методику численного решения одномерных дифференциальных уравнений.

Гранично-контактной задачей акустики (ГКЗ) называется краевая задача для уравнения Гельмгольца, при формулировке которой необходимо кроме краевых условий задавать условия в отдельных точках или на отдельных линиях границы (гранично-контактные условия, ГКУ)¹. Была развита ([1]²) и др. техника интегральных преобразований, позволяющая строить решения широкого класса ГКЗ в квадратурах. При этом существенно использован тот факт, что при наличии на пластине лишь точечных (линейных) неоднородностей граничное условие может быть записано (в терминах обобщенных функций) на всей пластине, но в правой части возникает линейная комбинация дельта-функций и их производных, сосредоточенных на неоднородностях. Используя метод интегральных преобразований Фурье, можно прийти к представлению поля, которое содержит коэффициенты упомянутой выше линейной комбинации (гранично-контактные постоянные). Для их определения остается привлечь конкретные ГКУ на каждой неоднородности, фиксирующие механический режим на них. В итоге для гранично-контактных постоянных возникает конечная система линейных алгебраических уравнений (ГКС). На описанном пути были явно решены и детально физически проанализированы ГКЗ для однородной среды при наличии на пластине трещин или ребер жесткости [1—4].

С точки зрения приложений представляет интерес перенесение описанной схемы на случай неоднородной жидкости. В данной работе это делается для стратифицированной по глубине среды на примере дифракции цилиндрической волны на пластине с трещинами (плоская задача). Отмечается отличие в механизме переноса энергии по сравнению с однородной средой. Для данной модели формулируется оптическая теорема, являющаяся удобным контрольным тождеством при расчете поля. Устанавливается однозначная разрешимость ГКС и теорема единственности решения в отсутствие поглощения в среде и пластине.

1. Пусть акустическое полупространство ($z > 0$, $-\infty < x < \infty$) покрыто сверху тонкой изгибно-колеблющейся пластиной ($z = 0$, $-\infty < x < \infty$), ослабленной системой трещин ($z = 0$, $x = a_n$, $n = 1, \dots, N$). Акустическая среда состоит из стратифицированного слоя глубины H , под которым располагается однородное дно ($z > H$). Давление в среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2(z)) g(x, z) = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (1.1)$$

¹ Белинский Б. П. О методе регуляризации в задачах дифракции на подкрепленных пластинах: Автореф. ... дис. д-ра физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1986, 09.10.29с.

² См. также Коузов Д. П. Гранично-контактные задачи акустики (система пластина — жидкость): Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Акуст. ин-та, 1986, 12.11.33с.

($\delta(x)$ — дельта-функция), причем считается, что $z_0 < H$. В дне уравнение становится однородным, при этом $k(z) = k_1$. На поверхности дна выполняются условия непрерывности

$$[g(x, H)] = 0, \quad g'(x, H-0) = \kappa^{-1}g'(x, H+0), \quad \kappa = \rho_1/\rho \quad (1.2)$$

Здесь и ниже $[f(t_0)]$ — скачок функции $f(t)$ в точке $t = t_0$, штрих — производная по аргументу z , ρ и ρ_1 — плотности слоя и дна. На пластине граничное условие имеет вид [1]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_0^4\right)g'(x, 0) + \nu g(x, 0) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^3 c_{nj} \frac{d^j \delta(x - a_n)}{dx^j} \quad (1.3)$$

$$k_0^4 = \mu\omega^2/D, \quad \nu = \rho\omega^2/D$$

Здесь c_{nj} — гранично-контактные постоянные, μ — масса пластины на единицу длины, D — цилиндрическая жесткость, ω — частота. Решение понимается в смысле предельного поглощения.

Граничная задача (1.1)–(1.3) дополняется теми или иными ГКУ на неоднородности. Приведем лишь два примера.

