Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 62—50


М. Д. Локшин

# О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОМЕХУ

Рассматривается позиционная дифференциальная игра для линейной системы. Отличие рассматриваемой игровой задачи от исследованных в литературе состоит в том, что отсутствуют геометрические ограничения на управляющее воздействие и помеху, а на реализации помехи наложены интегральные ограничения. Устанавливается существование оптимальной стратегии и указывается метод ее построения. Строятся контрстратегии, формирующие наименее благоприятные реализации помехи. Устанавливается, что рассматриваемая дифференциальная игра имеет цену и седловую точку.

1. Рассматривается дифференциальная игра для объекта, движение которого описывается уравнением

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u + C(t)v$$
$$u \in R^r, \quad v \in R^s, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

где $x$ — $n$-мерный фазовый вектор, $u$ — вектор управляющего воздействия, $v$ — вектор помехи, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции; $t_0$, $\vartheta$ — фиксированные моменты времени. Каждая возможная реализация помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta) = \{v[t], t_0 \leqslant t < \vartheta\}$ измерима по Борелю и удовлетворяет ограничению

$$I_v(t_0, \vartheta) \leqslant \nu[t_0], \quad I_v(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \langle v[t] \cdot \Psi(t) v[t]\rangle\, dt$$

Здесь $\nu[t_0] > 0$ — заданное число, $\langle a \cdot b\rangle$ — скалярное произведение векторов $a$ и $b$, $\Psi(t)$ — непрерывная при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ матрица-функция, $\langle v \cdot \Psi(t) v\rangle$ — определенно-положительная квадратичная форма. Назовем стратегией всякую функцию

$$u(\cdot) = \{u(t, x, \nu, \varepsilon), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x \in R^n, \ 0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0], \quad \varepsilon > 0\}$$

Пусть выбраны стратегия $u(\cdot)$, реализовалась позиция $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $0 \leqslant \nu[t_*] \leqslant \nu[t_0]$, выбраны значение $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta_u\{t_i\}$, $i = 1, \ldots, k+1$ для отрезка $[t_*, \vartheta]$, $t_1 = t_*, \ldots, t_{k+1} = \vartheta$. Тогда движение $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ определяется при $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ как решение пошагового дифференциального уравнения

$$x^{\cdot}[t] = A(t)x[t] + B(t)u(t_i, x[t_i], \nu[t_i], \varepsilon) + C(t)v[t], \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, k$$

где реализация $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ может оказаться любой измеримой функцией, удовлетворяющей ограничению

$$I_v(t_*, \vartheta) \leqslant \nu[t_*] \tag{1.2}$$

При всякой допустимой реализации $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ (1.2) функция $\nu[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, определяющая оставшийся ресурс для помехи в момент $t$, будет определяться согласно уравнению

$$\nu[t] = \nu[t_*] - I_v(t_*, t), \quad t \in [t_*, \vartheta]$$

Величина $\nu[t]$ может определяться по ходу управления из анализа движения. Назовем контрстратегией всякую функцию

$$v(\cdot) = \{v(t, x, \nu, \varepsilon), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x \in R^n, \ 0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0], \ \varepsilon > 0\}$$

Пусть выбрана контрстратегия $v(\cdot)$, реализовалась позиция $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$, выбраны значение $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta_v\{t_i\}$ для отрезка $[t_*, \vartheta]$ и пусть на объект действует управление $u[t_*[\cdot]\vartheta)$, являющееся какой-либо измеримой ограниченной функцией. В этом случае движение $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ формируется следующим образом. До момента $t_j \in \Delta_v\{t_i\}$ (который будет оговорен ниже) часть $x[t_*[\cdot]t_j]$ рассматриваемого движения определяется как решение пошагового дифференциального уравнения

$$x^{\cdot}[t] = A(t)x[t] + B(t)u[t] + C(t)v(t_i, x[t_i], \nu[t_i], \varepsilon), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, j-1 \qquad (1.3)$$

Момент $t_j$ определяется из условия

$$\nu[t_j] - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle v(t_j, x[t_j], \nu[t_j], \varepsilon)\, \Psi(t)\, v(t_j, x[t_j], \nu[t_j], \varepsilon)\rangle\, dt < 0, \ \nu[t_j] \geqslant 0 \qquad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что найдется величина $t^* \in [t_j, t_{j+1})$, подстановка которой вместо верхнего предела интегрирования в (1.4) обращает левую часть первого неравенства (1.4) в нуль. При этом движение $x[t_j[\cdot]t^*]$ определяется как продолжение движения $x[t_*[\cdot]t_j]$ из условия, соответствующего уравнению (1.3) при замене $t_i$ на $t_j$, $t_{i+1}$ на $t^*$.

