

УДК 62—50

© 1990 г.

М. А. Зарх

УНИВЕРСАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ВТОРОГО ИГРОКА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания, выпуклой терминальной функцией платы и геометрическими ограничениями на управления игроков.

В одном из вариантов построения оптимальной стратегии второго (максимизирующего) игрока, использующем минимальную информацию о функции цены, стратегия реализована в виде кусочно-программного управления и требует задания некоторых параметров, зависящих от начальной позиции [1].

Ниже предлагается стратегия второго игрока, в которой синтез управления по принципу обратной связи осуществляется при помощи поверхностей переключения. Оптимальность стратегии может нарушаться лишь при возникновении скольжения по поверхностям переключения. Подобная конструкция рассматривалась [2] для первого игрока в случае скалярного управления.

1. Постановка задачи. Пусть динамика объекта описывается соотношениями

$$y' = B(t)u + C(t)v, \quad y \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q \quad (1.1)$$

Здесь u, v — векторные управляющие параметры первого и второго игроков, P, Q — выпуклые компакты. Процесс управления заканчивается в заданный момент ϑ . Показатель качества определяется значением выпуклой терминальной функции $\gamma(y(\vartheta))$ на положении $y(\vartheta)$. Первый игрок минимизирует, а второй максимизирует величину $\gamma(y(\vartheta))$. Требуется указать способ построения оптимальной стратегии второго игрока в игре (1.1).

Обозначим Γ функцию цены игры (1.1). Зафиксируем промежуток $T = [t_0, \vartheta]$, число c^* и невозрастающую функцию $c_*(t): c^* > c_*(t) > \min_x \Gamma(t, x)$. Будем считать, что множество $\Omega = \{(t, x) \in T \times R^n: c_*(t) \leq \Gamma(t, x) \leq c^*\}$ содержит область рассматриваемых начальных позиций. Пусть $W_c = \{(t, x) \in T \times R^n: \Gamma(t, x) \leq c\}$ — множество уровня функции Γ и $W_c(t) = \{x \in R^n: (t, x) \in W_c\}$ — его сечение в момент t . Известно, что для всех $t \leq \vartheta$ функция $\Gamma(t, \cdot)$ выпукла. Следовательно, множества $W_c(t)$ также выпуклы. Дополнительно предположим, что при всех $t \in T, c_*(t) \leq c \leq c^*$ множества $W_c(t)$ ограничены и имеют непустую внутренность.

2. Общая форма задания оптимальной стратегии второго игрока. Определим оптимальную стратегию второго игрока, существование и вид которой установлены в [3]¹. Далее определим ее обобщение.

Введем необходимые обозначения. Для $l \in R^n$ и $t \leq \vartheta$ положим

$$Q(l, t) = \{\bar{q} \in Q: l' C(t) \bar{q} = \max_{q \in Q} l' C(t) q\}$$

¹ См. также Зарх М. А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. Свердловск, 1985. 35 с. — Деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438—В—85.

Символом $\rho(\cdot, W)$ обозначим опорную функцию. Сопоставим с каждой позицией $(t, x) \in \Omega$ конус

$$K(t, x) = \{l \in R^n: l'x = \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))\}$$

Конус $K(t, x)$ иначе можно определить как коническую оболочку субдифференциала в точке x функции $\Gamma(t, \cdot)$. Отметим, что $K(t, x)$ — выпуклый, замкнутый конус, отличный от нуля и не содержащий линейных подпространств. Пусть $L(t, x)$ — совокупность единичных крайних векторов конуса $K(t, x)$. Крайним называется [4] вектор, который не может быть представлен в виде суммы двух линейно независимых векторов конуса.

Определим стратегию второго игрока

$$V^\circ(t, x) = \bigcup_{l \in L(t, x)} Q(l, t), (t, x) \in \Omega; \quad V^\circ(t, x) = Q, (t, x) \notin \Omega$$

Стратегия V° оптимальна [3] для любой начальной позиции из области Ω . Задание стратегии вне Ω носит формальный характер и не существенно.