Трещина: ГКУ состоят в отсутствии перерезывающей силы и изгибающего момента на краях трещины ($x = a_n \pm 0$) [1]

$$\lim_{x \rightarrow a_n \pm 0} \frac{\partial^3 g'(x, 0)}{\partial x^3} = \lim_{x \rightarrow a_n \pm 0} \frac{\partial^2 g'(x, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad 1 \leq n \leq N \quad (1.4)$$

Ребро жесткости или торос: ГКУ выводятся из уравнений движения жестко прикрепленного к пластине в точке $x = a_n$ тела [3]

$$D[\partial^3 g'(a_n, 0)/\partial x^3] = M\omega^2 g'(a_n, 0) \quad (1.5)$$

$$D[\partial^2 g'(a_n, 0)/\partial x^2] = -J\omega^2 \partial g'(a_n, 0)/\partial x$$

Здесь M , J — масса ребра и момент инерции относительно оси, проходящей через точку скрепления с пластиной. При этом предполагается, что выполнены кинематические условия непрерывности

$$[\partial g'(a_n, 0)/\partial x] = [g'(a_n, 0)] = 0 \quad (1.6)$$

2. Ниже для определенности рассматривается случай ГКУ (1.4). Решение строится по аналогии со случаем однородного полупространства ($k(z) = k_1$, $\rho = \rho_1$) при помощи преобразования Фурье. При этом выделяется поле g_0 , возникающее в отсутствие трещин (для определенности считаем, что $z < z_0$)

$$g = g_0 + g_1 \quad (2.1)$$

$$g_0 = \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\lambda(x-x_0)} \frac{\psi_0(z, \lambda) \psi_1(z_0, \lambda)}{W(\psi_0, \psi_1)} d\lambda$$

Здесь и ниже отсутствие пределов интегрирования означает, что оно проводится по всей оси, ψ_0 и ψ_1 — решения «глубинного» уравнения

$$\psi'' + (k^2(z) - \lambda^2)\psi = 0 \quad (2.2)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(\lambda^4 - k_0^4)\psi'(0, \lambda) + \nu\psi(0, \lambda) = 0$$

$$\psi'(H, \lambda) + \kappa^{-1} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \psi(H, \lambda) = 0 \quad (2.3)$$

соответственно, $W(\psi_0, \psi_1)$ — их вронскиан. Первое из условий (2.3) возникает в результате преобразования Фурье однородного краевого условия (1.3), второе — следствие условий непрерывности (1.2) с учетом явной разрешимости уравнения (2.2) в дне

$$\psi_1(z, \lambda) = \psi_1(H, \lambda) \exp\{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z - H)\}, \quad z > H \quad (2.4)$$

Рассеянное поле g_1 отыскивается в виде интеграла Фурье с неизвестной плотностью $p(\lambda)$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\lambda x} p(\lambda) \frac{\psi_1(z, \lambda)}{l(\lambda)} d\lambda \quad (2.5)$$

$$l(\lambda) = (\lambda^4 - k_0^4) \psi_1'(0, \lambda) + v\psi_1(0, \lambda)$$

(здесь введен символ граничного оператора (1.3)). Представление (2.5) — естественное обобщение представления поля в случае однородного полупространства, когда функция $\psi_1(z, \lambda)$ определяется согласно формуле (2.4) с $H = 0$ [1—3] (см. также работы, указанные в сносках 1 и 2). Поле g_1 удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и условиям (1.2). Краевое условие (1.3) дает

$$p(\lambda) = c_{nj} e^{-i\lambda a_n} (i\lambda)^j \quad (2.6)$$

Здесь и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам: по n в пределах от 1 до N , по j — от 0 до 3.

Важно отметить, что представление рассеянного поля (2.5), (2.6) равным образом может быть использовано при решении ГКЗ с любыми точечными неоднородностями на границе.

3. Обратимся к ГКУ (1.4) для случая трещин во всех точках $x = a_m$. Находим ($s = 2, 3$)

$$\lim_{x \rightarrow a_m \pm 0} \frac{\partial^s g'(x, 0)}{\partial x^s} = \lim_{x \rightarrow a_m \pm 0} \frac{\partial^s g_0'(x, 0)}{\partial x^s} + \frac{1}{2\pi i} c_{nj} I_{mns+j}^\pm$$

Выведенные здесь гранично-контактные интегралы

$$I_{mnj}^\pm = \int e^{i\lambda(a_m - a_n \pm 0)} \frac{\psi_1'(0, \lambda)}{l(\lambda)} (i\lambda)^j d\lambda \quad (3.1)$$

при $j > 2$ расходятся. Процедура их регуляризации, систематически возникающая при решении ГКЗ для однородной среды [1—3], описывается в разд. 4. Производные от поля источника с использованием элементарного тождества $vW(\psi_0, \psi_1) = \psi_0'(0, \lambda) l(\lambda)$ выражаются сходящимися интегралами

$$\frac{\partial^s g_0'(x_m, 0)}{\partial x^s} = \frac{J_{ms}}{2\pi i}, \quad J_{ms} = v \int e^{i\lambda(a_m - x_0)} \frac{\psi_1'(z_0, \lambda)}{l(\lambda)} (i\lambda)^s d\lambda$$

Сходимость здесь обусловлена экспоненциальным убыванием при $|\lambda| \rightarrow \pm \infty$ функции $\psi_1(z_0, \lambda)$, которое легко проверить по методу ВКБ³.