При $t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$, когда ресурс для помехи уже будет истрачен полностью, полагаем, что на объект помеха не оказывает воздействие и движение $x[t^*[\cdot]\vartheta]$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$x^{\cdot}[t] = A(t)x[t] + B(t)u[t], \quad t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$$

Пусть задан функционал

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta], u[t_*[\cdot]\vartheta)) = |x[\vartheta]| + J_u(t_*, \vartheta)$$

$$J_u(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \langle u[t] \cdot \Phi(t)\, u[t]\rangle\, dt \qquad (1.5)$$

Здесь $|x|$ — какая-либо норма вектора $x$, удовлетворяющая при $x \in R^n$ условию $|x| \leqslant d\,|x|_e$, $d > 0$, где символ $|\cdot|_e$ здесь и далее означает евклидову норму: $\langle u \cdot \Phi(t)\, u\rangle$ — определенно-положительная квадратичная форма, $\Phi(t)$ — непрерывная матрица-функция.

Пусть $\Delta_\delta$, где $\delta > 0$, означает разбиение $\Delta\{t_i\}$, которое удовлетворяет условию $t_{i+1} - t_i \leqslant \delta$, $i = 1, \ldots, k$. Для стратегии $u(\cdot)$ и исходной позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$ будем называть гарантированным результатом величину

$$c(u(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \lim_{\delta\to 0}\ \sup_{\Delta_\delta}\ \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma$$

а для контрстратегии $v(\cdot)$ и исходной позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$ назовем гарантированным результатом величину

$$c(v(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \lim_{\delta\to 0}\ \inf_{\Delta_\delta}\ \inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma$$

Здесь нижняя грань берется по всем измеримым ограниченным реализациям $u[t_*[\cdot]\vartheta)$.

Назовем оптимальной стратегию $u^\circ(\cdot)$, если $c(u^\circ(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) = \min_{u(\cdot)} c(u(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*])$ для всякой исходной позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$, а величину $c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*]) = c(u^\circ(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*])$ — оптимальным гарантированным результатом для позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$. Справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 1.1.* Каковы бы ни были исходная позиция $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$ и контрстратегия $v(\cdot)$, справедливо неравенство

$$c(v(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) \leqslant c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*])$$

В работе устанавливается существование оптимальной стратегии $u^\circ(\cdot)$ и контрстратегии $v^\circ(\cdot)$, для которой справедливо равенство $c(v^\circ(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) = c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*])$, какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$. В силу утверждения 1.1 это будет означать, что рассматриваемая задача игрового управления имеет цену $c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*])$ и седловую точку $\{u^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot)\}$.

Особенность, отличающая поставленную задачу, состоит в том, что допускаются сколь угодно большие значения $u[t]$ $v[t]$ и ограничения на помеху носят интегральный характер.

2. Рассмотрим модель

$$\begin{gathered} w^\bullet = A(\tau)w + B(\tau)u + C(\tau)v \\ w_{n+1}^\bullet = \langle u\cdot\Phi(\tau)u\rangle, \quad u \in R^r, \quad v \in R^s \end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначая $\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}\} = z \in R^{n+1}$, запишем (2.1) в виде

$$z^\bullet = A_0(\tau)z + f_0(\tau, u, v), \ u \in R^r, \ v \in R^s \tag{2.2}$$

$$f_0(\tau, u, v) = \{B(\tau)u + C(\tau)v, \ \langle u\cdot\Phi(\tau)u\rangle\}$$

где $A_0(\tau)$ — $(n+1)\times(n+1)$-матрица. На движениях $z[\tau_*[\cdot]\vartheta] = \{w[\tau_*[\cdot]\vartheta], w_{n+1}[\tau_*, [\cdot]\vartheta]\}$ модели (2.2), порожденных реализациями $u[\tau_*[\cdot]\vartheta)$, $v[\tau_*[\cdot]\vartheta)$, рассмотрим функционал

$$\gamma_0 = \gamma_0(z[\tau_*[\cdot]\vartheta], u[\tau_*[\cdot]\vartheta)) = |w[\vartheta]| + w_{n+1,*} + J_u(\tau_*, \vartheta),$$
$$\tau_* \in [t_0, \vartheta), \ w_{n+1,*} = w_{n+1}[\tau_*]$$

соответствующий функционалу $\gamma$ (1.5). Реализации $v[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ удовлетворяют ограничению (1.2), где $t_* = \tau_*$.