Введем новую стратегию

$$\bar{V}^\circ(t, x) = \bigcup_{l \in \bar{L}(t, x)} Q(l, t)$$

где

$$\bar{L}(t, x) = \{l = \lim l_k: l_k \in L(t_k, x_k), (t, x) = \lim (t_k, x_k)\}$$

Укажем основные свойства ² стратегии \bar{V}° : стратегия \bar{V}° оптимальна в Ω , справедливо вложение $V^\circ(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$, отображение $\bar{V}^\circ: (t, x) \rightarrow \bar{V}^\circ(t, x)$ полунепрерывно сверху по включению.

Заметим, что стратегия \bar{V}° многозначна, т. е. оптимальное в позиции (t, x) управляющее воздействие второго игрока, вообще говоря, не единственно, а может выбираться из подмножества $\bar{V}^\circ(t, x)$ компакта Q . Если V^* — некоторая стратегия, удовлетворяющая в каждой позиции (t, x) вложению $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$, то она оптимальна в Ω .

3. Поверхности переключения. Рассмотрим частные случаи, когда построение стратегии V^* осуществляется в удобной для численной реализации форме при помощи поверхностей переключения.

Пусть множество $Q \subset R^s$ — параллелепипед вида

$$Q = \{q = (q_1, \dots, q_s) \in R^s: |q_i| \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s\}$$

Пусть e_i — i -й орт пространства R^s , $h_i(t) = C(t)e_i$ — i -й столбец матрицы $C(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Положим

$$\Pi_i(t) = \{x \in R^n: \Gamma(t, x) = \min \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)), \lambda \in R^1\}$$

$$D_i^+(t) = \{x \in R^n: x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t), \lambda \geq 0\}$$

$$D_i^-(t) = \{x \in R^n: x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t), \lambda \leq 0\}$$

Множество $\Pi_i(t)$ разбивает пространство R^n на две части: $D_i^+(t)$ и $D_i^-(t)$. Назовем $\Pi_i(t)$ поверхностью переключения (ПП). Следующее утверждение поясняет смысл такого названия. Обозначим

$$G_i^+ = \{q \in Q: q_i = v_i\}, \quad G_i^- = \{q \in Q: q_i = -v_i\}$$

² Доказательства приведены в работе: Зарх М. А. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре. М., 1989. 19 с.— Деп. в ВИНТИ, № 6840—В89.

Утверждение 1. Пусть $(t, x) \in \Omega$. Условия

$$x \in D_i^+(t) \quad (x \in D_i^-(t)) \quad (3.1)$$

$$l'h_i(t) > 0 \quad \forall l \in \bar{L}(t, x) \quad (l'h_i(t) < 0 \quad \forall l \in \bar{L}(t, x)) \quad (3.2)$$

$$\bar{V}^\circ(t, x) \in G_i^+ \quad (\bar{V}^\circ(t, x) \in G_i^-) \quad (3.3)$$

эквивалентны.

Доказательство. Эквивалентность условий (3.2) и (3.3) следует из определения \bar{V}° и представимости множества Q в виде

$$Q = \{\bar{q} + \lambda e_i: \bar{q} \in G_i, -2v_i \leq \lambda \leq 0\}$$

Покажем эквивалентность (3.1) и (3.2). Пусть выполнено условие (3.1), т. е. $x \in D_i^+(t)$. Это означает, что $x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t)$, $\lambda \geq 0$. Следовательно, $\min_\lambda \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)) = \Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t))$, где $\lambda^* < 0$, $x + \lambda^* h_i(t) \in \Pi_i(t)$. Так как $\Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t)) < \Gamma(t, x)$, то $x + \lambda^* h_i(t) \in \text{int } W_{\Gamma(t, x)}(t)$. Поэтому $l'(x + \lambda^* h_i(t)) < \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))$ для всех $l \in R^n$, $l \neq 0$. При $l \in \bar{L}(t, x)$ имеем $\rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t)) = l'x$. Стало быть, $l'(x + \lambda^* h_i(t)) < l'x$. Значит, $l'h_i(t) > 0$ для $l \in \bar{L}(t, x)$.

