

УДК 532.5

© 1990 г.

О. В. Капцов

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Обобщенным методом разделения переменных найдены новые частные решения для функции тока, описывающие двумерные стационарные движения идеальной жидкости. Приведены картины линий тока. Доказательство устойчивости некоторых решений основано на теореме В. И. Арнольда [1].

1. Функция тока $\psi(x, y)$ в случае двумерного стационарного движения идеальной жидкости удовлетворяет уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega(\psi) \quad (1.1)$$

где ω — завихренность. Решения уравнения (1.1) ищутся методом обобщенного разделения переменных:

$$\psi = \alpha(f(x) + g(y)) \quad (1.2)$$

Возникает задача о нахождении функций ω , α , допускающих нетривиальное разделение переменных, т. е. такое разделение, при котором ни одна из функций f , g не является многочленом степени два или меньше.

В результате подстановки выражения (1.2) в (1.1) получается уравнение

$$(f_{xx} + g_{yy})\alpha' + (f_x^2 + g_y^2)\alpha'' = \Phi(f + g)$$

где $\Phi = \omega \cdot \alpha$. Поскольку α' не равна нулю, то последнее уравнение можно представить в виде

$$X + \beta Y = F(z) \quad (1.3)$$

$$X = f_{xx} + g_{yy}, \quad Y = f_x^2 + g_y^2, \quad z = f + g \\ \beta = \alpha''/\alpha', \quad F = \Phi/\alpha'$$

Решение уравнения (1.3) будет называться нетривиальным, если соответствующее уравнение (1.1) допускает нетривиальное разделение переменных.

Дифференцирование уравнения (1.3) по x и y дает соотношение, которое после деления на $f_x g_y$ записывается следующим образом:

$$2\beta'(z)X + \beta''(z)Y = F''(z) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3), (1.4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X , Y . Система не противоречива, когда уравнения либо линейно зависимы, либо однозначно разрешимы относительно X , Y . В последнем случае возникают соотношения

$$Y = G(z), \quad X = H(z) \quad (1.5)$$

где G , H — некоторые функции. Дифференцирование первого соотношения (1.5) по x и y показывает, что отображение G должно быть линейным: $G(z) = az + b$, где $a, b \in R$. Значит, функции f , g , являющиеся решениями уравнений (1.5), — многочлены не выше второй степени. Таким

образом, только при условии линейной зависимости уравнений (1.3), (1.4) разделение может быть нетривиальным. Условия линейной зависимости следующие: $\beta'' = 2\beta\beta'$, $F'' = 2\beta'F$. Интегрирование первого из этих соотношений приводит к уравнению $\beta' = \beta^2 + c$, где $c \in R$. Следовательно, имеет место

Лемма. Уравнение (1.3) может иметь нетривиальное решение только в том случае, если функции β , F удовлетворяют системе

$$\beta' = \beta^2 + c, \quad F'' = 2\beta'F \quad (1.6)$$

Пусть β — решение первого уравнения (1.6), тогда

$$F(z) = s_1\beta(z) + s_2\beta(z) \int \beta^{-2}(z)dz \quad (1.7)$$

— общее решение второго уравнения (1.7).

Действительно, поскольку $F = \beta$ — частное решение линейного уравнения второго порядка (второе уравнение (1.6)), то общее решение, согласно [2], имеет вид (1.7).

Замечание. Если задана функция β , то α определяется из уравнения

$$\alpha'' = \beta\alpha' \quad (1.8)$$

а функции Φ , ω восстанавливаются по формулам

$$\Phi = \alpha'F, \quad \omega = \Phi \cdot \alpha^{-1} \quad (1.9)$$

Теорема. Уравнение (1.1) допускает нетривиальное разделение переменных только для следующих типов правых частей $\omega(\psi)$:

$$\begin{aligned} & a_1\psi \ln \psi + a_2\psi, \quad a_1e^\psi + a_2e^{-2\psi} \\ & a_1 \sin \psi + a_2 (\sin \psi \ln (\operatorname{tg}^{1/4} \psi)) + 2 \sin (1/2\psi) \\ & a_1 \operatorname{sh} \psi + a_2 (\operatorname{sh} \psi \ln (\operatorname{th} (1/4\psi)) + 2 \operatorname{sh} (1/2\psi)) \\ & a_1 \operatorname{sh} \psi + a_2 (\operatorname{sh} \psi \operatorname{arctg} e^{1/2\psi} + \operatorname{ch} (1/2\psi)) \end{aligned}$$

где a_1 , a_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (1.1), как обычно, рассматривается с точностью до точечных преобразований эквивалентности [3]. Доказательство проводится ниже, там же указываются соответствующие функции α и дифференциальные уравнения первого порядка для f , g .

2. Рассматриваются всевозможные решения системы (1.6).