Зафиксируем какое-либо число $q > 0$ и на реализации $v[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ временно накладываем дополнительное ограничение

$$|v[\tau]|_e \leqslant q, \ \tau_* \leqslant \tau < \vartheta \tag{2.3}$$

Пусть реализовалась некоторая позиция $\{\tau_*, z_*, \nu[\tau_*]\}$. Зададимся некоторым числом $\beta$. Правило, ставящее каждой кусочно-постоянной реализации $u[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ в соответствие кусочно-постоянную реализацию $v[\tau_*[\cdot]\vartheta)$, удовлетворяющую (1.2) при $t_* = \tau_*$ и одновременно условию (2.3), назовем $(\beta, \nu[\tau_*])$ — $Q$-процедурой, если выполнено условие неупреждаемости $v[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ по $u[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ ([1], с. 223) и для всякого порожденного этим правилом движения $z[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ справедливо неравенство

$$\gamma_0(z[\tau_*[\cdot]\vartheta], u[\tau_*[\cdot]\vartheta)) > \beta$$

Возьмем произвольную позицию $\{\tau, z, \nu\}$ и введем величину ($\exists$ — квантор существования)

$$\rho^{(q)}(\tau, z, \nu) = \sup\beta, \ \beta \in B_{\{\tau, z, \nu\}} = [\beta\colon \exists(\beta, \nu) - Q\text{-процедура}] \tag{2.4}$$

Функция $\rho^{(q)}(\cdot)$ обладает следующими свойствами.

1°. Для любых чисел $\nu_1$, $\nu_2$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu[t_0], \ 0 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu[t_0], \ \nu_2 \geqslant \nu_1$$

справедливы неравенства

$$\rho^{(q)}(\tau, z, \nu_2) \geqslant \rho^{(q)}(\tau, z, \nu_1), \ \rho^{(q)}(\tau, z, \nu_2) - \rho^{(q)}(\tau, z, \nu_1) \leqslant A^* \sqrt{\nu_2-\nu_1},$$
$$\tau \in [t_0, \vartheta], \ z \in R^{n+1}$$

где $A^*$ — некоторая положительная постоянная, которая определяется в зависимости от вида матриц-функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $\Psi(t)$.

2°. Непрерывность по $t$ и условие Липшица по переменной $z$:

$$|\rho^{(q)}(\tau, z_2, \nu) - \rho^{(q)}(\tau, z_1, \nu)| \leqslant \lambda \, |z_2 - z_1|_e$$
$$z_1, z_2 \in R^{n+1}, \ \tau \in [t_0, \vartheta], \ 0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0]$$

где постоянная $\lambda$ определяется равенством

$$\lambda = d\sqrt{2}\,(1 + \max_{t_0 \leqslant t, \, \tau \leqslant \vartheta} \|X(t, \tau)\|)$$

Здесь $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица для уравнения $dx/dt = A(t)x$, $\|X(t, \tau)\| = \max_y |X(t, \tau)y|_e$, $y \in R^n$, $|y|_e \leqslant 1$.

3°. $\rho^{(q)}(\tau, z, \nu) = \rho^{(q)}(\tau, \{v, 0\}, \nu) + w_{n+1}$.

4°. $\rho^{(q)}(\vartheta, z, \nu) = |w| + w_{n+1}$, где $|\cdot|$ — та же самая норма, что и в (1.5).