Обратно, пусть выполнено условие (3.2). Так как любой ненулевой вектор конуса представим в виде суммы крайних векторов (теорема 18.5 [4], с. 183), то $l'h_i(t) > 0$ для $l \in K(t, x)$, $l \neq 0$. Следовательно, $l'(x + \lambda h_i(t)) < \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))$ при $\lambda < 0$ и $l \in K(t, x)$, $l \neq 0$. Поэтому для близких к нулю отрицательных λ имеем $x + \lambda h_i(t) \in \text{int } W_{\Gamma(t, x)}(t)$. Значит, $\min_\lambda \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)) = \Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t)) < \Gamma(t, x)$, $\lambda^* < 0$. В силу выпуклости функции $\varphi(\lambda) = \Gamma(t, x + \lambda h_i(t))$ она возрастает на промежутке $(\lambda^*, +\infty)$. Следовательно, $x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t)$ при $\lambda \geq 0$.

Из утверждения 1 видно, что в области $D_i^+(t)$ ($D_i^-(t)$) все векторы из множества $\bar{V}^\circ(t, x)$ имеют i -ю компоненту, равную v_i ; ($-v_i$).

Определим стратегию $V^*(t, x) = (V_1^*(t, x), \dots, V_s^*(t, x))$ в виде

$$V_i^*(t, x) = \begin{cases} \pm v_i, & x \in D_i^\pm(t) \\ \{-v_i, v_i\}, & x \in \Pi_i(t); i = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

Ниже будут сформулированы условия, при которых $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$, т. е. V^* — оптимальная стратегия.

Введем дополнительные обозначения

$$G_i(t, x) = \begin{cases} G_i^\pm, & x \in D_i^\pm(t) \\ Q, & x \in \Pi_i(t); i = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

$$G(t, x) = \bigcap_{i=1}^s G_i(t, x), \quad I(t, x) = \{i \in 1, 2, \dots, s: x \in \Pi_i(t)\}$$

Предложение 1. $V^*(t, x)$ есть совокупность вершин грани $G(t, x)$.

Предложение 2. Если $I(t, x) = \emptyset$, то $G(t, x)$ — одноточечное множество и $G(t, x) = V^*(t, x) = \bar{V}^\circ(t, x)$.

Предложение 2 является прямым следствием определения V^* и утверждения 1.