ГКУ (1.4) приводят к ГКС $4N$ линейных алгебраических уравнений для $4N$ коэффициентов c_{nj}

$$I_{mnj+3}^\pm c_{nj} = -J_{m3}, \quad I_{mnj+2}^\pm c_{nj} = -J_{m2} \quad (3.2)$$

Разрешимость этой системы обсуждается в разд. 6.

Полное решение исходной ГКЗ дается формулами (2.1), (2.5), (2.6), (3.2).

4. Обратимся к процедуре регуляризации интегралов (3.1). Будем понимать $g'(x, 0)$ в (1.4)—(1.6) как предел при $z \rightarrow 0$. Тогда интегралы I_{mnj}^\pm ($n \neq m$) приводятся к сходящимся деформацией контура интегрирования в верхнюю для $a_m > a_n$ или нижнюю для $a_m < a_n$ полуплоскость λ до перехода к пределу по z . После этого перехода сходимость обусловлена убыванием экспоненты $\exp(i\lambda(a_m - a_n))$.

³ Булдырев В. С., Буслаев В. С. Распространение звука в океане: Препринт № 45(417). М.: Ин-т радиотехники и электроники АН СССР, 1984. 43 с.

Интегралы I_{mmj}^{\pm} не зависят от m . Положим $I_{mmj}^{\pm} = I_j^{\pm}$. Ясно, что $I_j^- = (-1)^j I_j^+$. Ограничимся регуляризацией I_j^+ , для краткости ниже индекс «плюс» опустим. В случае однородной среды регуляризация аналогичных интегралов проводится в два этапа. Сначала контур интегрирования деформируется в петлю, охватывающую разрез для $(\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}$ в верхней полуплоскости λ . Затем интеграл по всей петле заменяется на интеграл по одному ее берегу от скачка подынтегральной функции на разрезе. В результате возникают сходящиеся интегралы, которые далее сводятся к суммам вычетов в полюсах подынтегральных выражений, лежащих в верхних полуплоскостях двулистной римановой поверхности [1]. Ввиду сохранения аналитических свойств подынтегрального выражения при переходе к стратифицированной среде, за исключением дополнительно возникающих полюсов, связанных с наличием волнового канала ($0 < z < H$) (полюсы подынтегрального выражения обсуждаются в разд. 5), описанная выше процедура остается применимой. Приведем лишь результат

$$I_{2p+1} = 1/2 \pi i \nu \sum_l (i\lambda_l)^{2p+1} R_l \quad (4.1)$$

$$I_{2p} = 1/2 \nu \sum_l (i\lambda_l)^{2p} R_l (\pi i + 2 \ln ((\lambda_l + \sqrt{\lambda_l^2 - k_1^2})/k_1)) \quad (4.2)$$

Величины R_l определяются собственными функциями ψ_l и собственными числами λ_l спектральной задачи (2.2), (2.3)

$$R_l = (\lambda_l^4 - k_0^4)^{-2} \frac{\psi_l^2(0)}{\psi_l(H)} \left\{ \frac{\partial \psi_0'(H, \lambda_l)}{\partial \lambda} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\lambda_l^2 - k_1^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \psi_0(H, \lambda_l)}{\partial \lambda} + \frac{\lambda_l \psi_l(H)/\kappa}{\sqrt{\lambda_l^2 - k_1^2}} \right\}^{-1} \quad (4.3)$$

В случае однородного полупространства интегралы I_3 и I_5 могут быть вычислены аналитически [5]

$$I_3 = \pi, \quad I_5 = 0 \quad (4.4)$$

Для доказательства справедливости результата (4.4) в рассматриваемом случае выделим из подынтегральных выражений I_3 и I_5 растущие части и разобьем интегралы на два слагаемых

$$I_j = \int e^{+i\lambda_0} \frac{(i\lambda)^j}{\lambda^4 - k_0^4} d\lambda - \nu \int \frac{\psi_1(0, \lambda)}{l(\lambda)} \frac{(i\lambda)^j}{\lambda^4 - k_0^4} d\lambda$$

Во вторых слагаемых интегралы сходятся при $j < 7$ и для нечетных j ввиду нечетности подынтегральной функции обращаются в нуль. Вычисление первых слагаемых по вычетам дает формулы (4.4).

