Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 532.51

Б. Ю. Скобелев

КОНЕЧНОМЕРНАЯ ИНВАРИАНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

Развивается метод нахождения конечномерной проекции уравнений Навье — Стокса на инвариантные притягивающие многообразия. В частности, проекция на двумерное многообразие дает амплитудное уравнение, аналогичное рассмотренному Л. Д. Ландау [1]

$$\frac{dA}{dt} = A\left(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}A^{2n}\right) \tag{0.1}$$

с аналитическим рядом по степеням A. Предлагаемый метод дает возможность исследовать развитие квазипериодических нелинейных возмущений и возникновение стохастических режимов в конкретных гидродинамических течениях.

Известно, что характеристики начальной стадии турбулентности во многом определяются поведением нелинейных возмущений в исходном потоке. Начиная с работы [1], основным объектом изучения нелинейной теории гидродинамической устойчивости является уравнение для амплитуды возмущения (0.1). Был предложен [2] метод нахождения коэффициента b_2 для плоскопараллельных течений при малых значениях γ, получивший дальнейшее развитие [3, 4].

Для другого класса нелинейных возмущений [5] путем замены переменной времени удалось просуммировать бесконечный ряд в амплитудном уравнении и найти явную зависимость амплитуды возмущения от времени. Анализ области существования этих решений [6] показал, что они могут быть реализованы при $|\gamma| > 0$.

С нелинейной теорией гидродинамической устойчивости тесно связана теория бифуркаций уравнений Навье — Стокса [7—9]. Амплитуды неустойчивых периодических режимов теории бифуркаций соответствуют пороговым режимам для начальных возмущений, а устойчивые периодические режимы описывают предельные течения, сформированные нарастающими возмущениями. В теории бифуркаций получены условия существования и единственности периодических режимов и развит метод нахождения амплитуд автоколебаний в виде аналитических рядов. Численные расчеты на основе этого метода [10, 11] дали строгое обоснование докритической неустойчивости течения Пуазейля.

Был развит [12] асимптотический метод, позволяющий однозначно определить любые коэффициенты b_{2n} в уравнении (0.1). Численный расчет коэффициентов b_2 и b_4 показал [6, 13], что в докритической области у течения Пуазейля наряду с неустойчивым режимом может существовать устойчивый автоколебательный режим, на который выходят нарастающие нелинейные возмущения.

1. Инвариантные притягивающие многообразия. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$. Скорость течения $v(x, t)$ и давление $p(x, t)$ определяются уравнениями Навье — Стокса

$$\partial v/\partial t + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \nu\Delta v + f, \quad \nabla\cdot v = 0 \tag{1.1}$$

Предположим, что при заданных граничных условиях существуют стационарные решения (v_0, p_0) системы (1.1) и будем искать решения вида

$$v(x, t) = v_0(x) + u(x, t), \quad p(x, t) = p_0(x) + q(x, t)$$

Введем гильбертовы пространства

$$H = \{u \in [L_2(\Omega)]^3;\ \nabla\cdot u = 0,\ u\cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$
$$K = \{u \in [W_2^1(\Omega)]^3;\ \nabla\cdot u = 0,\ u\cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$
$$T = \{u \in [W_2^2(\Omega)]^3;\ \nabla\cdot u = 0,\ u\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$

где $W_l^m(\Omega)$ — пространства Соболева. Тогда (см., например, [14]) задача на отыскание (u, q) сводится к дифференциальному уравнению с замкнутыми неограниченными операторами в гильбертовом пространстве H

$$du/dt = -L_\nu u + N(u; \nu) \tag{1.2}$$
$$(L_\nu u = -\Pi(\nu\Delta u - v_0\cdot\nabla u - u\cdot\nabla v_0),\quad N(u) = -\Pi u\cdot\nabla u)$$

где L_ν — линейный оператор с областью определения T, Π — ортогональный проектор на H в $[L_2(\Omega)]^3$. Нелинейный оператор N действует из T в K и в данном случае не зависит от параметра ν.

Рассмотрим общий случай уравнения (1.2) в некотором гильбертовом пространстве. Предположим, что операторы L_ν, N удовлетворяют следующим условиям.

1°. $N(0; \nu) = N_u(0; \nu) = 0,\quad \nu \in V \subset R^m$.

2°. Область определения $D(L)$ оператора L_ν не зависит от ν.

3°. Собственные значения L_ν лежат внутри сектора $|\arg(\zeta + a_\nu)| \leqslant \theta < \pi/2$, $a_\nu \geqslant 0$, а для резольвенты $R_\nu(\zeta)$ оператора $(-L_\nu)$ справедлива оценка

$$\|R_\nu(\zeta)\| \equiv \|(L_\nu + \zeta)^{-1}\| \leqslant M_\varepsilon / |\zeta - a_\nu|,\quad |\arg(\zeta - a_\nu)| \leqslant \pi - \theta - \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0$$

Из условия 3° следует, что оператор $(-L_\nu)$ является производящим оператором аналитической полугруппы [15]. Кроме того, существует дробная степень оператора $(-L_\nu, -a_\nu)$: $(-L_\nu - a_\nu)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $D[(-L_\nu - a_\nu)^\alpha] \supset D(L_\nu)$.

Введем нормы

$$\|u\|_1 = \|u\| + \|(L_\nu + a_\nu)u\|,\quad u \in D(L)$$
$$\|u\|_\alpha = \|u\| + \|(-L_\nu - a_\nu)^\alpha u\|,\quad u \in D[(-L_\nu - a_\nu)^\alpha]$$

Тогда множества $D(L)$ и $D[(-L_\nu - a_\nu)^\alpha]$ становятся банаховыми пространствами D и D_α соответственно.

4°. Оператор $N(u; \nu)$ имеет область определения, не зависящую от ν, и является отображением D в D_α при некотором α. Это отображение имеет производную $N_u(u; \nu)$, удовлетворяющую условию Липшица.

5°. Спектр $\sigma(u)$ оператора $(-L_\nu)$ допускает разбиение: $\sigma(\nu) = \sigma_1(\nu) \cup \sigma_2(\nu)$, $\sigma_1(\nu) \cap \sigma_2(\nu) = \varnothing$, где $\sigma_1(\nu)$ — ограниченная часть спектра ($\sigma_1(\nu)$ лежит внутри замкнутой кривой).

6°. Имеют место неравенства

$$\varkappa_\nu \geqslant \delta_1 > 0,\quad \varkappa_\nu - q_\nu \geqslant \delta_2 > 0,\quad \nu \in V$$
$$(\varkappa_\nu = -\sup_{\zeta\in\sigma_2(\nu)} \operatorname{Re}\zeta,\ q_\nu = -\inf_{\zeta\in\sigma_1(\nu)} \operatorname{Re}\zeta)$$

где δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Все условия 1°—6° выполняются для уравнений Навье — Стокса. При этом $\alpha < {}^1/_4$.

Будем исследовать классические решения начальной задачи для уравнения (1.2)

$$u(0) = u_0 \in D(L) \tag{1.3}$$
$$u \in C^0(0, \infty; D(L)) \cap C^1(0, \infty; H)$$

Согласно условию 5° существует проекционный оператор P_ν, такой что пространство H представимо в виде прямой суммы ортогональных подпространств

$$H = P_\nu H \oplus (I - P_\nu) H$$

Оператор $(-L_1) = -P_\nu L_\nu$ действует в подпространстве $P_\nu H$, ограничен и его спектр равен $\sigma_1(\nu)$. Спектр неограниченного оператора $(-L_2) = -(I - P_\nu) L_\nu$ равен $\sigma_2(\nu)$. Уравнение (1.2) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$dy/dt = -L_1 y + N_1(y + z; \nu), \quad dz/dt = -L_2 z + N_2(y + z; \nu) \quad (1.4)$$

$$u = y + z, \quad y = P_\nu u, \quad z = (I - P_\nu) u; \quad N_1 = P_\nu N, \quad N_2 = (I - P_\nu) N$$

Локально инвариантным многообразием (ЛИМ) $M \subset D$ уравнения (1.2) будем называть график функции $z = Z(y)$ $(M = \{y, Z(y)\})$, такой, что

$$u(t) = y(t) + Z(y(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

если $u(0) = y(0) + Z(y(0))$, и $\| y \|_1 < \rho$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (ρ — некоторая постоянная).