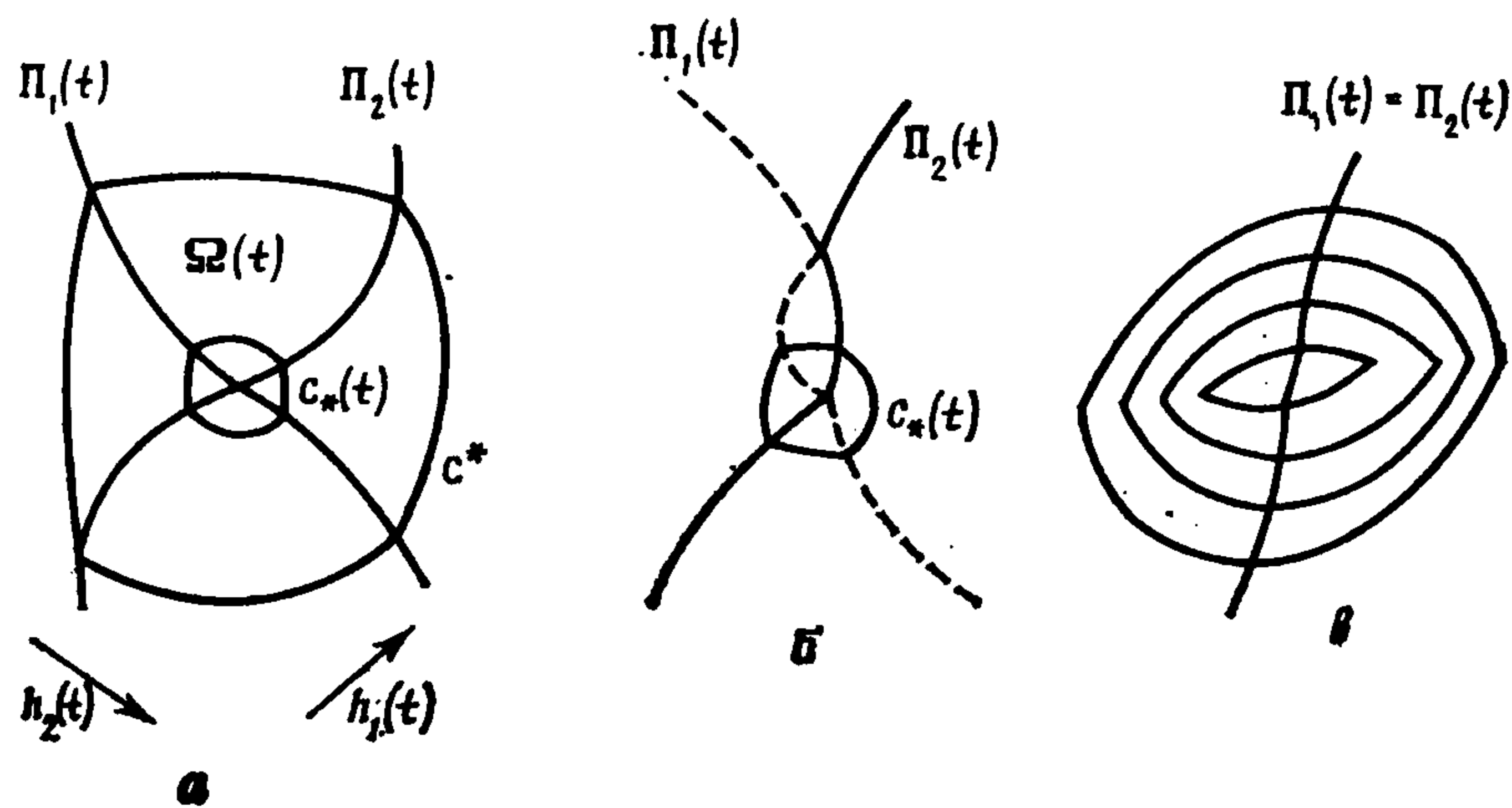
Условие А. Для любой вершины g грани $G(t, x)$ найдется такая последовательность точек $\{x_k\}$, что $x_k \rightarrow x$, $I(t, x_k) = \emptyset$ и $G(t, x_k) = g$.

Отметим, что в точках, не принадлежащих ПП, условие А выполнено. Для проверки достаточно взять последовательность $x_k \equiv x$ и сослаться на предложение 2.