5. Остановимся на случае одной трещины ($N = 1$), положив $a_1 = 0$ (ниже индекс $n = 1$ опустим). ГКС (3.2) после симметризации и антисимметризации распадается на две независимые ГКС

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_3 & I_5 \\ I_2 & I_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ J_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_4 & I_6 \\ I_3 & I_5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ввиду (4.4) решение этих ГКС имеет вид $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = -J_2/I_4$, $c_3 = -J_3/I_6$.

Тем самым точное аналитическое решение исходной ГКС для случая одной трещины построено.

Проведем асимптотическое при $kh \rightarrow 0$ (h — толщина пластины, от которой зависят D , ν и k_0^4) исследование этого решения для случая волновода Пекериса ($k(z) = k$, $0 < z < H$). Будем исследовать только рассеянное поле g_1 . Решения «глубинной» задачи ψ_0 и ψ_1 могут быть выраже-

ны через линейно независимые решения ψ_+ и ψ_- уравнения (2.2)

$$\psi_{\pm} = \exp(\pm \sqrt{\lambda^2 - k^2} z) \quad (5.1)$$

При учете (5.1) дисперсионное уравнение $l(\lambda) = 0$ (см. вторую формулу (2.5)) перепишем в виде:

$$\sqrt{\lambda^2 - k^2} \cdot \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda^2 - k^2} \cdot H) = - \frac{(\lambda^4 - k_0^4)(\lambda^2 - k^2) - \nu \kappa^{-1} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\kappa^{-1}(\lambda^4 - k_0^4) \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \nu} \quad (5.2)$$

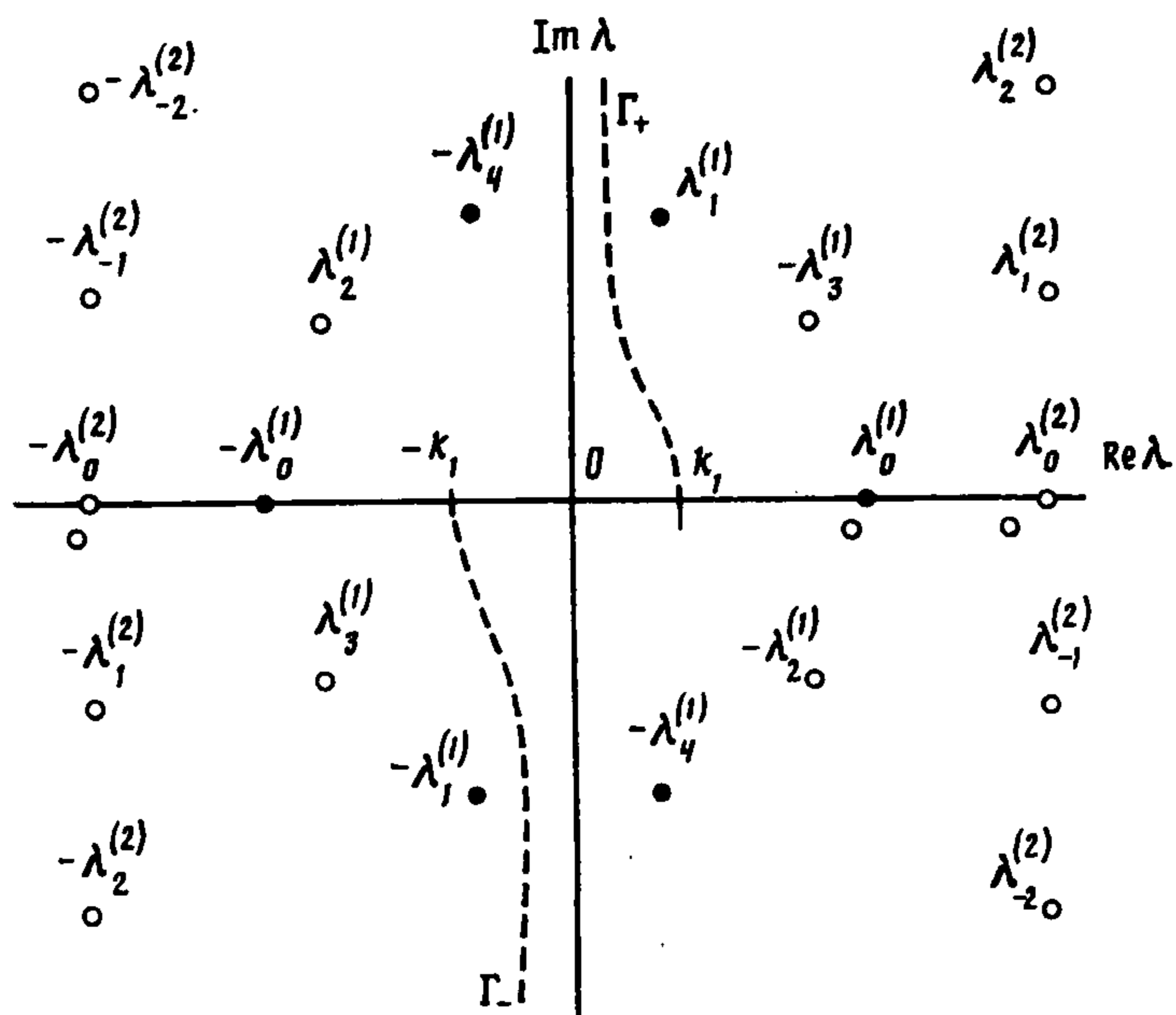
Введем параметр $\varepsilon = (kh)^{3/2} H/h$. Пусть $\varepsilon \ll 1$. Тогда с использованием элементарной теории возмущений можно найти асимптотики двух серий корней дисперсионного уравнения ($\nu_0 = \nu (kh)^{-2}$)