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1°—6°. Тогда у уравнения (1.2) существует ЛИМ

$$M = \{(y, z);\ z = Z(y),\ Z(0) = 0\}$$

Функция $Z(y)$ определена в шаре $\| y \|_1 < \rho$, удовлетворяет условию Липшица, и $\| Z(y) \|_1 < \rho$.

Найдутся такие положительные величины b_1, b_2, что справедлива оценка

$$\rho + \rho^{1/\alpha} < \begin{cases} b_1(\varkappa_\nu - q_\nu), & q_\nu \geqslant 0 \\ b_2 \varkappa_\nu, & q_\nu < 0 \end{cases}$$

Любое глобальное решение задачи (1.2), (1.3), у которого

$$\| P_\nu u(t) \|_1 < \rho, \quad t \in [0, \infty); \quad \| (I - P_\nu) u(0) \|_1 < \rho$$

притягивается многообразием M, т. е. найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\| Z(P_\nu u(t)) - (I - P_\nu \mid u(t)) \|_1 \leqslant \mathrm{const} \| Z(y_0) - z_0 \|_1 \exp(-\gamma t)$$
$$t \to \infty, \quad y_0 = P_\nu u(0), \quad z_0 = (I - P_\nu) u(0)$$

Ниже описывается схема доказательства [1]. Сделаем в уравнениях (1.4) замену переменных $y \to \rho y$, $z \to \rho z$ $(\rho > 0)$ и оператора $N \to \bar{N}$, где

$$\bar{N}(y + z;\ \nu) = N_\rho(\chi(y) + z;\ \nu), \quad N_\rho(u;\ \nu) = \rho^{-1} N(\rho u;\ \nu)$$

$\chi(y)$ — некоторая нормирующая функция в $P_\nu D$: $\chi(y) = y$ при $\| y \|_1 \leqslant 1$

$$\| \chi(y) \|_1 \leqslant k_1, \quad \| \chi(y_1) - \chi(y_2) \|_1 \leqslant k \| y_1 - y_2 \|_1$$

Интегральным многообразием преобразованной системы (1.4) будем называть некоторое множество в произведении $[0, \infty) \times D$, составленное из интегральных кри-

[1] Полное доказательство см.: *Скобелев Б. Ю.* Аналитическая проекция нелинейных эволюционных уравнений на конечномерные инвариантные многообразия. Препринт № 22—86. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1986. 31 с.

вых этой системы [16]. Рассмотрим интегральные многообразия $\overline{M}(z_0)$, описываемые уравнениями вида

$$z = f(t, y; z_0), \quad \| f(t, y_1; z_0) - f(t, y_2; z_0) \|_1 \leqslant \eta \| y_1 - y_2 \|_1$$

Многообразие $\overline{M}(z_0)$ содержит интегральные кривые с фиксированным начальным значением $z = z_0$. При заданных ρ и $z = f(t, y; z_0)$ первое уравнение преобразованной системы имеет единственное глобальное решение

$$y(t) = Y(t, \tau, y; f), \quad t, \tau \in [0, \infty)$$

удовлетворяющее условию $y(\tau) = y$. Из второго уравнения преобразованной системы (1.4) получаем следующее интегрофункциональное уравнение для определения $f(\tau, y; z_0)$

$$f(\tau, y; z_0) = V_2(\tau) z_0 + \int_0^\tau V_2(\tau - t) \overline{N}_2 [Y(t, \tau, y; f) +$$
$$+ f(t, Y(t, \tau, y; f); z_0] \, dt, \quad V_2(t) = \exp(-L_2 t), \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{1.5}$$

С помощью принципа сжатых отображений доказывается существование и единственность решения уравнения (1.5) при условии, что параметр ρ удовлетворяет неравенству, приведенному в теореме, а z_0 принадлежит шару $\| z_0 \|_1 < 1$. Так же доказывается, что $\| f \|_1 < 1$ при $t > t_0(z_0)$, а многообразия $\overline{M}(z_0)$ с различными z_0 экспоненциально сближаются при $t \to \infty$. На следующем этапе устанавливается, что все многообразия $\overline{M}(z_0)$ стремятся к единственному предельному многообразию $\overline{M}$, которое является инвариантным для преобразованной системы (1.4). Из способа построения оператора $\overline{N}$ видно, что каждой траектории системы (1.4) с $\| y \|_1 < \rho$ соответствует траектория преобразованной системы с $\| y \|_1 < 1$. Поэтому наличие инвариантного многообразия $\overline{M}$ гарантирует существование локально инвариантного многообразия M у уравнения (1.2). В общем случае многообразие M неединственно ввиду произвола в выборе нормирующего преобразования $\chi(y)$.

Из теоремы 1 следует, что изучение траекторий эволюционного уравнения с неограниченными операторами (1.2) можно свести к анализу траекторий эволюционного уравнения с ограниченными операторами L_1 и $N_1(y + Z(y))$. Если же спектр σ_1 состоит из конечного числа изолированных собственных значений, то задача сводится к исследованию конечномерной динамической системы.

Другие результаты относительно ЛИМ приведены в [17, 18].

2. Аналитическая проекция на конечномерные инвариантные многообразия. Для нахождения проекции исходного эволюционного уравнения на инвариантное многообразие (ИМ) при решении конкретных задач сформулируем дополнительные условия на операторы L_ν и N.

7°. Нелинейный оператор $N(u; \nu)$ является аналитическим оператором, действующим из $D \times V$ в H.

8°. Вектор $L_\nu u$ аналитически зависит от $\nu \in V$ при любом $u \in D$.

9°. Ограниченная часть спектра $\sigma_1(\nu)$ состоит из n пар простых изолированных собственных значений $(\lambda_1, \overline{\lambda}_i)$

$$\lambda_i(\nu) = \gamma_i(\nu) + i\omega_i(\nu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \omega_i(\nu) > 0, \quad \forall \nu \in V$$

Если при целом $k \geqslant 0$ имеет место равенство $k\omega_1(\nu_0) = \omega_{i_0}(\nu_0)$, то $\gamma_{i_0}(\nu_0) \neq 0$.

Обозначим $P^{(i)}$ проектор на собственное пространство оператора $(-L_\nu)$, отвечающее паре собственных значений $(\lambda_i, \overline{\lambda}_i)$

$$P^{(i)} u = (u, \psi_i)_H \, \varphi_i + (u, \overline{\psi}_i)_H \, \overline{\varphi}_i \equiv y_i, \quad (\varphi_i, \psi_i)_{\overline{H}} = 1$$

где φ_i — собственная функция оператора $(-L_\nu)$, ψ_i — собственная функция сопряженного оператора $(-L_\nu^*)$, $(\cdot, \cdot)_H$ — скалярное произведение в комплексификации вещественного пространства H. Система уравнений

(1.4) принимает вид

$$dy_i/dt = -L^{(i)}y_i + N^{(i)}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n + z), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$dz/dt = -L_2 z + N_2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n + z); \quad L^{(i)} = P^{(i)}L, \ N^{(i)} = P^{(i)}N \qquad (2.1)$$

Введем в подпространствах $P^{(i)}H$ полярные системы координат и будем искать решение системы уравнений (2.1) в виде

$$y_i = 2\operatorname{Re}(r_i' \exp(i\theta_i)\varphi_i) = 2\operatorname{Re}(r_i \exp(i\theta_i)\varphi_i) + Y_i(r_1, \ldots, r_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \quad z = Z(r_1, \ldots, r_n, \theta_1, \ldots, \theta_n) \qquad (2.2)$$

где Z, Y_i — 2π-периодические функции переменных $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Положим

$$dr_i/dt = (\gamma_i + b^{(i)})r_i, \quad d\theta_i/dt = \omega_i + c^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.3)$$

где $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ — некоторые функции, зависящие только от координат r_i, θ_i. Динамическая система (2.3) будет определять поведение траекторий исходного уравнения (2.2) на $2n$-мерном ИМ. Предположим, что

$$\omega_1 + c^{(1)} \neq 0, \quad \forall\nu \in V \qquad (2.4)$$

Тогда фазовые траектории системы (2.3) определяются нормальной системой вида

$$\frac{dr_i}{d\theta_1} = \frac{(\gamma_i + b^{(i)})r_i}{\omega_1 + c^{(1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.5)$$
$$\frac{d\theta_i}{d\theta_1} = \frac{\omega_i + c^{(i)}}{\omega_1 + c^{(1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