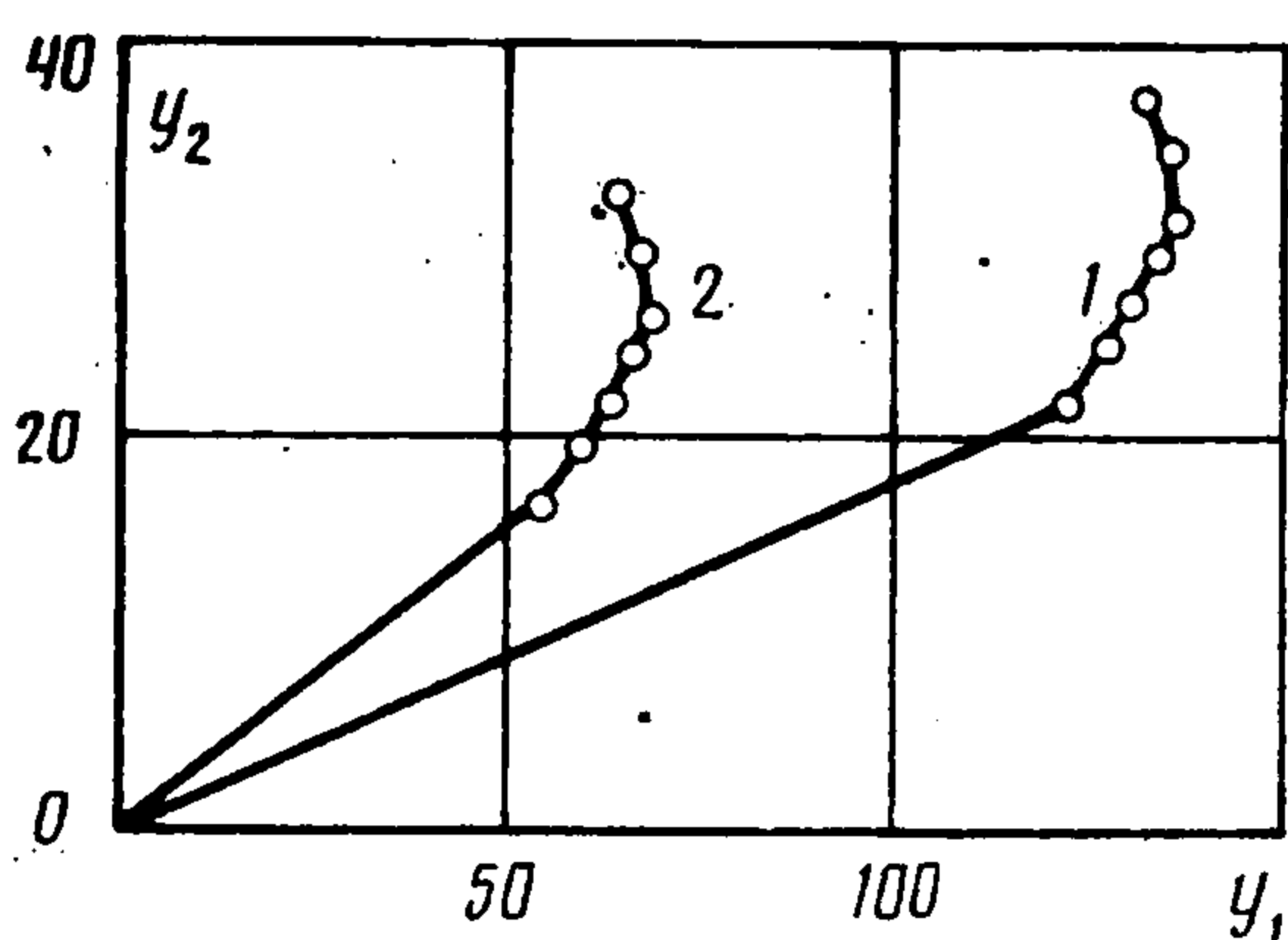
Предложение 3. Если в точке (t, x) выполнено условие А, то