$$\lambda_l^{(1)} \sim \pm h^{-1} (kh)^{3/2} (\nu_0 \kappa)^{1/2} e^{2\pi i l/5}, \quad 0 \leq l \leq 4 \quad (5.3)$$

$$\lambda_l^{(2)} \sim \pm \left(\frac{1}{2H} \ln \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) + \frac{\pi i l}{H} \right), \quad |l| < \infty \quad (5.4)$$

Корни $\lambda_l^{(1)}$ при $kh \rightarrow 0$ располагаются в вершинах правильного пятиугольника, причем $\pm \lambda_0^{(1)}$ соответствует поверхностному волновому процессу. Корни $\lambda_l^{(2)}$ — резонансы волновода (вещественных собственных чисел волноводов при $\varepsilon \ll 1$ нет).

На фигуре темными точками изображены собственные числа, лежащие на физическом листе римановой поверхности, светлыми точками — лежащие на нефизическом ее листе, Γ_{\pm} (штриховые линии) — разрезы для $(\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}$.



Будем вычислять интегралы I_4 и I_6 по вычетам согласно (4.2). Элементарные выкладки показывают, что при $kh \rightarrow 0$, $\varepsilon \ll 1$ на старший член асимптотики этих интегралов оказывают влияние только вычеты в полюсах $\lambda = \lambda_l^{(1)}$ (полюса $\lambda = \lambda_l^{(2)}$ имеют порядок $(kh)^{-\delta}$, $\delta \geq 0$, и вычеты в них малы по сравнению с вычетами в полюсах $\lambda = \lambda_l^{(1)}$).

Таким образом, старшие члены асимптотик интегралов, входящих в представление рассеянного поля g_1 , совпадают со старшими членами аналогичных интегралов в случае однородной среды. Таким образом, тонкий водный слой ($\varepsilon \ll 1$) не сказывается на рассеянном поле в старшем порядке. В частности, старший член асимптотики поля, возбужденного падающей из однородного дна плоской волной, совпадает с приведенным в [1].

Очевидно, что характер зависимости параметров слоя от глубины при этом несуществен.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим дисперсионное уравнение (5.2), левая часть которого должна быть заменена логарифмической производной некоторого решения (2.2). При $\lambda = 0$ (k) эта производная имеет порядок единицы и, следовательно, асимптотики $\lambda_l^{(1)}$ как асимптотики корней знаменателя правой части сохраняются. Корни $\lambda_l^{(2)}$ имеют прежний порядок, и вычеты в них не сказываются на старших членах I_4 и I_6 .