Пусть τ — фиксированный момент времени, а t — текущее время. Рассмотрим функции, устанавливающие связь между двумя точками траектории $(r(\tau), \theta(\tau))$ и $(r(t), \theta(t))$

$$r_i(\tau) = R_i^\circ(\theta_1(\tau); r_1(t), \ldots, r_n(t), \theta_1(t), \ldots, \theta_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.6)$$
$$\theta_i(\tau) = \Theta_i^\circ(\theta_1(\tau); r_1(t), \ldots, r_n(t), \theta_1(t), \ldots, \theta_n(t)), \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

Функции R_i°, Θ_i° удовлетворяют системе (2.5) и являются автономными интегралами системы (2.3). Будем считать, что функции, определяющие ИМ, зависят от r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и θ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ через интегралы движения (2.6)

$$Y_i = Y_i^\circ(\theta_1(t); r_1(\tau), \ldots, r_n(\tau), \theta_2(\tau), \ldots, \theta_n(\tau)) \qquad (2.7)$$
$$Z = Z^\circ(\theta_1(t); r_1(\tau), \ldots, r_n(\tau), \theta_2(\tau), \ldots, \theta_n(\tau))$$

Подставим (2.2), (2.7) в уравнения (2.1), учтем, что Y_i°, Z° зависят от t только через координату θ_1, а производные от $r_i(t)$ и $\theta_i(t)$ имеют вид (2.3). Получим

$$\omega_1 \frac{\partial Y_i^\circ}{\partial\theta_1} + L^{(i)}Y_i^\circ = -c_t^{(1)} \frac{\partial Y_i^\circ}{\partial\theta_1} + N^{(i)} - 2\operatorname{Re}\left[(b_t^{(i)} + ic_t^{(i)})r_i(t)\exp(i\theta_i(t))\varphi_i\right]$$
$$\omega_1 \frac{\partial Z^\circ}{\partial\theta_1} + L_2 Z^\circ = -c_t^{(1)} \frac{\partial Z^\circ}{\partial\theta_1} + N_2 \qquad (2.8)$$

(индекс t означает, что $b_t^{(i)}$, $c_t^{(i)}$ — функции $r_i(t)$ и $\theta_i(t)$). Положим в уравнениях (2.8) $t = \tau$ и введем обозначения

$$Y_i^\circ(\theta_1(\tau); r_1(\tau), \ldots, r_n(\tau), \theta_2(\tau), \ldots, \theta_n(\tau)) = Y_i^*(r_1, \ldots, r_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)$$
$$Z^\circ(\theta_1(\tau); r_1(\tau), \ldots, r_n(\tau), \theta_2(\tau), \ldots, \theta_n(\tau)) = Z^*(r_1, \ldots, r_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)$$

Теперь все функции в уравнениях (2.8) зависят от координат r_i, θ_i, взятых в один и тот же момент времени τ. Запишем систему (2.8) в виде одного уравнения для функции

$$g^* = \sum_{i=1}^{n} Y_i^* + Z^*$$

имеем

$$\omega_1 \frac{\partial g^*}{\partial \theta_1} + L_\nu g^* = - c^{(1)} \frac{\partial g^*}{\partial \theta_1} + N - \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,[(b^{(i)} + ic^{(i)})\, r_i \exp(i\theta_i)\, \varphi_i] \quad (2.9)$$

Будем искать решение уравнения (2.9) в классе 2π-периодических функций от θ_i, удовлетворяющих условиям ортогональности вида

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i\theta_i)\,(g^*, \psi_i)_H\, d\theta_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.10}$$

Очевидно, что множество функций, удовлетворяющих условиям (2.10), инвариантно относительно оператора $\omega_1 \partial/\partial\theta_1 + L_\nu$. Поэтому правая часть уравнения (2.9) также должна удовлетворять условиям (2.10). Это требование дает систему уравнений для $b^{(i)}$, $c^{(i)}$

$$b^{(i)} = \frac{1}{2\pi r_i}\,\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \left(N - c^{(1)} \frac{\partial g^*}{\partial \theta_1}, \psi_i\right)_H \exp(-i\theta_i)\, d\theta_i \tag{2.11}$$

$$c^{(i)} = \frac{1}{2\pi r_i}\,\mathrm{Im} \int_0^{2\pi} \left(N - c^{(1)} \frac{\partial g^*}{\partial \theta_1}, \psi_i\right)_H \exp(-i\theta_i)\, d\theta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Справедлива следующая лемма (ее доказательство приведено в работе, цитированной в сноске на с. 418).

Лемма 1. Найдутся такое число $\rho_1 > 0$ и такое множество $V_0 \subset V$, что при $|r| < \rho_1$ ($|r| = r_1 + \ldots + r_n$), $\nu \in V_0$ задача (2.9)—(2.11) имеет единственное решение $g^* \in D$, аналитическое по r_i, ν и 2π-периодическое класса C^2 по θ_i, причем $\| g^* \|_1 = O(|r|^2)$, $r \to 0$. Уравнения (2.11) однозначно определяют $b^{(i)}(r; \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n)$, $c^{(i)}(r; \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n)$, которые являются аналитическими функциями от r_i и 2π-периодическими функциями класса C^2 от θ_i.

Как следует из леммы 1, система уравнений (2.9), (2.11) и условие (2.10) определяют проекцию уравнения (1.2) на $2n$-мерные ИМ и некоторое вспомогательное многообразие M_{2n}^*, задаваемое функцией g^*. Заметим, что функции Y_i^* задают в подпространстве $P_\nu H$ преобразование координат вида $\theta_i' = \theta_i$, $r_i' = \varphi_i(r, \theta)$.

Рассмотрим вид $2n$-мерных ИМ, на которых поведение траекторий определяется динамической системой (2.3), (2.11). Положим

$$g = \sum_{i=1}^{n} Y_i + Z$$

Тогда из формул (2.1)—(2.3) следует, что ИМ определяются уравнением

$$dg/dt = -L_\nu g + N - \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,[(b^{(i)} + ic^{(i)})\, r_i \exp(i\theta_i)\, \varphi_i] \tag{2.12}$$

Зафиксируем некоторый момент времени $t = \tau$ и будем искать решение уравнения (2.12), удовлетворяющее условию

$$g_\tau(r(\tau), \theta(\tau)) = g^*(r(\tau), \theta(\tau)) \tag{2.13}$$

Рассмотрим разность

$$w_\tau(t) = g_\tau(r(t), \theta(t)) - g^*(\theta_1(t); r(\tau), \theta^-(\tau)) \quad (\theta^- = (\theta_2, \ldots, \theta_n))$$

Очевидно, что $w_\tau(\tau) = 0$. Из уравнений (2.12), (2.9) можно получить интегральное уравнение для функции $w_\tau(r(t), \theta(t))$, $t \geqslant \tau$

$$w_\tau(r, \theta) = \int_{-T}^{0} V(-p) \{N[Y(R(p; r, \theta), \Theta(p; r, \theta)) + g^*(\Theta_1(p; r, \theta); R(-T; r, \theta), \Theta^-(-T; r, \theta)) + \omega_\tau(R(p; r, \theta), \Theta(p; r, \theta))] - N[Y(\Theta_1(p; r, \theta); R(-T; r, \theta), \Theta^-(-T; r, \theta)) + g^*(\Theta_1(p; r, \theta); R(-T; r, \theta), \Theta^-(-T; r, \theta))] - Q(R(p; r, \theta), \Theta(p; r, \theta)) + Q(\Theta_1(p; r, \theta); R(-T; r, \theta), \Theta^-(-T; r, \theta))\} \, dp \tag{2.14}$$

$$T = t - \tau, \quad V(t) = \exp(-L_\nu t), \quad Y(r, \theta) = \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,(r_i \exp(i\theta_i)\, \varphi_i)$$

$$Q(r, \theta) = \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,[(b^{(i)} + ic^{(i)})\, r_i \exp(i\theta_i)\, \varphi_i]$$

Через $R(s; r, \theta)$, $\Theta(s; r, \theta)$ обозначены решения системы (2.3) с начальными условиями $R(0; r, \theta) = r$, $\Theta(0; r, \theta) = \theta$.