Пусть $\beta = k$, где $k^2 = -c \neq 0$, тогда соответствующая функция F равна $A_2z + A_1$, здесь $A_2 = s_2/k$, $A_1 = s_1k$. Из уравнения (1.3) в этом случае в результате разделения получаются соотношения для f и g , которые сводятся к уравнениям первого порядка

$$f_x^2 = c_1e^{-2kf} + \frac{A_2}{k}f + \frac{A_1 + m}{k} - \frac{A_2}{2k^2}, \quad g_y^2 = c_2e^{-2kg} + \frac{A_2}{k}g - \frac{m}{k} - \frac{A_2}{2k^2}$$

Функция α определяется из (1.8): $\alpha = c_3e^{kz} + c_4$, где $c_3, c_4 \in R$. Формулы (1.9) позволяют найти правую часть $\omega(\psi)$:

$$\omega(\psi) = A_2(\psi - c_4) \ln [(\psi - c_4)/c_3] + A_1k(\psi - c_4)$$

Преобразования переноса по ψ и растяжения приводят соответствующее уравнение (1.1) к стандартному виду

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = a_1\psi \ln \psi + a_2\psi$$

Разделением переменных вида $\psi(x, y) = \xi(x)\eta(y)$ были найдены [4] частные решения этого уравнения. Кроме того, показано, что среди всех уравнений типа (1.1) только приведенное выше допускает такое разде-

ление. Поэтому указанное уравнение здесь не рассматривается. Случай $\beta = 0$ соответствует линейному уравнению.

Если постоянная c в первом уравнении (1.6) равна нулю, то $\beta = -(z + c_1)^{-1}$. Очевидным образом находится

$$\alpha = c_3 \ln |z + c_1| + c_4, \quad F = A_1 (z + c_1)^2 + A_2 (z + c_1)^{-1}$$

где $c_3, c_4, A_1, A_2 \in R$. Из соотношений (1.9) определяется правая часть

$$\omega(\psi) = c_2 A_1 e^\chi + c_2 A_2 e^{-2\chi}, \quad \chi = (\psi - c_3)/c_2$$

После преобразования переноса и растяжения по ψ соответствующее уравнение (1.1) выглядит так:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = a_1 e^\psi + a_2 e^{-2\psi} \quad (2.1)$$

Разделение переменных $\psi = \ln(f(x) + g(y))$ для этого уравнения было выполнено ранее [5]. Общее решение уравнения (2.1) в случае $a_2 = 0$, указано в [6].

Пусть постоянная c в первом уравнении (1.6) отрицательна и равна $-k^2$, где $k \in R$. Тогда возможны два случая: $\beta = -k \operatorname{th}(zk + c_1)$ или $\beta = -k \operatorname{cth}(zk + c_1)$.

В первом случае согласно (1.8) $\alpha = c_3 + 2c_2 k^{-1} \operatorname{arctg} e^{kz+c_1}$. Формулы (1.7), (1.9) позволяют определить

$$\Phi = c_2 A_1 \operatorname{sh} w / \operatorname{ch}^2 w + c_2 A_2 (w \operatorname{sh} w / \operatorname{ch}^2 w - 1 / \operatorname{ch} w), \quad w = kz + c_1$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Остается обратить функцию α и найти

$$\omega(\psi) = -\frac{1}{2} c_2 A_1 \sin 2\chi - \frac{1}{2} c_2 A_2 (\sin 2\chi \ln (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi) + 2 \sin \chi) \\ \chi = k(\psi - c_3)/c_2$$

Преобразования растяжения и переноса приводят соответствующее уравнение (1.1) к стандартной форме

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = a_1 \sin \psi + a_2 (\sin \psi \ln (\operatorname{tg} \frac{1}{4} \psi) + 2 \sin \frac{1}{2} \psi) \quad (2.2)$$

а функцию α к виду

$$\alpha = 4 \operatorname{arctg} e^{f+g} \quad (2.3)$$

Теперь необходимо предъявить нетривиальные решения уравнения (1.3), которое в данном случае нужно преобразовать к виду

$$\operatorname{cth}(z)(X - a_2) = -a_1 - a_2 z + Y \quad (2.4)$$

и продифференцировать по x и y . В результате получится выражение, которое можно представить в следующей форме:

$$\operatorname{cth}(z)(X - a_2) = \frac{1}{2} (f_{xxx}/f_x + g_{yyy}/g_y)$$

Приравняв правые части последних уравнений, выводим соотношение, расщепляющееся на два отдельных уравнения для f и g :

$$f_{xxx} = 2f_x (f_x^2 - a_2 f + m - a_1), \quad g_{yyy} = 2g_y (g_y^2 - a_2 g - m)$$

(m — константа разделения). Решение первого из них ищется в виде $f_x^2 = Q(f)$. В результате возникает линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого приводит к уравнению первого порядка для функции f

$$f_x^2 = \mu_1 e^{2f} + \mu_2 e^{-2f} + a_2 f - m + a_1 \quad (2.5)$$

Аналогичным образом получается уравнение

$$g_y^2 = \eta_1 e^{2g} + \eta_2 e^{-2g} + a_2 g + m \quad (2.6)$$

где η_1, η_2 — пока произвольные постоянные. Затем в соотношение (2.4) подставляются найденные выражения для f_x^2, g_y^2 , а также f_{xx}, g_{yy} . Остается сравнить коэффициенты при различных степенях экспоненты и установить связь между постоянными: $\eta_1 = \mu_2, \eta_2 = \mu_1$.