5°. *Свойство u-стабильности.* Каковы бы ни были позиция $\{\tau_*, z[\tau_*], \nu[\tau_*]\}$, число $\varepsilon > 0$, $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ и кусочно-постоянная функция $v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, удовлетворяющая условию

$$|v_*[\tau]|_e \leqslant q, \ \tau_* \leqslant \tau < \tau^*, \ I_{v_*}(\tau_*, \tau^*) \leqslant \nu[\tau_*] \tag{2.5}$$

найдется кусочно-постоянная реализация $u_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, такая, что для соответствующего движения $z[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ выполнено неравенство

$$\rho^{(q)}(\tau^*, z[\tau^*], \nu[\tau^*]) \leqslant \rho^{(q)}(\tau_*, z[\tau_*], \nu[\tau_*]) + \varepsilon(\tau^* - \tau_*),$$
$$\nu[\tau^*] = \nu[\tau_*] - I_{v_*}(\tau_*, \tau^*) \tag{2.6}$$

6°. *Свойство v-стабильности.* Каковы бы ни были позиция $\{\tau_*, z[\tau_*], \nu[\tau_*]\}$, число $\varepsilon > 0$, $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ и кусочно-постоянная функция $u_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, найдется кусочно-постоянная функция $v_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, удовлетворяющая условию (2.5) так, что для соответствующего движения $z[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ выполнено неравенство, отличающееся от (2.6) заменой знака $\leqslant$ на $\geqslant$ и $\varepsilon$ на $-\varepsilon$.

Можно доказать, что для всякой позиции $\{\tau, z, \nu\}$ существует предел

$$\rho(\tau, z, \nu) = \lim_{q \to +\infty} \rho^{(q)}(\tau, z, \nu) \tag{2.7}$$

Функция $\rho(\cdot)$, так же как и функция $\rho^{(q)}(\cdot)$, обладает свойствами 1° — 4°. Проведя рассуждения по схеме из работы [2] с учетом равенства (2.7) и свойств 2° — 6° для функций $\rho^{(q)}(\cdot)$, можно установить следующий результат.

*Теорема 2.1.* Для любой исходной позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$ объекта (1.1) справедливо равенство $c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*]) = \rho(t_*, \{x_*, 0\}, \nu[t_*])$

Оптимальная стратегия $u^\circ(\cdot)$ строится как функция переменных $\{t, x, \nu, \varepsilon\}$ в соответствии с условием

$$\langle l^\circ \cdot B(t)\, u^\circ\rangle + \overset{\circ}{l}_{n+1} \langle u^\circ \cdot \Phi(t)\, u^\circ\rangle = \min_{u \in R^r} \{\mathrm{Idem}\,(u^\circ \to u)\}$$
$$\rho(t, \{x - l^\circ, 0\}, \nu) - \overset{\circ}{l}_{n+1} = \min_{\{l, l_{n+1}\}} [\rho(t, \{x - l, 0\}, \nu) - l_{n+1}]$$
$$|l|_e^2 + l_{n+1}^2 \leqslant (\varepsilon + \varepsilon(t - t_0)) \exp(2\lambda(t - t_0)) \tag{2.8}$$

где Idem означает выражение, стоящее в левой части равенства при указанной в скобках замене символов. При этом для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0]$, $\varepsilon > 0$ будет справедливо неравенство ($T$ — знак транспонирования)

$$|u^\circ|_e \leqslant M, \quad M = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \max_{|y|_e \leqslant 1} \{|\Phi^{-1}(t) B^T(t) y|_e \lambda\} \tag{2.9}$$

3. Перейдем к построению контрстратегии, которая формирует наименее благоприятные реализации помех. Справедлива следующая лемма.

*Лемма 3.1*. Какова бы ни была позиция $\{\tau, z, \nu\}$ модели (2.2), справедливо неравенство

$$\rho^{(a)}(\tau, z, \nu) \geqslant \rho^{(b)}(\tau, z, \nu), \quad a \geqslant b$$

В зависимости от вида матрицы-функции $C(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ в (1.1) и (2.1) будем различать невырожденный и вырожденный случаи.

1. Если для любого числа $\alpha \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\max_t \|C(t)\| > 0, \quad \|C(t)\| = \max_{y \in R^s, \, |y|_e \leqslant 1} |C(t) y|_e, \quad t \in [\vartheta - \alpha, \vartheta]$$

то имеем невырожденный случай. Рассмотрим его подробнее.

Можно установить справедливость следующего утверждения.