При помощи принципа сжатых отображений и леммы 1 можно доказать, что уравнение (2.14) имеет единственное решение, если выполнены условия: $|r| < \rho_2$, $t \in [\tau, \tau + T_0]$, где $\rho_2 < \rho_1$, T_0 — некоторые постоянные. Дифференцируя уравнение (2.14) по t и учитывая, что $R(-T; r, \theta) = r(\tau)$, $\Theta(-T; r, \theta) = \theta(\tau)$, получим $\partial\omega_\tau/\partial t = 0$, т. е. ω_τ зависит от времени только через функции $r(t)$, $\theta(t)$. Поэтому решение $\omega_\tau(r(t), \theta(t))$ существует на всем интервале времени $[\tau, \tau + T^*]$, на котором $|z(t)| < \rho_2$. Функция $\omega_\tau(r, \theta)$ принадлежит классу C^1 и является 2π-периодической функцией θ_i. Кроме того, $\omega_\tau(0, \theta) = 0$ и $\| D_{r,\theta}, \omega_\tau \|_1 \leqslant \varepsilon(|r|)$, $\varepsilon(|r|) \to 0$ при $|r| \to 0$ ($D_{r,\theta}\omega_\tau$ — производная функции $\omega_\tau(r, \theta)$).

Из сказанного выше следует, что уравнение (2.12) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (2.13)

$$g_\tau(r(t), \theta(t)) = g^*(\theta_1(t); r(\tau), \theta^-(\tau)) + \omega_\tau(r(t), \theta(t))$$

Воспользуемся автономными интегралами (2.6) и обозначим параметр $\theta_1(\tau)$ через χ. Тогда можно утверждать, что эволюционное уравнение (1.2) имеет однопараметрическое семейство ЛИМ $M_{2n}(\chi)$, определяемых функцией

$$g_0(r, \theta; \chi) = g^*(\theta_1; R^\circ(\chi; r, \theta), \Theta_2^\circ(\chi; r, \theta), \ldots, \Theta_n^\circ(\chi; r, \theta)) + \omega(r, \theta; \chi)$$

$$g_0 |_{\theta_1 = \chi} = g^*$$

Очевидно, что

$$\| D_{r,\theta} g_0 \|_1 \leqslant \varepsilon(|r|); \quad \varepsilon(|r|) \to 0, \quad |r| \to 0$$

Поэтому при достаточно малых $|r|$ функция $Y_0^\circ(r, \theta; \chi) = P_\nu g_0$ задает взаимно однозначное преобразование координат $r \to \varphi(r, \theta)$ в подпространстве $P_\nu H$. Если еще учесть, что функция g_0 получена при ограничениях: $|r| < \rho_2$, $|R^\circ| < \rho_2$, то область существования ЛИМ будет определяться неравенствами (K — некоторая постоянная)

$$|r| < \rho_0 \leqslant \rho_2, \quad 0 \leqslant \theta_1 - \chi < K, \quad -\infty < \chi < \infty$$

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему (надо отметить, что аналогичная теорема в работе, цитированной в сноске на с. 418, сформулирована недостаточно четко).

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1°—9°. Тогда при значениях $\nu \in V_0 \subset V$ уравнение (1.2) имеет однопараметрическое семейство $2n$-мерных ЛИМ

$$M_{2n}(\chi) = \{(y_1, \ldots, y_n, z);\ \ y_i = 2\mathrm{Re}\,(r_i \exp(i\theta_i)\,\varphi_i) + Y_{0i}{}^\circ(r, \theta; \chi)\,),$$
$$z = Z_0{}^\circ(r, \theta; \chi)\} \quad (-\infty < \chi < \infty)$$

Функции $Y_{0i}{}^\circ(r, \theta; \chi)$, $Z_0{}^\circ(r, \theta; \chi)$ принадлежат классу C^1 и определены при $|r| < \rho_0$, $0 \leqslant \theta_1 - \chi < K$ (ρ_0, K — некоторые постоянные).

Кроме того

$$Y_{0i}{}^\circ(0, \theta; \chi) = D_{r,\theta}Y_{0i}{}^\circ(0, \theta; \chi) = Z_0{}^\circ(0, \theta; \chi) = D_{r,\theta}Z_0{}^\circ(0, \theta; \chi) = 0$$

Функции $Y_{0i}{}^\circ$, $Z_0{}^\circ$ удовлетворяют условиям

$$Y_{0i}{}^\circ|_{\theta_1=\chi} = Y_i{}^*(r, \theta), \quad Z_0{}^\circ|_{\theta_1=\chi} = Z^*(r, \theta)$$

где $Y_i{}^*$, Z^* — решения задачи (2.9)—(2.11), аналитически зависящие от координат r_i и параметра ν, и 2π-периодические функции класса C^2 от θ_i.

Траектории уравнения (1.2) на многообразиях $M_{2n}(\chi)$ определяются единственной системой уравнений (2.3), где $b^{(i)}(r; \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n)$, $c^{(i)}(r; \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n)$ — аналитические функции r_i и ν и 2π — периодические функции θ_i класса C^2.

Любое глобальное решение $u(t)$ уравнения (1.2), у которого

$$\|P_\nu u(t)\|_1 < \min(\rho_0, \rho), \quad t \in [0, \infty); \quad \|(I - P_\nu)\,u(0)\|_1 < \rho$$

$$\rho + \rho^{1/\alpha} < \begin{cases} b_1(\varkappa_\nu - q_\nu) & (q_\nu \geqslant 0) \\ b_2\varkappa_\nu & (q_\nu < 0) \end{cases}$$

притягивается многообразиями $M_{2n}(\chi)$.

Следствие. Многообразие $M_{2n}{}^*$ является локально притягивающим.

Доказательство. Рассмотрим траекторию $u(t)$ уравнения (2.2), удовлетворяющую условиям

$$\|P_\nu u(t)\|_1 < \min(\rho_0, \rho), \ t \in [0, \infty); \ \|(I - P_\nu)\,u(0)\|_1 < \rho$$

Пусть $\{t_k\}$ — некоторая возрастающая последовательность значений t: $0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_k < \ldots$ Ей соответствует последовательность точек траектории $\{u_k\}$: $u_k = u(t_k)$. Обозначим через $(r^{(k)}, \theta^{(k)})$ координаты проекции u_k на предельное многообразие $M_{2n}{}^*$. Из соотношения (2.2) следует, что

$$\theta_i^{(k)} = \mathrm{arctg}\,[\mathrm{Im}\,(u_k, \psi_i)_H \,/\, \mathrm{Re}\,(u_k, \psi_i)_H], \ i = 1, 2, \ldots, n$$

а координаты $r_i^{(k)}$ определяются системой уравнений вида

$$r_i^{(k)} + |(Y_i{}^*(r^{(k)}, \theta^{(k)}), \psi_i)_H| = |(u_k, \psi_i)_H|, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Рассмотрим ЛИМ $M_{2n}(\theta_1^{(k)})$ при некотором k. Так как $M_{2n}(\theta_1^{(k)})$ — локально притягивающее многообразие, то при достаточно больших значениях t имеем

$$\begin{aligned} &\|z(t) - Z_0{}^\circ(r(t), \theta(t); \theta_1^{(k)})\|_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot\exp(-\gamma t) \\ &\theta_1(t) \geqslant \theta_1^{(k)}; \ z(t) = (I - P_\nu)\,u(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $r(t)$, $\theta(t)$ — координаты проекции $u(t)$ на многообразие $M_{2n}(\theta_1^{(k)})$.

Из (2.15) следует, что при достаточно больших значениях k справедливо неравенство

$$\|z(t_k) - Z_0{}^\circ(r(t_k), \theta(t_k); \theta_1^{(k)})\|_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot\exp(-\gamma t_k)$$

Так как $\theta_i(t_k) = \theta_i^{(k)}$, то $r_i(t_k) = r_i^{(k)}$ и $Z_0{}^\circ(r(t_k), \theta(t_k); \theta_1^{(k)}) = Z^*(r^{(k)}, \theta^{(k)})$. Поэтому

$$\|z(t_k) - Z^*(r^{(k)}, \theta^{(k)})\|_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot\exp(-\gamma t_k), \ k \to \infty$$

Поскольку ω — предельные точки, u_p определяются соотношением $\lim u(t) = u_p$ при $t \to \infty$ и любая точка замкнутой траектории является

ω — предельной, то все ω — предельные точки и периодические решения уравнения (1.2) из достаточно малой окрестности нуля принадлежат предельному многообразию $M_{2n}{}^*$.