Для того чтобы изучить случай $\beta = -k \operatorname{cth}(kz + c_1)$, достаточно с минимальными изменениями повторить рассуждения, приведенные выше. Вместо уравнения (2.2) получится следующее

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = a_1 \operatorname{sh} \psi + a_2 (\operatorname{sh} \psi \ln (\operatorname{th}^{1/4} \psi) + 2 \operatorname{sh}^{1/2} \psi) \quad (2.7)$$

допускающее разделение переменных вида

$$\psi = 2 \ln | \operatorname{cth}^{1/2} (f + g) | \quad (2.8)$$

причем функции f, g — решения уравнений (2.5), (2.6), только связь между постоянными иная: $\eta_1 = -\mu_2, \eta_2 = -\mu_1$. Справедливость этого утверждения можно проверить прямой подстановкой.

Если постоянная c в первом уравнении (1.6) положительна, то его решение $\beta = -\sqrt{c} \operatorname{ctg}(\sqrt{c}z + c_1)$. Далее по описанной выше схеме повторяются рассуждения, позволяющие получить стандартное уравнение

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = a_1 \operatorname{sh} \psi + 2a_2 (\operatorname{sh} \psi \operatorname{arctg} \operatorname{th}^{1/2} \psi + \operatorname{ch}^{1/2} \psi) \quad (2.9)$$

Разделение переменных производится следующим образом:

$$\psi = 2 \ln | \operatorname{tg}^{1/2} (f + g) | \quad (2.10)$$

Здесь функции f, g удовлетворяют уравнениям, отличающимся от (2.5), (2.6) лишь заменой e^{2h} на $\sin 2h, e^{-2h}$ на $\cos 2h$ ($h = f, g$), причем $\eta_1 = \mu_1, \eta_2 = -\mu_2$.

В работах [7—9] использовались эквивалентные данным мультипликативные разделения переменных для уравнений (2.2), (2.7), однако постоянная a_2 была там нулевой. Возможно, разделение типа (2.10) для уравнения (2.8) является новым даже при $a_2 = 0$. В дальнейшем всюду постоянная a_2 считается ненулевой.