*Лемма 3.2*. Пусть выбраны произвольно шар $D_\mu = \{|x|_e < \mu, x \in R^n\}$ и отрезок $[t_0, \alpha] \subset [t_0, \vartheta]$, $\alpha < \vartheta$. Тогда найдется такое число $q^\circ = q^\circ(\mu, \alpha)$, что для всех $q \geqslant q^\circ$ будет справедлива оценка

$$\rho^{(q)}(t, \{x, 0\}, \nu_2) - \rho^{(q)}(t, \{x, 0\}, \nu_1) \geqslant F_{\alpha\mu}(\nu_2 - \nu_1)$$

$$F_{\alpha\mu} > 0, \ \nu_2 \geqslant \nu_1, \ \nu_1 \in [0, \nu[t_0]], \ \nu_2 \in [0, \nu[t_0]], \ x \in D_\mu, \ t \in [t_0, \alpha]$$

При этом $F_{\alpha\mu} \to 0$, если $\alpha \to \vartheta$.

Исходя из определения $(\beta, \nu)$ — $Q$-процедур для позиций $\{\tau, z, \nu\}$ модели (2.2) и учитывая свойства 1°, 2° для функций $\rho^{(q)}(\cdot)$, можно доказать следующую лемму.

*Лемма 3.3*. Пусть выбрано какое-либо число $\alpha \in [t_0, \vartheta)$. Тогда последовательность функций $\rho^{(q)}(t, \{x, 0\}, \nu)$ равномерно сходится к функции оптимального гарантированного результата $c^\circ(t, x, \nu)$ на множестве $\{[t_0, \alpha] \times R^n \times [0, \nu[t_0]]\}$ при $q \to +\infty$.

Выберем некоторое число $\alpha > 0$ и строим контрстратегии $v_\alpha^{(q)}(\cdot)$ в соответствии с условием

$$\langle l^\circ \cdot C(t) v_\alpha^{(q)}(t, x, \nu, \varepsilon)\rangle - \overset{\circ}{l}_{n+1} \langle v_\alpha^{(q)}(t, x, \nu, \varepsilon) \Psi(t) v_\alpha^{(q)}(t, x, \nu, \varepsilon)\rangle =$$
$$= \min_{v \in R^s} \{\mathrm{Idem}(v_\alpha^{(q)}(t, x, \nu, \varepsilon) \to v)\}$$

$$\rho^{(q)}(t, \{x - l^\circ, 0\}, \nu - \overset{\circ}{l}_{n+1}) = \max_{\{l, l_{n+1}\}} [\rho^{(q)}(t, \{x - l, 0\}, \nu - l_{n+1})]$$

$$|l|_e^2 + l_{n+1}^2 \leqslant (\varepsilon + \varepsilon(t - t_0)) \exp(2\lambda(t - t_0)), \quad t \in [t_0, \vartheta - \alpha] \tag{3.1}$$

$$v_\alpha^{(q)}(t, x, \nu, \varepsilon) \equiv 0, \quad t \in (\vartheta - \alpha, \vartheta] \tag{3.2}$$

Если провести рассуждения по схеме из работ [1, 2] с учетом лемм 3.2, 3.3 и свойства 6° для функций $\rho^{(q)}(\cdot)$ то можно установить справедливость неравенства

$$c(v_\alpha^{(q)}(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) \geqslant c^0(t_*, x_*, \nu[t_*]) - [\psi(q) + A_* \sqrt{\vartheta - \alpha}],$$
$$A_* > 0, \ \psi(q) > 0 \tag{3.3}$$

какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $x_* \in R^n$, $\nu[t_*] \in [0, \nu[t_0]]$, в (3.3) функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условию $\lim \psi(q) = 0$

при $q \to +\infty$. В силу оценки (3.3) будет справедливо следующее утверждение.

*Теорема 3.1.* Для любого $\zeta > 0$ найдется контрстратегия $v_\zeta(\cdot)$, гарантирующая результат

$$c(v_\zeta(\cdot), t_*, x_*, \nu[t_*]) \geqslant c^\circ(t_*, x_*, \nu[t_*]) - \zeta$$

для любой исходной позиции $\{t_*, x_*, \nu[t_*]\}$.