Для нахождения $2n$-мерной инвариантной проекции уравнения (2.2) и предельного многообразия $M_{2n}{}^*$ представим функции $g^*(r, \theta)$, $b^{(i)}(r, \theta)$, $c^{(i)}(r, \theta)$ в виде рядов по степеням r_i

$$g^* = \sum_{|S|=2}^{\infty} g_S r^S, \quad r^S = r_1^{s_1} \cdot r_2^{s_2} \ldots r_n^{s_n}, \quad |S| = s_1 + \ldots + s_n$$

$$b^{(i)} = \sum_{|S|=1}^{\infty} b_S^{(i)} r^S, \quad c^{(i)} = \sum_{|S|=1}^{\infty} c_S^{(i)} r^S \tag{2.16}$$

Подставим (2.16) в (2.9), (2.10), (2.11) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях r^S. Получим рекуррентную систему линейных уравнений для g_S

$$\omega_1 \frac{\partial g_S}{\partial \theta_1} + L_\nu g_S = - \sum_{i=1}^{n} 2 \operatorname{Re} [(b_{S_i}^{(i)} + i c_{S_i}^{(i)}) \exp(i\theta_i) \varphi_i] - \sum_{K+P=S} c_K^{(1)} \frac{\partial g_P}{\partial \theta_1} + N_S,$$

$$N = \sum_{|S|=2}^{\infty} N_S r^S, \quad S_i = (s_1, \ldots, s_i - 1, \ldots, s_n) \tag{2.17}$$

Периодические по θ_i функции g_s должны удовлетворять условиям

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i\theta_i)(g_S, \psi_i)_H \, d\theta_i = 0 \tag{2.18}$$

а функции $b_{S_i}^{(i)}(\theta)$, $c_{S_i}^{(i)}(\theta)$ однозначно определяются равенством

$$b_{S_i}^{(i)} + i c_{S_i}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta_i) \Big(N_S - \sum_{K+P=S} c_K^{(1)} \frac{\partial g_P}{\partial \theta_1}, \psi_i \Big)_H d\theta_i \tag{2.19}$$

3. Двумерная инвариантная проекция уравнений Навье — Стокса для течения Пуазейля. Рассмотрим течение жидкости в плоском канале. Пусть ось x направлена вдоль канала, а безразмерный ламинарный профиль скорости имеет вид $U = 1 - y^2$. В случае двумерных возмущений удобно перейти от уравнений Навье — Стокса к уравнению для функции тока возмущения

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

Будем рассматривать периодические по x решения уравнения (3.1). Тогда роль Ω будет играть ячейка периодичности

$$\Omega = \{x, y\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\pi/\alpha, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

а функция тока Ψ должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$\Psi|_{y=\pm 1} = \partial \Psi / \partial y|_{y=\pm 1} = 0, \quad \Psi(x + 2\pi/\alpha, y, t) = \Psi(x, y, t) \tag{3.2}$$

Собственные значения соответствующего линейного оператора $(-L_\nu)$ определяются уравнением вида

$$\lambda \Delta \varphi + U \partial \Delta \varphi / \partial x - U'' \partial \varphi / \partial x - R^{-1} \Delta^2 \varphi = 0 \tag{3.3}$$

и граничными условиями (3.2).

Для построения двумерной инвариантной проекции задачи (3.1), (3.2) возьмем в качестве σ_1 пару первых собственных значений задачи (3.3), (3.2) (упорядочивание проводится по величине $\operatorname{Re} \lambda$). Используя представление

$$\varphi(x, y) = \exp(-i\alpha x) f(y) \tag{3.4}$$

получим для функции $f(y)$ уравнение, комплексно сопряженное к уравнению Орра—Зоммерфельда

$$-i\alpha\,[(U - \bar{c})(d^2/dy^2 - \alpha^2) f - U''f] - R^{-1}(d^2/dy^2 - \alpha^2)^2 f = 0 \tag{3.5}$$

$$\bar{c} = -\gamma/\alpha + \omega/\alpha$$

(знак минус у показателя экспоненты в (3.4) выбран для того, чтобы в соответствии с условием 9° величина ω была положительна). Известно, что первому собственному значению уравнения Орра — Зоммерфельда соответствует четная собственная функция $f(y)$, поэтому она должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f(-1) = f'(-1) = f'(0) = f'''(0) = 0$$

В данном случае предельное многообразие $M_2{}^*$ определяется функцией $g^*(r, \theta)$, зависящей лишь от двух переменных r и θ. Функции b и c, определяющие инвариантную проекцию, зависят только от координаты r. Можно показать, что в (2.16)

$$g_s = \sum_{k=-s}^{s} g_{sk} \exp(ik\theta^*), \quad \theta^* = \theta - \alpha x$$

а

$$b(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} r^{2n}, \quad c(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} r^{2n}$$

Из (2.17) получаем рекуррентную систему уравнений для определения g_{sk} (δ_{ki} — символ Кронекера)

$$\begin{gathered} ik\,[(\omega - \alpha U)\Delta_k + \alpha U'']g_{sk} - R^{-1}\Delta_k{}^2 g_{sk} = -\,\delta_{k1}(b_{s-1} + ic_{s-1})\Delta_1 f - \\ -\,\delta_{k,-1}(b_{s-1} - ic_{s-1})\Delta_1 f - ik \sum_{q+p=s} c_q \Delta_k g_{pk} - i\alpha \sum_{q+p=s}\sum_{l+j=k} \times \\ \times \left[l g_{ql} \frac{d}{dy} \Delta_j g_{pj} - j \frac{dg_{ql}}{dy} \Delta_j g_{pj} \right] \qquad (3.6) \\ \Delta_k g_{sk} = (d^2/dy^2 - (k\alpha)^2)\, g_{sk} \end{gathered}$$

Функции g_{sk} должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$g_{sk}(-1) = g_{sk}'(-1) = 0$$

$g_{sk}'(0) = g_{sk}'''(0) = 0$, если s четно; $g_{sk}(0) = g_{sk}''(0) = 0$, если s нечетно.

Условиям ортогональности (2.18) соответствует условие вида

$$\int_{-1}^{1} \bar{f}^* \Delta_1 g_{s1}\, dy = 0$$

(f^* — собственная функция уравнения, сопряженного к уравнению (3.5)). Коэффициенты b_{s-1}, c_{s-1} определяются уравнением

$$\int_{-1}^{1} F_{s1} \bar{f}^*\, dy = 0$$

где F_{s1} — правая часть уравнения (3.6) для функции g_{s1}.

Решая последовательно уравнения (3.6), находим предельное многообразие $M_2{}^*$ и двумерную динамическую систему, описывающую поведение траекторий на семействе ИМ

$$dr / dt = (\gamma + b(r))\, r, \quad d\theta / dt = \omega + c(r) \tag{3.7}$$

Наибольший интерес представляет поведение возмущений при $t \to \infty$, которое определяется особыми траекториями системы (3.7). Такими траекториями являются предельные циклы, и им отвечают периодические решения уравнения (3.1). Амплитуды предельных циклов находятся из условия