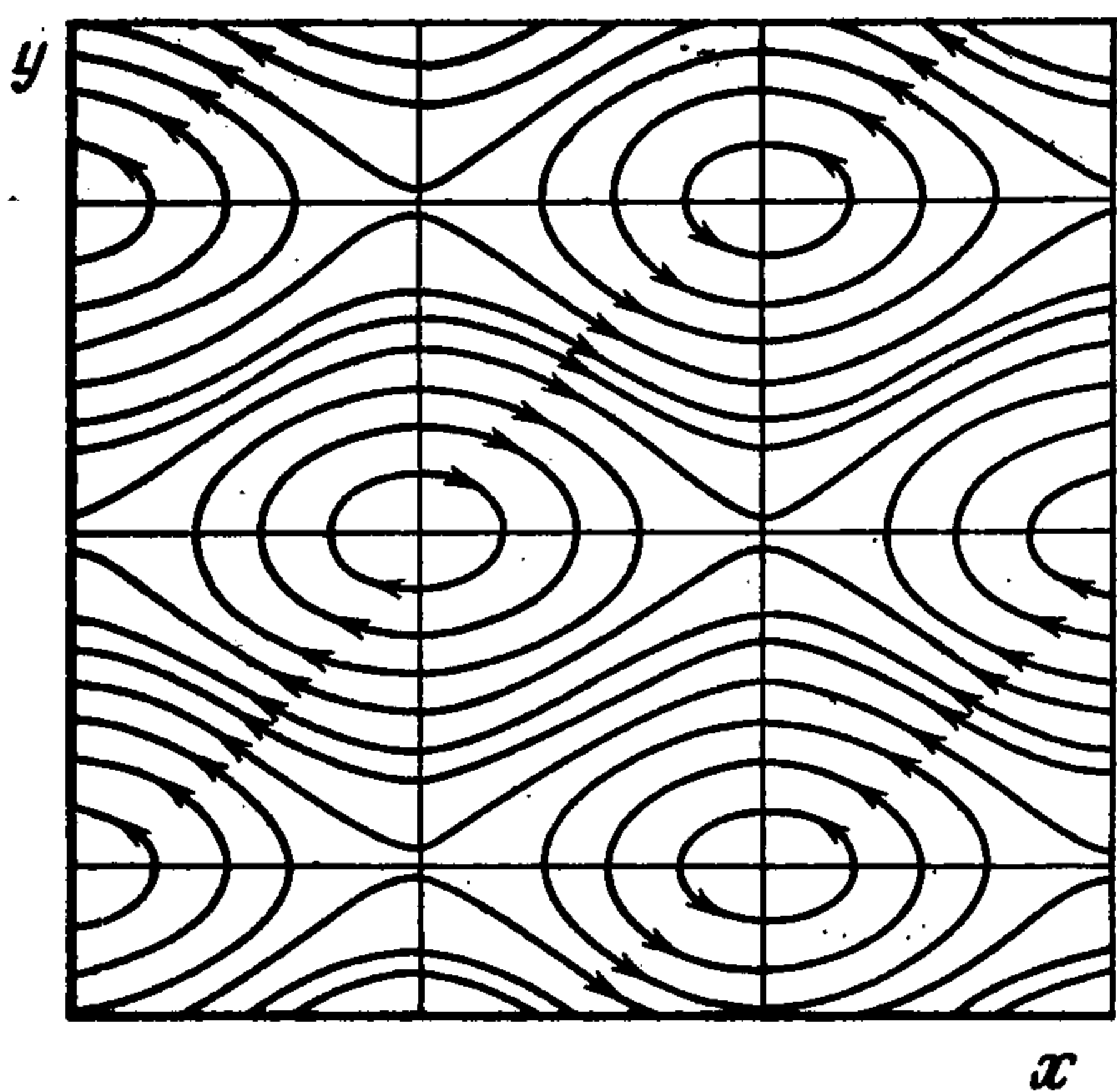
3. Построение картин линий тока для уравнений (2.2), (2.7), (2.9) требует знания топологии линий уровня соответствующих функций $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Хотя решение дифференциальных уравнений типа (2.5) сводится к обращению интегралов, качественные свойства функций f, g проще изучить, используя известные методы теории нелинейных колебаний [10].

Поведение решений уравнений (2.5), (2.6) определяется соответствующими потенциальными функциями

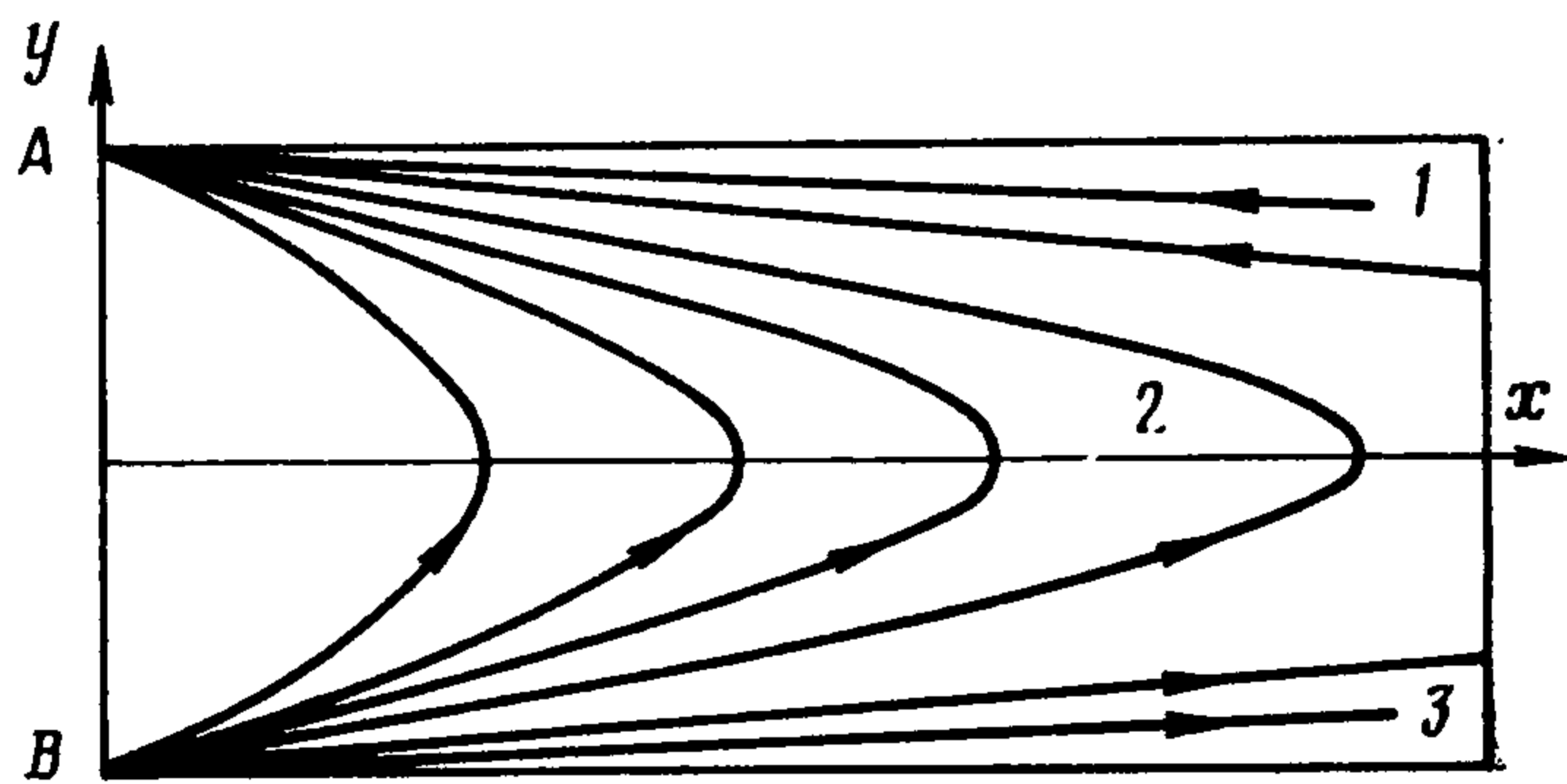
$$P_f = -\mu_1 e^{2f} - \mu_2 e^{-2f} - a_2 f, \quad P_g = -\eta_1 e^{2g} - \eta_2 e^{-2g} - a_2 g \quad (3.1)$$