При $kH \gg 1$ имеется некоторое число L вещественных собственных чисел волновода $\pm \lambda_l^{(2)}$ ($0 \leq l < L$), лежащих на интервалах $[k_1, k]$ и $[-k, -k_1]$, и четыре серии комплексных корней $\pm \lambda_l^{(2)}$ ($|l| \geq L$), уходящих из точек $\lambda = \pm k_1$ на бесконечность. Асимптотика этих корней по номеру l имеет вид (5.4). Корни $\lambda_l^{(1)}$ уже не описываются асимптотикой (5.3). Можно лишь утверждать, что $\lambda_0^{(1)}$ оказывается правее k при $kh \rightarrow 0$. В этой области параметров необходим численный анализ.

6. Разрешимость ГКС (3.2) и, следовательно, при учете явно выписанного решения (2.1), (2.5), (2.6) теорема существования и единственности решения ГКЗ (1.1) — (2.4) доказываются аналогично указанному в [6].

Уточним принцип излучения, указав асимптотики решения на бесконечности. Поле представляется в виде суммы поверхностного (волноводного) процесса g^\pm и расходящейся в дне цилиндрической волны g_c , асимптотики которых имеют вид

$$g^\pm = \sum_{l=0}^L \alpha_l^\pm e^{i\lambda_l |x|} \psi_l(z) \quad (1 + O(|x|^{-1/2})), \quad x \rightarrow \pm \infty$$

$$g_c = \sqrt{2\pi/k_1 r} \Phi(\varphi) e^{ik_1 r} + o(r^{-1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + (z - H)^2} \rightarrow \infty$$

где α_l^\pm — амплитуды нормальных волн, распространяющихся в волноводе влево и вправо от области пластины, занятой неоднородностями, $\Phi(\varphi)$ — диаграмма направленности цилиндрической волны.

На первом этапе доказательства при помощи первой формулы Грина для решения u однородной ГКЗ в области $\Omega_{R, \delta}$, образованной дугой окружности $S_R = \{x^2 + (z - H)^2 = R^2\}$ в дне, отрезками $\{x = \pm R, 0 < z < H\}$ и пластиной, неоднородности которой обходятся по дугам $S_\delta^n = \{(x - a_n)^2 + z^2 = \delta^2, z > 0\}$, устанавливается отсутствие энергоносных составляющих поля на бесконечности

$$\alpha_l^\pm = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L; \quad \Phi(\varphi) = 0 \quad (6.1)$$

При доказательстве этого утверждения используется свойство ортогональности собственных функций спектральной задачи (2.2), (2.3) (δ_p^q — символ Кронекера)

$$\int_0^H \psi_p(z) \bar{\psi}_q(z) dz + \frac{\lambda_p^2 + \lambda_q^2}{\nu} \psi_p'(0) \bar{\psi}_q'(0) +$$

$$+ \kappa^{-1} (\sqrt{\lambda_p^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda_q^2 - k_1^2})^{-1} \psi_p(H) \bar{\psi}_q(H) = \delta_p^q \quad (6.2)$$

Далее рассматриваются два случая. 1. Определитель ГКС отличен от нуля. Тогда существует функция Грина g . Применяя к ней и предполагаемому решению однородной задачи u вторую формулу Грина, устанавливаем единственность решения (решение однородной ГКЗ тождественно равно нулю). 2. Если же определитель ГКС равен нулю, построим поле u по существующему ненулевому решению c_{nj} однородной ГКЗ. Вычисляя диаграмму направленности этого решения

$$\Phi(\varphi) = e^{-i\pi/4} \frac{k_1 \sin \varphi}{l(k_1 \cos \varphi)} c_{nj} e^{ik_1 a_n \cos \varphi} (k_1 \cos \varphi)^j$$

в виде того, что не все постоянные c_{nj} равны нулю, приходим к противоречию с (6.1).

Таким образом, решение ГКС, а следовательно, и ГКЗ существует и единственно.

7. Пусть из дна под углом φ_0 падает плоская волна. Выкладки, аналогичные проведенным в работах, указанных в сносках 1 и 2, приводят к следующему выражению эффективного сечения рассеяния этой волны на бесконечной пластине с произвольными локальными непоглощающими неоднородностями, покрывающей звуковой канал:

$$\sigma = \frac{2\pi}{k_1} \int_0^\pi |\Phi(\varphi, \varphi_0)|^2 d\varphi + \frac{1}{k_1} \sum_{l=0}^L (|\alpha_l^+|^2 + |\alpha_l^-|^2) \lambda_l \quad (7.1)$$