$$\gamma + b(r) = 0 \tag{3.8}$$

Учитывая, что $b(r)$ — четная функция, введем обозначения

$$p = r^2, \quad B_0 = \gamma(R, \alpha), \quad B_n = b_{2n}(R, \alpha)$$

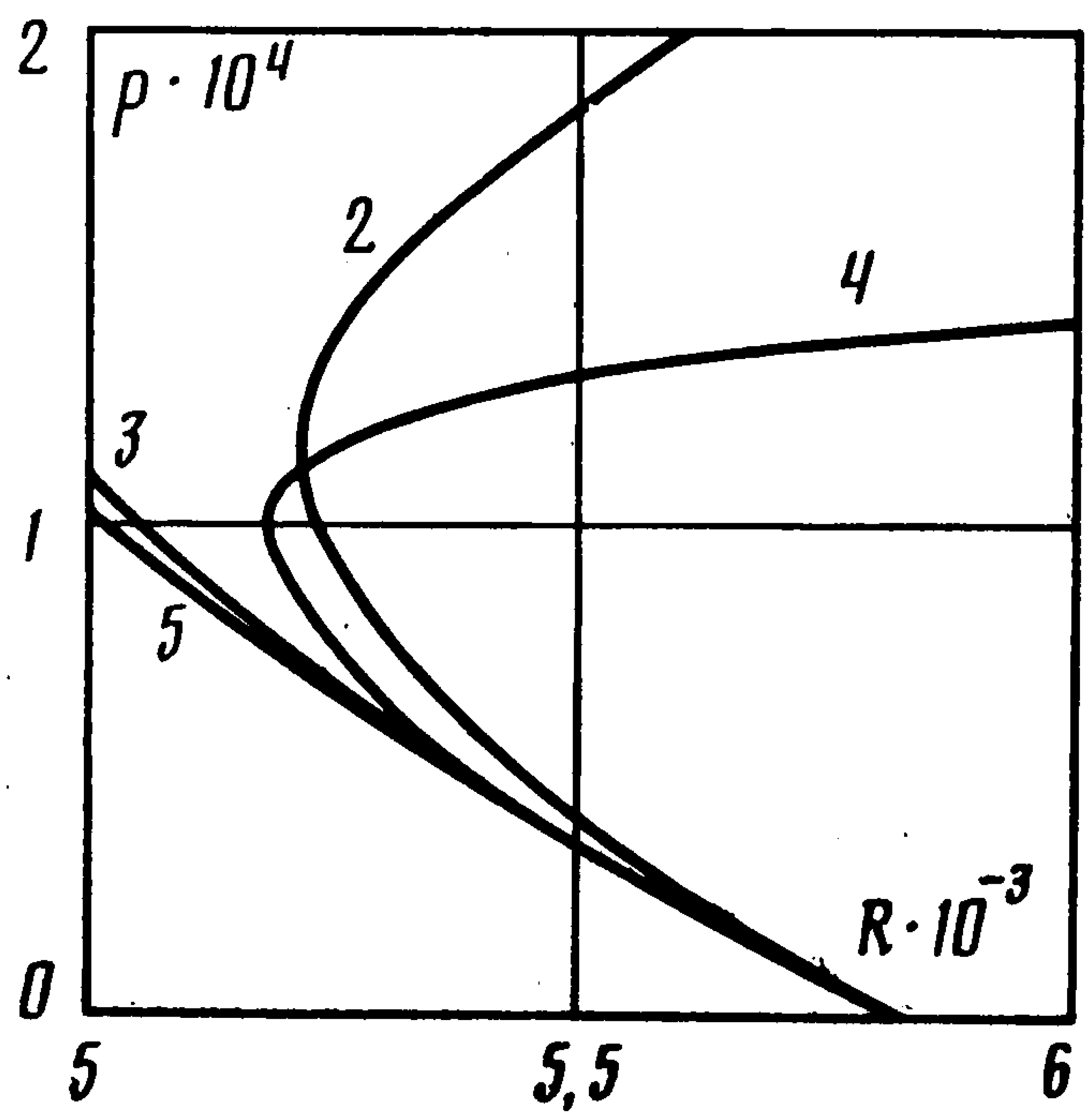
$$F(p; R, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n p^n, \quad F_N(p; R, \alpha) = \sum_{n=0}^{N} B_n p^n$$

Проводилось численное решение приближенных уравнений для амплитуд

$$F_N(p; R, \alpha) = 0 \tag{3.9}$$

при $N \leqslant 5$. Расчеты показали, что в соответствии с поведением решений уравнений (3.9) можно выделить четыре области значений волнового числа α: $I_1 = (\alpha\colon \alpha \geqslant 0{,}98)$, $I_2 = (\alpha\colon 0{,}92 < \alpha < 0{,}98)$, $I_3 = (\alpha\colon 0{,}9 < \alpha \leqslant 0{,}92)$, $I_4 = (\alpha\colon \alpha \leqslant 0{,}9)$.

Типичный график решений уравнений (3.9) для $2 \leqslant N \leqslant 5$ и $\alpha \in I_1$ $(\alpha = 1)$ приведен на фиг. 1 (R_0 — линейное нейтральное число Рейнольдса). При $p < p_*(\alpha)$ все приближения дают близкие решения, соответствующие амплитудам неустойчивых автоколебательных режимов течения. При $p > p_*(\alpha)$ картина качественно иная. Если у нечетных приближений решение непрерывно продолжается в область меньших R, то у четных приближений появляется второе решение, соответствующее устойчивому автоколебанию. Это решение сливается с первым при некотором критическом значении $R = R_*(\alpha)$.



Фиг. 1

Заметим, что устойчивость автоколебания с амплитудой определяется знаком производной $\partial F/\partial p\,|_{p_0}$ $(p_0 = r_0^2)$. Автоколебание устойчиво, если $\partial F/\partial p\,|_{p_0} < 0$, и неустойчиво, когда $\partial F/\partial p\,|_{p_0} > 0$.

Для значений α из интервала I_3 вид графиков решений аналогичен приведенному на фиг. 1, но при этом четные и нечетные приближения меняются местами: нечетные приближения имеют два решения, а четные — одно. Область I_2 является переходной. Здесь могут иметь два решения приближения различной четности. В области I_4 наблюдается более сложная картина.

Для анализа поведения решения уравнения (3.8) при $p \geqslant p_*$ применим методы теории катастроф [19].

Будем рассматривать F как двухпараметрическое семейство функций $F(p; R, \alpha)$ и исследуем многообразие нулей этого семейства. Начнем с области I_1. Пусть $p^*(\alpha)$, $R^*(\alpha)$ — такие значения p и R, что при $p < p^*(\alpha)$, $R > R^*(\alpha)$ уравнение (3.8) имеет единственное решение, к которому сходятся решения уравнений (3.9), а при $p > p^*$ приближения $F_N(p; R^*, \alpha)$ расходятся. Ясно, что величины p_*, R_* дают приближенные значения] p^* и R^* соответственно. Зафиксируем некоторое $\alpha_0 \in I_1$. Можно считать, что $B_n(R^*(\alpha_0), \alpha_0) \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots,$), так как эти условия выполняются почти при всех значениях α.

Рассмотрим семейство $F(p; R, \alpha)$ в следующей области: $0 \leqslant p < p^*(\alpha_0)$, $(R, \alpha) \in \Delta(p)$, где Δ — окрестность $(R^*(\alpha_0), \alpha_0)$, в которой коэффициенты B_n знакопостоянны, и приближения $F_N(p; R, \alpha)$ сходятся. Численные расчеты показали, что при любых $\alpha \in I_1$ и R из некоторой окрестности $R_*(\alpha)$, содержащей $R_0(\alpha)$, коэффициенты B_1, B_3, B_5 положительны, а B_2, B_4 отрицательны. Поэтому $F(p; R, \alpha)$ можно представить в виде

$$F = B_0 + y_1 - y^2 \quad (B_0 \leqslant 0,\ B_0(R_0(\alpha), \alpha) = 0)$$

$$y_1(p) = \sum_{k=1}^{K_1} B_{i_k}^+ p^{i_k}, \quad y(p) = \Big(\sum_{k=1}^{K_2} |B_{j_k}^-| p^{j_k}\Big)^{1/2}$$

(K_1, K_2 могут равняться ∞); $B_{i_k}^+$ — положительные коэффицианты из $\{B_n\}_1^\infty$, а $B_{j_k}^-$ — отрицательные. Аналитические функции $y_1(p; R, \alpha)$ и $y(p; R, \alpha)$ удовлетворяют условиям

$$y_1(0; R, \alpha) = y(0; R, \alpha) = 0; \ \partial y_1/\partial p, \ \partial y/\partial p > 0$$

Можно показать, что существуют C^∞-продолжения y_1°, y° функций y_1 и y, причем, в некоторой окрестности точки $(p^*(\alpha_0), R^*(\alpha_0), \alpha_0)$ выполняются условия

$$\partial y_1^\circ/\partial p > 0, \ \partial y^\circ/\partial p > 0; \ 0 \leqslant p < p_1, \ p_1 > p^*\ (R, \alpha) \in \Delta \tag{3.10}$$

Рассмотрим семейство $F^\circ = B_0 + y_1^\circ - (y^\circ)^2$. Благодаря условию (3.10) существует гладкая замена координат $p \to y^\circ(p)$ и $F^\circ(p; R, \alpha)$ эквивалентно семейству

$$\Phi(y^\circ; R, \alpha) = B_0(R, \alpha) + y_1^\circ(y^\circ; R, \alpha) - (y^\circ)^2$$

Пусть $y_0(R, \alpha)$ — решение уравнения $\Phi(y^\circ) = 0$. Рассмотрим величину

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^\circ}\Big|_{y_0} = \varkappa(y_0) - 2y_0, \quad \varkappa(y_0) = \frac{\partial y_1^\circ}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y^\circ}(y_0)$$

Так как $\varkappa(y_0) > 0$ при всех y_0, то при достаточно малых y_0 семейство Φ имеет простые нули, которым соответствуют простые нули семейства $F(p; R, \alpha)$. Но с ростом y_0 производная $\partial\Phi/\partial y^\circ|_{y_0}$ может обратиться в нуль и у семейства $F(p; R, \alpha)$ появится кратный нуль.