Если постоянные μ_1, μ_2 отрицательны, то обе функции P_f, P_g выпуклы вниз и имеют по одной точке минимума. Следовательно, непостоянные решения уравнений (2.5), (2.6) являются в данном случае периодическими функциями.

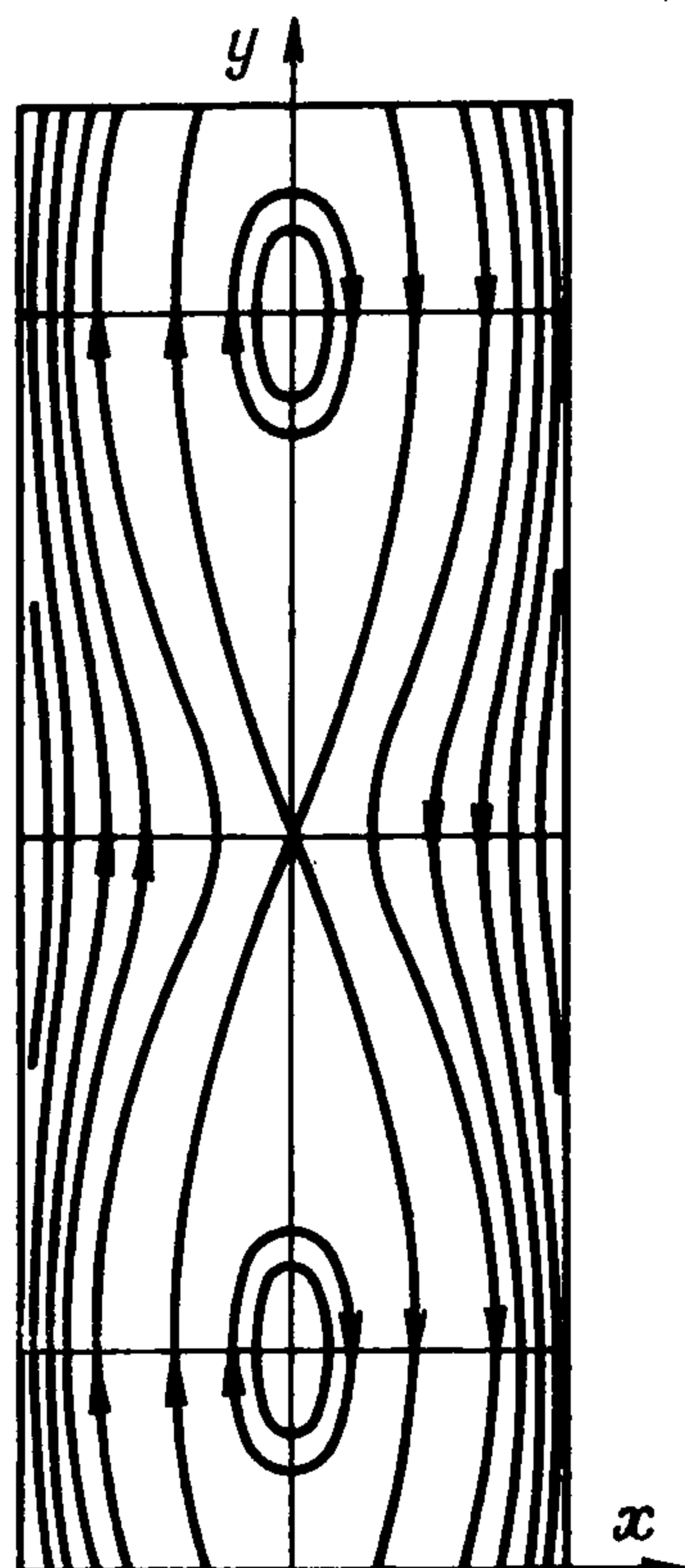
На фиг. 1 представлена картина линий тока, полученная путем численного решения уравнений (2.5), (2.6) при $\mu_1 = \mu_2 = -0,5, m = 1,81, a_1 = 3,06, a_2 = 0,1$. Кроме того, предполагалось, что $f(0) = g(0) = 0$. Вихревые цепочки расположены в шахматном порядке. Период функции f равен 4,31, а g — 4,08. Это позволяет находить расстояние между центрами двух любых вихрей. Максимальное значение модуля вектора скорости равно 2,14. Можно показать, что качественная картина линий тока при $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ в общем случае имеет вид, изображенный на фиг. 1, либо получается из нее поворотом на 90° . В особых случаях границы соседних цепочек становятся общими.