$$V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x) \quad (3.4)$$

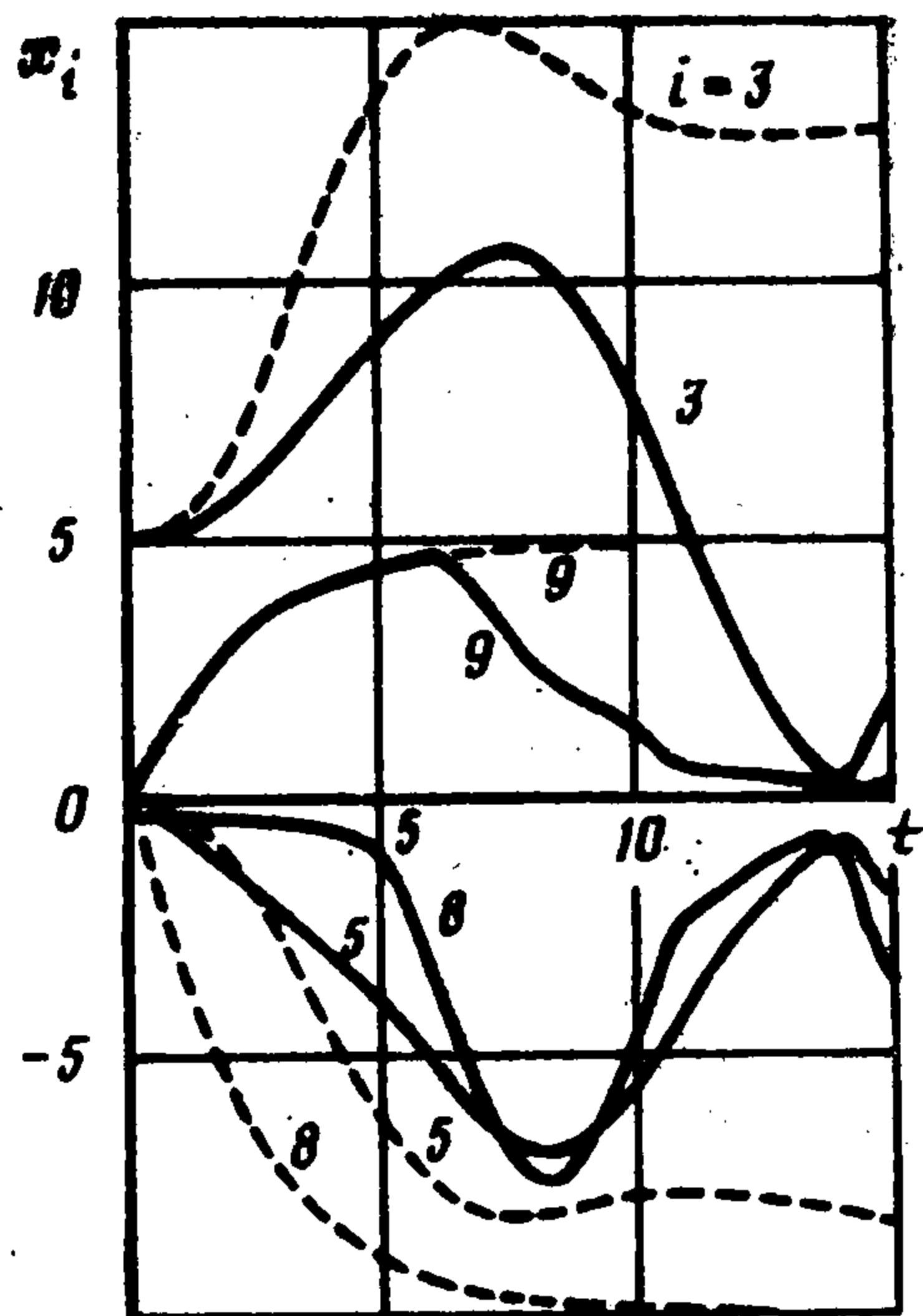
Действительно, из полунепрерывности \bar{V}° и предложения 2 следует, что каждая вершина грани $G(t, x)$ содержится в множестве $\bar{V}^\circ(t, x)$. Но совокупность всех вершин грани $G(t, x)$ совпадает с $V^*(t, x)$. Стало быть, $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие Б. Существует такой вектор $l \in \bar{L}(t, x)$, что $l'h_i(t) = 0$ для всех $i \in I(t, x)$.

Предложение 4. Пусть $I(t, x) \neq \emptyset$ и выполнено условие Б. Тогда справедливо условие вложения (3.4).

Действительно, для вектора l из условия Б величина $l'C(t)q$ сохраняет постоянное значение на $G(t, x)$. Учитывая вложение $\bar{V}^\circ(t, x) \subset G(t, x)$, следующее из утверждения 1, получаем $\bar{V}^\circ(t, x) = G(t, x)$. Отсюда, в силу предложения 1, вытекает справедливость вложения (3.4).

Из предложений 1—4 следует:

Теорема 1. Если в Ω для каждой точки, принадлежащей хотя бы одной ПП, выполнено условие А или условие Б, то стратегия V^* оптимальна в Ω .

Дадим геометрическую интерпретацию условий А и Б для случая $n = s = 2$. Выполнение условия А означает, что множества $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$ — линии и либо не пересекаются в $\Omega(t) = \{x \in R^2: (t, x) \in \Omega\}$ (фиг. 1, а), либо точки их пересечения изолированы (фиг. 1, б). Условие Б выполнено, например, если в точках множеств $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$ граница $W_{\Gamma(t, x)}(t)$ является гладкой (фиг. 1, в).