Естественно предположить, что расходимость решений уравнений (3.9) связана с этим обстоятельством, т. е.

$$\frac{\partial y_1^\circ}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y^\circ}(y_0; R, \alpha) - 2y_0 = 0 \tag{3.11}$$

$$R = R^*(\alpha_0), \ y_0 = y^* = y^0(p^*, R^*, \alpha_0)$$

При этом можно считать, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{(\partial y^\circ)^2}(y^*; R^*, \alpha_0) = -\left(2 - \frac{\partial^2 y_1^\circ}{(\partial y^\circ)^2}(y^*, R^*, \alpha_0)\right) \neq 0 \tag{3.12}$$

так как это условие выполняется почти при всех значениях α.

Видно, что в некоторой окрестности точки (p^*, R^*, α) семейство Φ эквивалентно семейству

$$\Phi_1(u; t_1, t_2) = t_1 + t_2 u + \beta(t_1, t_2) u^2 + f(u; t_1, t_2)$$

$$u = y^\circ - y^*, \ t_1(R, \alpha) = \Phi(y^*; R, \alpha), \ t_2(R, \alpha) = \frac{\partial \Phi}{\partial y^\circ}(y^*; R, \alpha)$$

$$\beta(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{(\partial y^\circ)^2}(y^*; R(t_1, t_2), \alpha(t_1, t_2))$$

$$f(0; t_1, t_2) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0; t_1, t_2) = 0, \quad t_1(R^*, \alpha_0) = t_2(R^*, \alpha_0) = 0$$

При помощи теоремы 8.6 [19] можно показать, что $\Phi_1(u; t_1, t_2)$ — версальная деформация 2-определенной функции $\beta(0, 0)u^2 + f(u; 0, 0)$, имеющей коразмерность 1 (коразмерность определяется в пространстве всех многочленов от u). Поэтому универсальной деформацией будет катастрофа складки. Следовательно, в области I_1 правильное описание решений уравнения (3.8) дают четные приближения (3.9). Заметим, что в окрестности точки (p_*, R_*, α_0) семейство $F_2(p; R, \alpha)$ можно привести к аналогичному Φ_1 виду с $f \equiv 0$.

Перейдем к области I_2. В интервале $0{,}96 \leqslant \alpha < 0{,}98$ в окрестности критических точек $(p_* (\alpha), R_* (\alpha), \alpha)$ меняются знаки коэффициентов B_3, B_4, B_5. Из предыдущего анализа ясно, что характер особенности $F (p; R, \alpha)$ остается прежним, меняется только вид функций $y_1 (p)$, $y (p)$. Рассмотрим интервал $0{,}92 < \alpha < 0{,}96$. Здесь происходит смена знака у коэффициента B_2. При этом B_3, B_5 отрицательны, а B_1, B_4 положительны. Представляя $F (p; R, \alpha)$ в виде

$$F = B_0 + y_1 (p) + B_2 p^2 - y^3 (p)$$

где y_1 — сумма положительных членов ряда $F (p)$, а $(-y^3)$ — сумма отрицательных членов, можно показать, что многообразие нулей семейства $F (p; R, \alpha)$ по-прежнему имеет особенность типа складки. В области I_3 имеем B_1, B_2, $B_4 > 0$, а B_3, $B_5 < 0$. Можно показать, что критические точки $(p^* (\alpha), R^* (\alpha), \alpha)$ также будут складками и правильное описание дают решения уравнений (3.9) при $N = 3$ и $N = 5$.

При переходе от области I_3 к области I_4 в окрестности линейной нейтральной кривой $(R = R_0 (\alpha); B_0 = 0)$ меняет знак коэффициент B_1. Зафиксируем некоторое значение $\alpha = \alpha_0$, близкое к $\alpha = 0{,}9$. Можно показать, что в некоторой окрестности критической точки $(p^* (\alpha_0), R^* (\alpha_0), \alpha_0)$ семейство $F (p, R, \alpha)$ эквивалентно семейству $\Phi (y^\circ; R, \alpha)$ вида

$$\Phi = B_0 + B_1 p (y^\circ) + (y_1^\circ (y^\circ))^2 - (y^\circ)^3$$

где $y_1^\circ (p)$, $y^\circ (p)$ — гладкие продолжения функций

$$y_1 (p) = \Big(\sum_{\substack{k=1 \\ i_k \neq 1}}^{K_1} B_{i_k}^+ p^{i_k} \Big)^{1/2}, \quad y (p) = \Big(\sum_{\substack{k=1 \\ j_k \neq 1}}^{K_2} | B_{j_k}^- | p^{j_k} \Big)^{1/3}$$

При значениях R, близких к $R_0 (\alpha_0)$ $(\alpha_0 \neq 0{,}9)$, уравнение $\Phi (y^\circ) = 0$ имеет малое решение $p \approx -B_0/B_1$. Так как величина $p = r^2$ должна быть положительной, для $\alpha_0 > 0{,}9$ решение существует при $R \geqslant R_0 (\alpha_0)$ $(B_0 \leqslant 0)$, а для $\alpha_0 < 0{,}9$ — при $R \geqslant R_0 (\alpha_0)$ $(B_0 \geqslant 0)$, т. е. в точке $\alpha = 0{,}9$ происходит смена докритической бифуркации на закритическую.

Рассмотрим величину

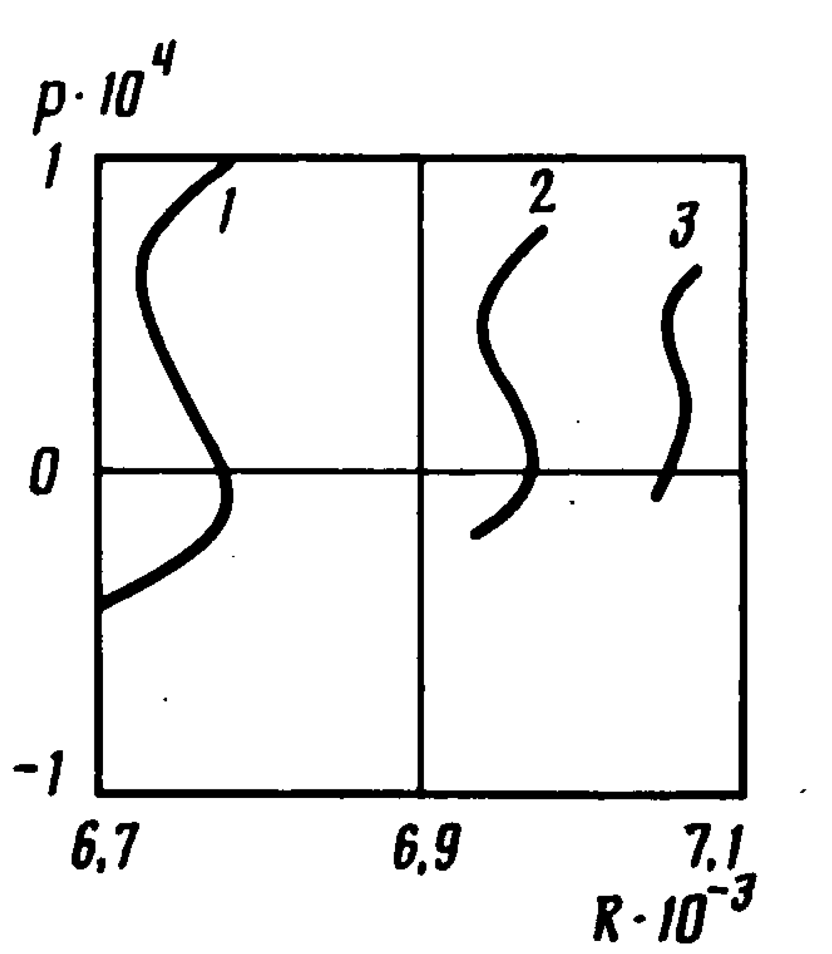
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^\circ} (y_0) = \left(B_1 \frac{\partial p}{\partial y^\circ} (y_0) + 2 y_1^\circ (y_0) \frac{\partial y_1^\circ}{\partial y^\circ} (y_0) - 3 y_0^2 \right)$$