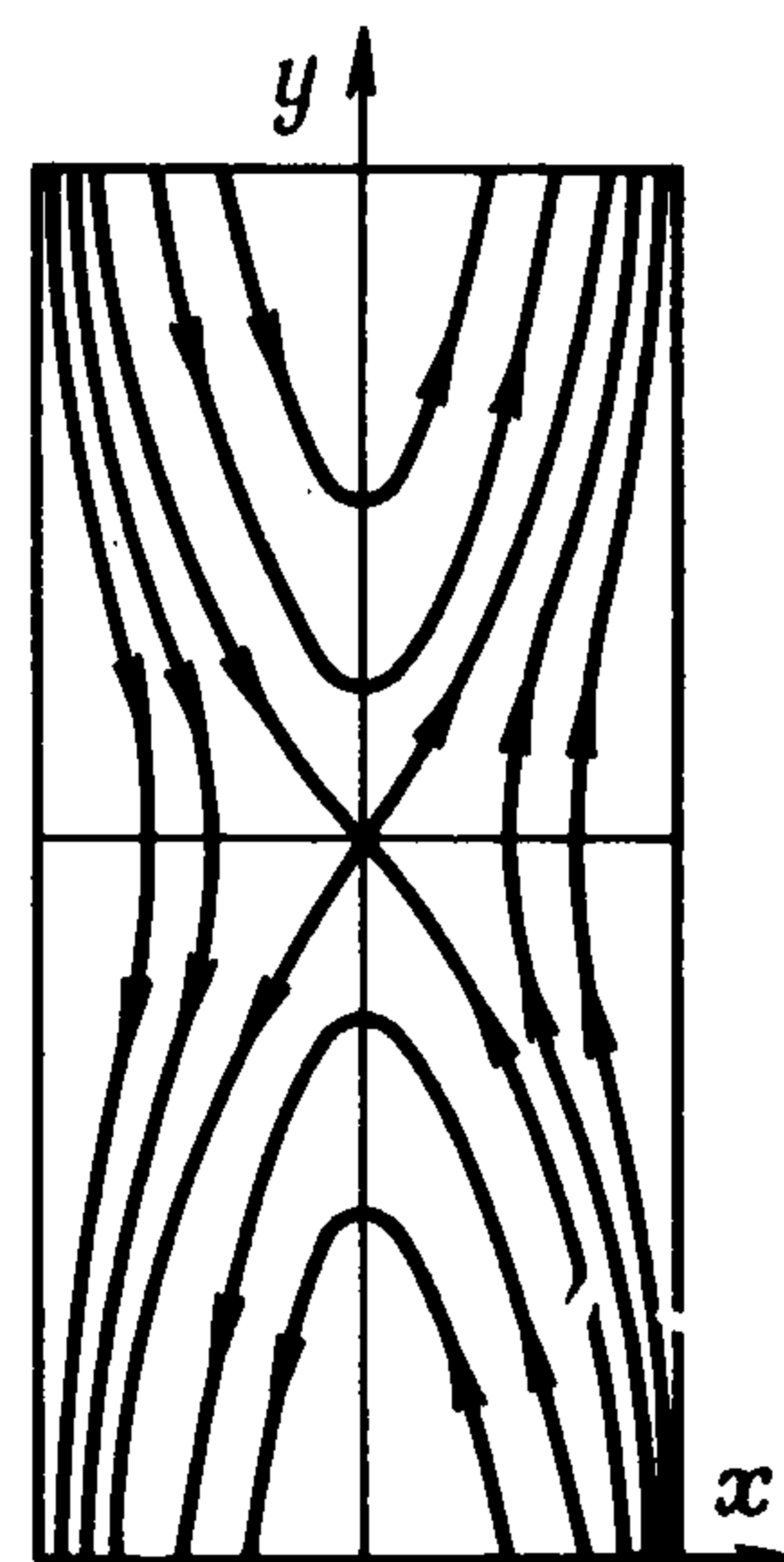
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Если постоянные μ_1, μ_2 положительны, то функции Π_f, Π_g выпуклы вверх и каждая обладает единственным максимумом. Значит, на фазовых плоскостях (f, f_x) и (g, g_y) имеется по одной особой точке типа седла, через которые проходят сепаратрисы. Сепаратрисы делят фазовую плоскость на области, заполненные дважды убегающими траекториями [10]. Поскольку правые части уравнений (2.5), (2.6) экспоненциально растут, то дважды убегающим траекториям соответствуют решения с областью определения, состоящей из ограниченных интервалов. Они делятся на три класса. Первый (второй) — решения уходящие на плюс (минус) бесконечность на обоих концах интервала, третий — решения, стремящиеся к минус бесконечности на одном конце и к плюс бесконечности на другом. Такие решения будут называться дважды убегающими класса 1, 2 или 3. Сепаратрисам соответствуют решения, область определения которых — интервалы вида (a, ∞) или $(-\infty, a)$. Их графики обладают вертикальной и горизонтальной асимптотами. Эти решения могут быть отнесены к двум типам, в зависимости от того, к плюс или минус бесконечности стремится соответствующая функция при приближении к точке a . Данные решения в дальнейшем называются лимитационно-убегающими типов 1 или 2.