При выводе равенства (7.1) использовалось свойство нормировки собственных функций «глубинной» задачи (6.2). С другой стороны, поперечник рассеяния выражается через коэффициент отражения

$$R(\varphi) = R^-(\varphi)/R^+(\varphi), \quad R^\pm = \psi_0(H, k_1 \cos \varphi) \sin \varphi \pm \kappa^{-1} \psi_0'(H, k_1 \cos \varphi)$$

и значение диаграммы Φ в направлении отраженной волны

$$\sigma = -4\pi k_1^{-1} \operatorname{Re}(\bar{R}(\varphi_0) \Phi(\pi - \varphi_0, \varphi_0)) \quad (7.2)$$

Формулы (7.1), (7.2) в совокупности носят название оптической теоремы и могут служить контролем точности вычислений.

8. Одним из вариантов процедуры вычисления поля g полученным выше формулам является следующий: краевая задача (2.2), (2.3) заменяется системой сеточных уравнений [7]

$$\psi(z_{i+1}) - (2 + (\lambda^2 - k^2(z_i))d^2)\psi(z_i) + \psi(z_{i-1}) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, I-1 \quad (8.1)$$

где шаг сетки $d = H/I$ выбирается так, чтобы на период осцилляции собственной функции приходилось 10...15 узлов $z_i = id$. Первое и последнее уравнения сеточной системы отличаются от (8.1) и учитывают граничные условия (2.3). После избавления от радикала $(\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}$ в определителе этой системы получим полином, корни которого приближенно совпадают с собственными числами «глубинной» задачи, лежащими на обоих листах римановой поверхности. Для нахождения этих корней можно воспользоваться стандартной итерационной процедурой. Собственные функции ψ_l — решения сеточной системы при уже известных λ_l вычисляются по трехчленным рекуррентным формулам. Для вычисления производных $\partial\psi_0'(H, \lambda_l)/\partial\lambda$ и $\partial\psi_0(H, \lambda_l)/\partial\lambda$, входящих в формулу (4.3), эти рекуррентные формулы следует продифференцировать, что приводит к неоднородной сеточной системе с прежней матрицей.

Интегралы I_{2p} вычисляются по формуле (4.2). Поскольку ряды (4.2) сходятся медленно, приходится суммировать большое число членов. Для ускорения вычислений, начиная с некоторого номера l^* , следует суммировать асимптотики.

Сравнение значений I_3 и I_5 , вычисленных по формуле (4.1), с известными значениями (4.4) служит контролем точности вычислений. Другим контрольным тождеством является оптическая теорема (7.1), (7.2).

Если расстояние между источником (x_0, z_0) , неоднородностями $(a_n, 0)$ и точкой наблюдения (x, z) велики, то интегралы I_{mnj}^\pm ($m \neq n$), J_{ms} , g_0 можно заменить суммами вычетов в вещественных полюсах $\lambda = \lambda_l$. В результате поле g представляется суммой нормальных волн, распространяющихся в канале без затухания

$$g(x, z) \approx \sum_{l=0}^L \alpha_l(x_0, z_0) \exp(i\lambda_l x) \psi_l(z) \quad (8.2)$$

Погрешность такого представления связана с пренебрежением вкладами комплексных полюсов ($\text{Im } \lambda_l > 0$), которые экспоненциально убывают с расстоянием, и вкладом боковой волны (интеграл по разрезу), убывающим как $O(|x|^{-1/2})$. Если же расстояния между дефектами пластины малы, необходимо учитывать комплексные полюсы и интегралы по разрезу от экспоненциально убывающих функций. Заметим, что неоднородности, расстояния между которыми много меньше длины волны в полупространстве, могут быть заменены еще на стадии постановки задачи одной точечной неоднородностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037—1043.
2. Коузов Д. П. О явлении резонанса при дифракции гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 409—417.
3. Коновалюк И. П. Дифракция плоской волны на бесконечной пластине, подкреплённой ребрами жесткости // Акуст. журн. 1968. Т. 14. Вып. 4. С. 554—560.
4. Mace V. R. Periodically stiffened fluid-loaded plates, I: Response to convected harmonic pressure and free propagation // J. Sound and Vibrat. 1980. V. 73. No 4. P. 473—486.
5. Коузов Д. П., Лукьянов В. Д. О волнах, распространяющихся вдоль кромок пластин // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 549—555.
6. Белинский Б. П. О единственности решения гранично-контактных задач акустики // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. 1983. № 13. Вып. 3. С. 5—10.
7. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.V.1988