Замечания. 1°. Для практической реализации стратегии V^* факт невыполнения условий А, Б не имеет большого значения. Именно, стратегия V^* дает оптимальный результат, если не возникает скользящего режима на ПП.

2°. Способ управления при помощи ПП можно использовать и в случае, когда множество $Q \subset R^s$ представимо в виде суммы отрезков

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m, \quad Q_i = [-q^i, q^i] \subset R^s$$

Действительно, переписав игру (1.1) в виде

$$y' = B(t)u + C(t)Ev, \quad y \in R^n$$

$$u \in P, \quad v \in Q^1 = \{q \in R^m: |q_r| \leq 1, r = 1, 2, \dots, m\}$$

где E — матрица, строки которой — векторы q^i , приходим к изученному случаю.

4. Пример. Используем описанный метод построения стратегии второго игрока для формирования наилучшего ветрового возмущения в задаче управления продольным движением самолета на посадке [1, 5—8].

Линеаризованные относительно номинального движения по глиссаде снижения при допущении о постоянстве силы тяги дифференциальные уравнения продольного движения центра масс самолета имеют вид [7]

$$\begin{aligned} x_j' &= x_{j+1}, \quad j = 1, 3, 5; \quad x_7' = -4x_7 + 4u \\ x_2' &= -0,05x_2 - 0,097x_4 - 0,046x_5 + 0,001x_7 + 0,05x_8 + 0,097x_9 \\ x_4' &= 0,241x_2 - 0,639x_4 + 0,79x_5 + 0,026x_7 - 0,241x_8 + 0,639x_9 \\ x_6' &= 0,017x_2 + 0,398x_4 - 0,501x_5 - 0,526x_8 - 0,383x_7 - 0,017x_8 - 0,398x_9 \\ x_{8,9}' &= \frac{1}{2}x_{8,9} + \frac{1}{2}x_{10,11}, \quad x_{10,11}' = -3x_{10,11} + 3v_{1,2} \\ &|u| \leq 20, \quad |v_1| \leq 10, \quad |v_2| \leq 5 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Координаты x_1, x_3 — продольное и вертикальное отклонения центра масс самолета (м), x_5 — отклонение по углу тангажа (град). Координата x_7 имеет смысл отклонения руля высоты (град), параметр u — «заданное» отклонение руля высоты (град). Координаты x_8, x_9 — отклонения продольной и вертикальной составляющих скорости ветра (м/с) относительно средних значений. Средние значения учтены при расчете номинального движения и равны соответственно -5 и 0 . Компоненты x_8, x_9 определяются формируемыми значениями параметров v_1, v_2 . Будем считать, что параметры v_1, v_2 принадлежат второму игроку, параметром u распоряжается первый игрок.

Зафиксируем промежуток времени $T = [0, 15]$. Содержательно момент $\vartheta = 15c$ считаем моментом пролета торца взлетно-посадочной полосы. Введем функцию платы $\gamma(x_3, x_4) = \min \{c \geq 0: (x_3, x_4) \in cM\}$, где M — шестиугольник с вершинами $(-3, 1), (0, 1), (3, 0), (3, -1), (0, -1), (-3, 0)$. Условимся, что первый игрок минимизирует, а второй максимизирует значение платы γ в момент ϑ .

Зависимость функции платы лишь от двух координат фазового вектора позволяет перейти к эквивалентной игре второго порядка. Переход осуществляется при помощи замены $y(t) = X(\vartheta, t)x(t)$, где $X(\vartheta, t)$ — матрица, составленная из третьей и четвертой строк фундаментальной матрицы Коши $\exp[A(\vartheta - t)]$. Эквивалентная игра второго порядка имеет вид

$$y' = X(\vartheta, t)Bu + X(\vartheta, t)Cv, \quad \gamma(y_1, y_2) \quad (4.2)$$

$$u \in P = [-20, 20], \quad v \in Q = \{(v_1, v_2): |v_1| \leq 10, |v_2| \leq 5\}$$

Если $V^*(t, y)$ ($U^*(t, y)$) — оптимальная стратегия второго (первого) игрока в игре (4.2), то стратегия $V_*(t, x) = V^*(t, X(\vartheta, t)x)$ ($U_*(t, x) = U^*(t, X(\vartheta, t)x)$) оптимальна в игре (4.1).