Если взять в качестве f и g лимитационно-убегающие решения типа 1, то соответствующая функция ψ будет определять движение, которое можно трактовать как течение внутри прямого двухгранного угла. Когда f и g — дважды убегающие решения класса 1, тогда получающееся дви-

жение интерпретируется как течение в прямоугольном цилиндре. В этих и некоторых других примерах скорость остается всюду ограниченной.

Модули компонент вектора скорости при учете соотношений (2.3), (2.5), (2.6) вычисляются по формулам $|u| = |\psi_y|$, $|v| = |\psi_x|$. Если значение g фиксировано, а $f \rightarrow \infty$, то вектор скорости ограничен. При одновременном стремлении функций f и g к бесконечности скорость стремится к нулю. Скорость будет иметь особенность в некоторой точке, если при приближении к ней $f \rightarrow \infty$, $g \rightarrow -\infty$.

Одно из решений с особенностями представлено на фиг. 2. Линии тока принадлежат трем областям. Области 1, 3 состоят из неограниченных траекторий, выходящих из точки B или входящих в точку A . Область 2, разделяющая зоны 1 и 3, заполнена траекториями, соединяющими точки A и B . Хотя каждая линия тока из области 2 ограничена, существуют траектории, имеющие сколь угодно большую длину. Данная картина линий тока получается в случае, если взять в качестве f лимитационно-убегающее решение типа 1, а в качестве g — дважды убегающее решение класса 2. Следует отметить, что в работе [4] картина линий тока соответствующая подобного типа решением изображена не совсем точно, так как там нет траекторий, имеющих сколь угодно большую длину, лежащих в области 2.

Пусть теперь постоянные μ_1, μ_2 имеют разные знаки: $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$. Тогда значение $a_* = -4\sqrt{-\mu_1\mu_2}$ является бифуркационным для уравнения (2.5). Действительно, при $a_2 > a_*$ первая производная функции Π_f отрицательна. Все фазовые траектории на плоскости (f, f_x) являются дважды убегающими. Им соответствуют дважды убегающие решения класса 1. Если $a_2 = a_*$, то функция Π_f всюду убывает, причем в точке перегиба $\Pi_f' = 0$. На фазовой плоскости появляется особая точка высшего порядка, через которую проходит сепаратриса. Ей отвечают лимитационно-убегающие решения типа 1. В случае $a_2 < a_*$ функция Π_f убывает всюду, кроме ограниченного отрезка, и имеет пару экстремумов — максимум и минимум. Значит, на фазовой плоскости есть две особые точки — седло и центр. В окрестности центра лежат замкнутые траектории. Сепаратрисная петля, охватывающая эти траектории, выходит из седла и возвращается в него же. Ей отвечает гладкое ограниченное решение f , причем f стремится к постоянной при $x \rightarrow \pm\infty$. Такое решение называется дважды лимитационным. Имеются также куски сепаратрисы, отвечающие лимитационно-убегающим движениям [10] на фазовой плоскости. Остальные фазовые траектории дважды убегающие. Анализ поведения решений уравнения (2.6) проводится аналогичным образом. Бифуркационное значение здесь $a_2 = -a_*$. В случае $a_2 < -a_*$ все траектории на фазовой плоскости дважды убегающие, а при $a_2 > -a_*$ появляются две особые точки — седло и центр.