С учетом леммы 3.1, теоремы 3.1 и соотношения (3.3) можно установить, что контрстратегия $v^\circ(\cdot)$, гарантирующая результат $c^\circ(t, x, \nu)$ для всякой исходной позиции $\{t, x, \nu\}$ объекта (1.1), строится согласно условию

$$\langle l^\circ \cdot C(t) v^\circ \rangle - \overset{\circ}{l}_{n+1} \langle v^\circ \cdot \Psi(t) v^\circ \rangle = \min_{v \in R^s} \{\mathrm{Idem}(v^\circ \to v)\}$$

$$\rho^{(q(\varepsilon))}(t, \{x - l^\circ, 0\}, \nu - \overset{\circ}{l}_{n+1}) = \max_{\{l, l_{n+1}\}} [\rho^{(q(\varepsilon))}(t, \{x - l, 0\}, \nu - l_{n+1})$$

$$|l|_e^2 + l_{n+1}^2 \leqslant (\varepsilon + \varepsilon(t - t_0)) \exp(2\lambda(t - t_0)), \quad t \in [t_0, \vartheta - \alpha(\varepsilon)] \qquad (3.4)$$

$$v^\circ = 0, \quad t \in (\vartheta - \alpha(\varepsilon), \vartheta] \qquad (3.5)$$

где $\alpha(\cdot)$, $q(\cdot)$ — любые функции, удовлетворяющие условиям $\alpha(\varepsilon) > 0$, $q(\varepsilon) > 0$, $\lim \alpha(\varepsilon) = 0$, $\lim q(\varepsilon) = +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

2. Если для матрицы-функции $C(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ не выполнены условия предыдущего случая, то тогда существует величина

$$\eta^* = \min[\eta: \max_t \|C(t)\| = 0, \ \eta \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \eta \geqslant t_0]$$

Имеем дело с вырожденным случаем. Воздействие помехи на объект (1.1) происходит только на отрезке времени $[t_0, \eta^*]$. Формулировки лемм 3.2, 3.3, теоремы 3.1 и построение контрстратегий $v_\alpha^{(q)}(\cdot)$, $v^\circ(\cdot)$ будут осуществляться так же, как и в первом случае, но с той лишь разницей, что теперь роль конечного момента $\vartheta$ в формулировках лемм 3.2, 3.3 и в (3.1)—(3.5) будет играть величина $\eta^*$. Следовательно, и в этом случае строится контрстратегия, гарантирующая результат $c^\circ(t, x, \nu)$ для любой позиции $\{t, x, \nu\}$ объекта (1.1).

4. Рассмотрим модельный пример. Пусть управляемый объект описывается системой двух скалярных дифференциальных уравнений

$$x_i^{\cdot} = k u_i + n e^{\alpha t} v_i, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad i = 1, 2 \qquad (4.1)$$

где $k, n, \alpha$ — положительные постоянные, $x = \{x_1, x_2\}$ — фазовый вектор, $u = \{u_1, u_2\}$ — вектор управляющего воздействия, $v = \{v_1, v_2\}$ — вектор помехи; $t_0$, $\vartheta$ фиксированы. Реализациями управляющего воздействия $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ могут быть произвольные ограниченные измеримые функции, каждая возможная реализация помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ удовлетворяет ограничению

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v[t]|_e^2 dt \leqslant \nu[t_0], \quad \nu[t_0] > 0, \quad |v[t]|_e = (v_1^2[t] + v_2^2[t])^{1/2}$$

Пусть выбрана исходная позиция $\{\tau_*, x_*, \nu[\tau_*]\}$, а также задан показатель качества в виде

$$\gamma = |x[\vartheta]|_e + \int_{\tau_*}^{\vartheta} |u[\tau]|_e^2 d\tau$$

Используя результаты из работы [3], можно установить, что величина $c^\circ(\tau_*, x_*, \nu[\tau_*])$ определяется равенством

$$c^\circ(\tau_*, x_*, \nu[\tau_*]) = \max_{|m|_e \leqslant 1} \{\langle m \cdot x_* \rangle + \varphi(m, \nu[\tau_*])\} \qquad (4.2)$$

Функция $\varphi(m, \nu)$ определяется при каждых $m, \nu$ ($|m|_e \leqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0]$) согласно условию

$$\varphi(m, \nu) = \sup_{Q[\cdot]} \int_{\tau_*}^{\vartheta} \{\psi(m, Q[\tau], \tau)\}_* \, d\tau$$

$$\psi(m, Q[\tau], \tau) = \min_{u \in R^2} \max_{|v|_e \leqslant Q[\tau]} [k\langle m \cdot u\rangle + ne^{\alpha\tau}\langle m \cdot v\rangle + |u|_e^2], \quad \tau_* \leqslant \tau < \vartheta \quad (4.3)$$