где y_0 — решение уравнения $\Phi (y^\circ) = 0$. Видно, что при $\alpha_0 < 0{,}9$ семейство Φ, помимо критической точки y^*, приходящей из области I_3, имеет вторую критическую точку

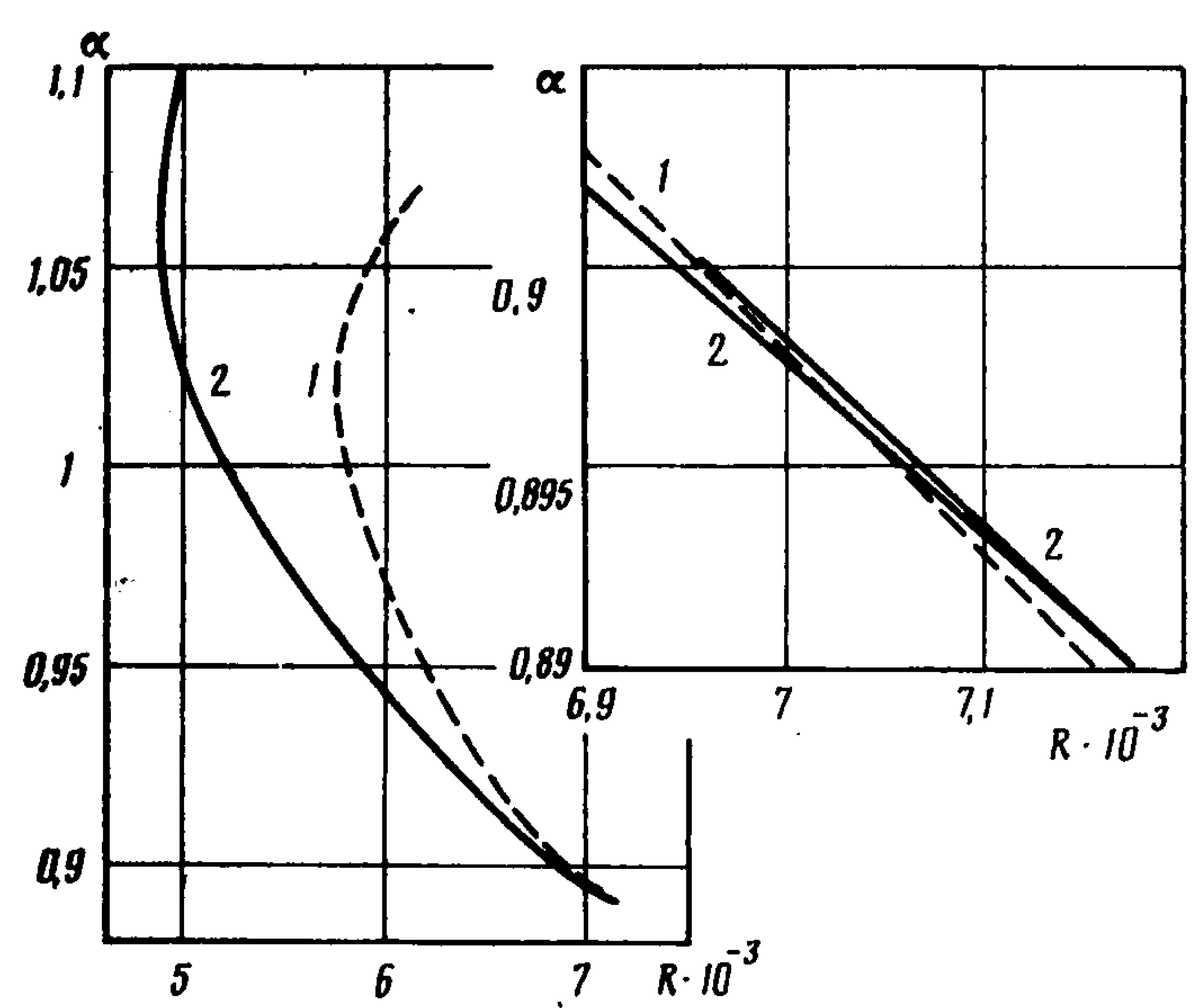
$$y^{**} \approx -{}^1/_2 B_1 \, | B_3 |^{1/3} / B_2$$

возникающую при смене характера бифуркации. Этой точке соответствует вторая складка многообразия нулей семейства $F (p; R, \alpha)$.

На фиг. 2 приведены графики решения уравнения (3.9) $(N = 3)$ для $\alpha = 0{,}91$; $0{,}9$; $0{,}895$ (кривые *1*—*3* соответственно). Видно, что при $\alpha \leqslant 0{,}9$



Фиг. 2



Фиг. 3

существуют две складки, которые сближаются с уменьшением α. Как показано в численных расчетах, складки сливаются при $\alpha = \alpha^* \approx 0{,}89$, и при $\alpha < \alpha^*$ существует одно решение уравнения (3.9). Соответствующий анализ методами теории катастроф подтверждает, что многообразие нулей $F(p; R, \alpha)$ в точке (p^*, R^*, α^*) имеет особенность типа сборки.

Таким образом, показано, что при $\alpha \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ существуют два докритических периодических решения уравнения (3.1): неустойчивое и устойчивое (в порядке возрастания амплитуд), сливающиеся в точках складки $(p^*(\alpha), R^*(\alpha), \alpha)$. Это подтверждает результаты, полученные ранее: асимптотическим методом [6] и прямыми численными расчетами [20]. Кроме того, в данной работе установлено, что в точке смены докритической бифуркации на закритическую происходит бифуркация рождения двух периодических решений. Благодаря этому у амплитудной поверхности автоколебаний появляется вторая складка, и в области $0{,}9 > \alpha > 0{,}89$ существуют три периодических решения: устойчивое, неустойчивое и устойчивое. Указанные решения сливаются в точке сборки при $\alpha^* \approx 0{,}89$, $R^* \approx 7173$.

Результат численного расчета кривой складок приведен на фиг. 3 (*1* — линейная нейтральная кривая, *2* — кривая складок).

Автор благодарит А. Жарилкасинова за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44. № 8. С. 339—342.
2. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt. 1. // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. Pt. 3. P. 353—370.
3. *Watson J.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt. 2. // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. Pt. 3. P. 371—383.
4. *Reynolds W. C., Potter M. C.* Finite-amplitude instability of parallel shear flows // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 3. P. 465—492.
5. *Струминский В. В.* К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 547—550.
6. *Струминский В. В., Скобелев Б. Ю.* Нелинейная нейтральная кривая для течения Пуазейля // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 3. С. 566—570.
7. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 638—655.
8. *Joseph D. D., Sattinger D. N.* Bifurcating time periodic solutions and their stability // Arch. Ration. Mech. Anal. 1972. V. 45. № 2. P. 79—109.
9. *Iooss G.* Existence et stabilité de la solution périodique secondaire intervenant dans les problémes d'évolution du type Navie-Stokes // Arch. Ration. Mech. Anal. 1972. V. 47. No 4. P. 301—329.
10. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 4. С. 791—794.
11. *Chen T. S., Joseph D. D.* Subcritical bifurcation of plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. Pt. 2. P. 337—351.
12. *Скобелев Б. Ю., Струминский В. В.* Нелинейное развитие возмущений в двумерных ламинарных потоках // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 802—806.
13. *Scobelev B. Yu., Molorodov Yu. I.* Subcritical autooscillations and nonlinear neutral curve for Poiseuille flow // Comput. and Math. 1980. V. 6. No 1. P. 123—133.
14. *Iooss G.* Bifurcation of a periodic solution of the Navie-Stokes equations into an invariant torus // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V. 58. No 1. P. 35—36.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
17. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
18. *Iooss G.* Bifurcation of maps and applications (North — Holland Math. Studies; 36). Amsterdam: North — Holland P. C. 1979. 232 p.
19. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
20. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 421 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.X.1987