Можно получить качественные картины линий тока, выбирая соответствующие функции f, g .

Например, при $a_2 > -a_*$ функция f дважды убегающее решение класса 1, а функцию g можно взять периодической.

На фиг. 3 изображено поле течений, полученное путем численного решения уравнений (2.5), (2.6) при $\mu_1 = -\mu_2 = 0,5, a_2 = 3, a_1 = m = 0,04$. Кроме того, предполагалось, что $f(0) = g(0) = 0$. Период функции g равен 4,75. Функция f определена на интервале $]-1,32, 1,32[$. Данное решение можно интерпретировать как слой смещения между двумя параллельными стенками.

Если же взять в качестве g дважды лимитационное решение, то картина линий тока будет выглядеть так, как показано на фиг. 4. Очевидно, при этом скорость является непрерывным ограниченным отображением.

Случай $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ аналогичен предыдущему и поэтому не рассматривается. Если одна из постоянных μ_1, μ_2 равна нулю, то можно показать, что существенно новых решений не возникает.

Поскольку уравнение (2.7) допускает разделение переменных (2.8) с функциями f, g , удовлетворяющими тем же уравнениям (2.5), (2.6) (здесь лишь связь между постоянными иная), то задача построения линий уровня функции $h = f + g$ близка к рассмотренной выше. При этом возможны новые типы течений, такие например, как периодическое по x течение между двумя волнистыми стенками. Оно возникает в случае $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$, когда f — периодическая функция, а g — дважды убегающее решение класса 2. Описание всего множества решений не встречает принципиальных трудностей. Однако во время построения картин линий тока необходимо следить за кривыми, на которых сумма $f + g$ нулевая, так как при приближении к ним скорость растет неограниченно.

В заключение следует сказать о решениях уравнения (2.9), получаемых путем разделения переменных (2.10). Поведение функций f, g определяется потенциалами

$$\Pi_f = -\mu_1 \sin 2f - \mu_2 \cos 2f - a_2 f, \quad \Pi_g = -\mu_1 \sin 2g + \mu_2 \cos 2g - a_2 g$$

Оно качественно совпадает с поведением функции Θ , являющейся решением уравнения $\Theta_x^2 = 2 \cos \Theta + c_1 \Theta + c_2$, подробный анализ которого имеется в [10]. Бифуркация происходит при $|a_2| = \mu_*$, $\mu_* = 2 \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$. Если $|a_2| > \mu_*$, то все решения соответствующих уравнений определены на R , имеют по одной точке экстремума и неограничены сверху или снизу в зависимости от знака a_2 . При $|a_2| < \mu_*$ добавляются такие решения, как дважды лимитационные, периодические. Случай $a_2 = 0$ фактически приводит к уравнению математического маятника. Построение соответствующих картин линий тока не представляет большого труда.

Пример. Пусть выполнено неравенство $a_2 > \mu_*$, тогда функции f и g неограничены сверху на R и их единственными экстремумами являются точки минимума. Следовательно, линии уровня $h = f(x) + g(y)$ — замкнутые кривые диффеоморфные окружности. Очевидно, существует натуральное число n , такое, что множество

$$M_n = \{(x, y) \in R^2: \pi n + \pi/10 \leq (f + g)/2 \leq \pi n + \pi/3\}$$

не пусто и диффеоморфно кольцу в R^2 . Если принять границу M_n за твердые стенки, то получится течение между двумя цилиндрами. Когда $a_1 > 2a_2$, данное течение будет устойчивым по отношению к двумерным возмущениям. Действительно, в этом случае производная правой части $\omega(\psi)$ по ψ удовлетворяет неравенствам $K_1 > \omega' > K_2 > 0$, где K_1, K_2 — подходящие постоянные. Остается сослаться на теорему В. И. Арнольда [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1966. № 5 (54). С. 3—5.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
4. Shercliff J. A. Simple rotational flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 82. Pt 4. P. 687—703.
5. Капцов О. В. Эллиптические решения стационарных уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 3. С. 597—600.
6. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов М.: Наука, 1978. 296 с.
7. Капцов О. В. Некоторые классы плоских вихревых течений идеальной жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 109—117.
8. Ting A. C., Chen H. H., Lee Y. C. Exact solutions of nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation // Physica D. V. 26. № 1/3. 1987. P. 37—66.
9. Мовсисянц Ю. Б. Солитоны в двумерной гидродинамической модели холодной плазмы // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. Вып. 2. С. 493—499.
10. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.