где символом $\varphi(\cdot) = \{\psi(\cdot)\}_*$ обозначена верхняя вогнутая оболочка функции $\psi(m)$, $|m|_e \leqslant 1$. Здесь верхняя грань берется по всем измеримым функциям $Q[\cdot]$, удовлетворяющим условию

$$\int_{\tau_*}^{\vartheta} Q^2[\tau] \, d\tau \leqslant \nu$$

В данном примере при каждых $m, \nu$ найдется такая функция

$$\overset{\circ}{Q}_{m\nu}[\cdot] = \{\overset{\circ}{Q}_{m\nu}[\tau], \tau_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta\} \quad (4.4)$$

что в (4.3) достигается максимум. Решая задачу (4.3), можно установить, что функция $\overset{\circ}{Q}_{m\nu}[\cdot]$ при каждых $m, \nu$ определяется в зависимости от значений

$$\tau_m{}^* = (2\alpha)^{-1} \ln [(k^2\lambda_m)/n^2]$$

$$\lambda_m = \{(|m|_e^2 - 1)k^2 + [(|m|_e^2 - 1)^2k^4 + 32\alpha n^2\nu\ (e^{2\alpha\vartheta} - |m|_e^2 e^{2\alpha\tau_*})]^{1/2}\}/(16\alpha\nu)$$

следующими соотношениями:

$$\overset{\circ}{Q}_{m\nu}[\cdot] = A(2\lambda_m)^{-1} ne^{\alpha\tau}, \quad A = \begin{cases} |m^e|, & \tau_* \leqslant \tau < \tau_m{}^* \\ 1, & \tau_m{}^* \leqslant \tau < \vartheta \end{cases}$$

если $\tau_m{}^* \in [\tau_*, \vartheta]$, и $\overset{\circ}{Q}_{m\nu}[\tau] = (2\lambda_+)^{-1}ne^{\alpha\tau}$, если $\tau_m{}^* < \tau_*$ или $\tau_m{}^* > \vartheta$.

$$\lambda_+ = {}^1/_2 \sqrt{2}\,(n/(2\sqrt{\alpha\nu}))(e^{2\alpha\vartheta} - e^{2\alpha\tau_*})^{1/2}$$

Пусть выбрано разбиение $\Delta_\delta$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$. В соответствии с описанным ранее алгоритмом оптимальное управление $u[\tau_i] = u^\circ(\tau_i, x[\tau_i], \nu[\tau_i], \varepsilon, \Delta_\delta)$ и самая неблагоприятная помеха $v[\tau_i] = v^\circ(\tau_i, x[\tau_i], \nu[\tau_i], \varepsilon, \Delta_\delta)$ строятся из условий

$$k\langle m^\circ[\tau_i] \cdot u[\tau_i]\rangle + |u[\tau_i]|_e^2 = \min_{u \in R^2} \{\mathrm{Idem}\,(u[\tau_i] \to u)\}$$

$$\max_{|g|_e \leqslant 1} \{\langle g \cdot (x[\tau_i] - m^\circ[\tau_i])\rangle + \varphi(g, \nu[\tau_i])\} = \min_m \{\mathrm{Idem}\,(m^\circ[\tau_i] \to m)\},$$

$$|m|_e^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon(\tau_i - t_0)$$

$$ne^{\alpha\tau_i} < l^\circ[\tau_i] \cdot v[\tau_i]\rangle - l_3{}^\circ[\tau_i]\,|v[\tau_i]|_e^2 = \min_{v \in R^2} \{\mathrm{Idem}\,(v[\tau_i] \to v)\}$$

