Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 62—50

И. Ю. Кривонос, В. Г. Покотило, Б. Н. Пшеничный

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ

Рассматривается специальная задача планирования процесса наблюдения при условии, что параметры измерителя зависят от траектории управляемой динамической системы. Такая зависимость возникает, например, когда измерительное устройство расположено на управляемой движущейся платформе (самолете) или на его параметры влияют динамически изменяющиеся характеристики среды (температура). Представляет интерес вопрос о выборе траектории динамической системы, минимизирующей максимально возможную ошибку оценивания (размеры информационного множества) [1, 2]. С формальной точки зрения этот вопрос сводится к задаче оптимального управления с негладким функционалом специального вида. Приводятся необходимые условия оптимальности и строятся некоторые оптимальные процессы наблюдения.

Несмотря на то, что изучаемая проблема может рассматриваться как бесконечномерное обобщение некоторой задачи планирования регрессионного эксперимента [3], полученные результаты представляются авторам новыми и в определенном смысле неожиданными. Управление размерами информационных множеств рассматривалось в работах [4—6].

1. Постановка задачи. Пусть наблюдается сигнал

$$y(t) = a^*(t)\,\theta + \xi(t),\quad t \in [t_0,\ T] \tag{1.1}$$

где $\theta \in R^n$ — неизвестный вектор параметров, $a(t) \in R^n$ — известная вектор-функция, компоненты $a^i(\cdot)$ которой предполагаются линейно независимыми и непрерывными на $[t_0, T]$; неизвестные скалярные возмущения $\xi(t)$ удовлетворяют ограничению

$$\langle \xi^2 \rangle \leqslant 1 \quad \left(\langle f \rangle = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt\right) \tag{1.2}$$

Звездочкой здесь и в дальнейшем обозначается транспонирование, $i = 1, 2, \ldots, n$.

При фиксированном $y(\cdot)$ множество векторов θ, удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2), называется информационным множеством, совместимым с реализовавшимся сигналом [2]. В рассматриваемом случае информационное множество — эллипсоид

$$E(\theta^\circ,\ P) = \{\theta \in R^n : (\theta - \theta^\circ)^* P (\theta - \theta^\circ) \leqslant 1 - h^2\} \tag{1.3}$$

$$\theta^\circ = P^{-1}d,\quad P = P(a(\cdot)) = \langle aa^* \rangle$$

$$d = \langle ay \rangle,\quad h^2 = \langle y^2 \rangle - d^* P^{-1} d$$

Размеры информационного эллипсоида $E(\theta^\circ, P)$ определяются матрицей P и величиной h^2, которая зависит от реализовавшегося сигнала. Если в качестве оценки выбирается центр эллипсоида θ°, то максимально возможная ошибка оценивания совпадает с максимальным собственным числом матрицы P^{-1}.

Замечание. Вектор θ° совпадает с оценкой метода наименьших квадратов для сигнала (1.1). При этом спектр матрицы P определяет дисперсию ошибки при условии, что возмущения описываются стационарными случайными процессами [7].

В дальнейшем предполагается, что $a(\cdot)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$a^{\cdot}(t) = A(t)\,a(t) + B(t)\,u(t), \quad t \in [t_0, T], \quad a(t_0) = a_0, \tag{1.4}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные на $[t_0, T]$ $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы соответственно, причем система (1.4) вполне управляема. В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ выбираются измеримые функции, удовлетворяющие ограничению

$$u(\cdot) \in U \subset L_2^m[t_0, T] \tag{1.5}$$

Здесь U — выпуклое, слабо компактное множество, в качестве которого рассматривается, в частности, эллипсоид в пространстве $L_2^m[t_0, T]$

$$U = \{u(\cdot) : \langle u^* R u\rangle \leqslant \Delta^2\} \tag{1.6}$$

где $R(t)$ — симметрическая, положительно определенная на $[t_0, T]$ матрица.