Зафиксируем набор $C = \{0,6; 0,8; 1,0; 1,5; 2,0; 4,0; 6,0\}$ значений параметра c и шаг $\kappa = 0,05$, разбивающий отрезок времени $T = [0, 15]$ точками t_i . При каждом $c \in C$ численно построенные множества $W_c(t_i)$ — выпуклые многоугольники. Значение $c = 0,6$ есть наименьшее значение, при котором множества $W_c(t_i)$ не пусты при всех $t_i \in T$.

Стратегия V^* (а следовательно, и стратегия V_*) определяется двумя линиями $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$, зависящими от t . Оптимальное значение компоненты v_k в момент t определяется линией $\Pi_k(t)$, $k = 1, 2$. На фиг. 2 показаны линии $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ для момента $t = 5$. (Кривые 1 и 2 соответственно — пересечение линий $\Pi_1(5), \Pi_2(5)$ с полуплоскостью $y_2 \geq 0$, части $\Pi_1(5), \Pi_2(5)$, лежащие ниже прямой $y_2 = 0$, центрально симметричны относительно нуля кривым 1, 2). Оптимальное значение $v_1(v_2)$ равно $-10(5)$ справа от $\Pi_1(5)$ ($\Pi_2(5)$) и $10(-5)$ слева от $\Pi_1(5)$ ($\Pi_2(5)$).

Введем два способа управления первого игрока. Первый — оптимальная стратегия $U_*(t, x) = U^*(t, X(\vartheta, t)x)$. Численно она задается при помощи линий переключения [2]. При втором способе стратегия \bar{U} задается формулами

$$a = 0,6x_3(t) + 9x_4(t) + 12x_8(t)$$

$$\bar{U}(t, x) = \begin{cases} a, & |a| \leq 20 \\ 20, & a > 20 \\ -20, & a < -20 \end{cases}$$

Данные соотношения грубо моделируют используемый в автопилотах «линейный» закон управления рулем высоты [9].

Шаг дискретной схемы для V_* , U_* , \bar{U} положим равным 0,05.

На фиг. 3 показаны графики изменения координат x_3 , x_5 , x_8 , x_9 для начального состояния $x_{30} = 5$, $x_{j0} = 0$, $j \neq 3$. Значение функции цены в точке $(0, x_0)$ равно 0,6. Сплошные линии соответствуют способу управления U_* , штриховые — способу \bar{U} . Значения платы равны соответственно 0,53 и 5,23. Таким образом, при оптимальном поведении первого игрока получается (в паре со стратегией V_*) значение платы, близкое к значению цены игры в начальной позиции. В случае, когда первый игрок не придерживается оптимальной стратегии, значение платы резко возрастает.

Отметим, что существуют промежутки времени из интервала T , в которых частично или полностью совпадают линии переключения $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$, а граница множеств $W_c(t)$ в точках совпадения имеет явный излом, т. е. нельзя говорить о выполнении условий А, Б. Тем не менее результаты, полученные в процессе моделирования, характеризуют стратегию V_* как практически оптимальную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарх М. А., Пацко В. С. Стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 193—200.
2. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78—85.
3. Зарх М. А., Пацко В. С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 37—70.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
5. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку // Учен. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 1. С. 85—92.
6. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 132—139.
7. Боткин Н. Д., Кейн В. Н., Пацко В. С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке // Позиционное управление с гарантированным результатом. Свердловск: Урал. от-ние АН СССР, 1988. С. 33—44.
8. Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W. W. Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1988. V. 57. N. 1. P. 1—40.
9. Федоров С. М., Дробкин В. В., Михайлов О. И., Кейн В. М. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. М.: Транспорт, 1977. 246 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
3.VII.1989