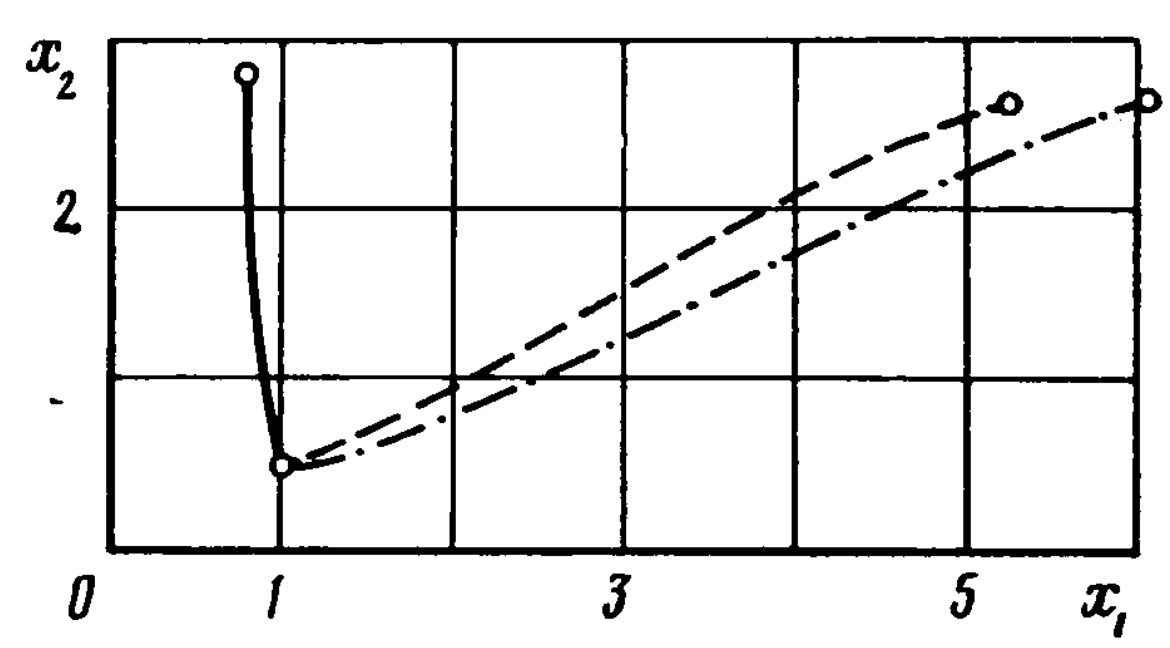
$$\max_{|g|_e \leqslant 1} \{\langle g \cdot (x[\tau_i] - l^\circ[\tau_i])\rangle + \varphi(g, \nu[\tau_i] - l_3{}^\circ[\tau_i])\} =$$

$$= \max_{\{l, l_3\}} \{\mathrm{Idem}\,(l^\circ[\tau_i] \to l,\ l_3{}^\circ[\tau_i] \to l_3)\}, \quad |l|_e^2 + l_3^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon(\tau_i - t_0)$$

Если к некоторому моменту $\tau^\circ$ ресурс для помехи истратится полностью, то полагаем $v[\tau] = 0$, $\tau^\circ \leqslant \tau < \vartheta$.

Процесс управления для рассматриваемого объекта был смоделирован на ЭВМ для следующих значений параметров:

$\alpha = 2$, $k = 1$, $n = 2$, $t_0 = 0$, $\vartheta = {}^1/_2$, $\tau_* = t_0$
$x_1[\tau_*] = 1$, $x_2[\tau_*] = {}^1/_2$, $\nu[\tau_*] = 4$, $\varepsilon = 0{,}03$




На фигуре сплошной линией представлено движение, порожденное оптимальным управлением и помехой $v = \{0{,}5 \sin \tau\}$; значение показателя $\gamma = 3{,}02$; оптимальный гарантированный результат для позиции $\{0, \{1, {}^1/_2\}, 4\}$ равен $c^\circ = c^\circ(0, \{1, {}^1/_2\}, 4) = 6{,}05$, т. е. $\gamma < c^\circ$.

Штриховой линией представлено движение, порожденное оптимальным управлением и самой неблагоприятной помехой; значение показателя $\gamma = 5{,}98 \approx c^\circ$.

Штрихпунктирной линией представлено движение, которое порождено управлением $u = \{\cos \tau, \sin \tau\}$, не являющимся оптимальным, и самой неблагоприятной помехой, в этом случае $\gamma = 7{,}09 > c^\circ$.

В последних двух случаях $\nu[\vartheta] \approx 0$, т. е. первоначальный ресурс для помехи $\nu[\tau_*]$ истрачивается полностью.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за большую помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Одна задача оптимального управления на минимум гарантированного результата // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 6—23.
3. *Красовский А. Н.* Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186—192.

Свердловск

Поступила в редакцию
20.VII.1989