Тогда имеет смысл следующая

Задача 1. Определить допустимое управление $u_0(\cdot)$, удовлетворяющее ограничению (1.5), и соответствующее решение $a_0(\cdot)$ уравнения (1.4), минимизирующее максимальное собственное число матрицы P^{-1}.

Для удобства в дальнейшем рассматривается эквивалентная задача максимизации минимального собственного числа матрицы P.

2. Необходимые условия оптимальности. *Теорема 2.1.* Пусть $u_0(\cdot)$, $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1, $P_0 = P(a_0(\cdot))$. Тогда найдется симметрическая, неотрицательно определенная матрица M, такая, что справедливы соотношения

$$\langle p^* B u_0\rangle = \max_{u(\cdot)\in U} \langle p^* B u\rangle \tag{2.1}$$

$$p^{\cdot}(t) = -A^*(t)\,p(t) - M a_0(t), \quad t \in [t_0, T], \quad p(T) = 0 \tag{2.2}$$

При этом матрица M допускает представление

$$M = \sum_{k=1}^{l} \nu_k \psi_k \psi_k^*, \quad \nu_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{l} \nu_k = 1, \quad l \leqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1 \tag{2.3}$$

$$\psi_k \in \Psi_0 = \{\psi \in R^n : P_0\psi = \lambda_0\psi\}, \quad k = 1, 2, \ldots, l$$

где $\lambda_0 = \lambda_{\min}(P_0)$ — минимальное собственное число матрицы P_0.

Доказательство теоремы основано на стандартных методах анализа экстремальных задач и использует тот факт, что функционал $\varphi(a(\cdot)) = \lambda_{\min}(P(a(\cdot)))$ квазидифференцируемый в смысле [8].

Следствие 2.1. Пусть $u_0(\cdot)$, $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1, а множество U допустимых управлений определяется выражением (1.6). Тогда

$$\rho u_0(t) = R^{-1}(t)\,B^*(t)\,p(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \rho > 0 \tag{2.4}$$

где $p(t)$ определяется соотношениями (2.2), (2.3).

Пусть I — единичная матрица, $m = n$ и

$$A(t) = 0, \quad R(t) = I, \quad B(t) = I, \quad t \in [t_0, T], \quad t_0 = 0 \tag{2.5}$$

В дальнейшем при ссылке на задачу 1 предполагается, что выполнены условия (1.6) и (2.5). В этом случае задача 1 обладает свойствами симметрии, которые позволяют получить ее решение в аналитической форме.

Из инвариантности множества U и спектра матрицы P относительно ортогональных преобразований вытекает

Лемма 2.1. Пусть $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1, S — произвольная ортогональная матрица. Тогда $Sa_0(t)$ — решение той же задачи при условии, что в (1.4) вектор a_0 заменен на вектор Sa_0.

Следствие 2.2. Пусть $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1 при $a_0 = 0$. Тогда $Sa_0(\cdot)$ — также решение задачи 1, какова бы ни была ортогональная матрица S.

Лемма 2.2. Пусть $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1, Ψ_0 — множество собственных векторов матрицы $P_0 = P(a_0(\cdot))$, отвечающих минимальному собственному числу. Тогда

$$\dim\{\Psi_0 \cup \{a_0\}\} = n$$

Доказательство. Пусть лемма не верна. Тогда существует вектор $\eta \neq 0$, такой, что $\eta^* a_0 = 0$, $\eta^*\psi = 0$, $\psi \in \Psi_0$ и, следовательно, в силу (2.2)—(2.4) $\eta^* a_0(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Значит, компоненты $a_0^i(\cdot)$ линейно зависимы на $[0, T]$ и матрица P_0 вырождена. Можно показать, что это противоречит оптимальности $a_0(\cdot)$.

Таким образом, собственные числа оптимальной матрицы P_0, за исключением, быть может, максимального равны между собой. Геометрически это означает, что $E(\theta°, P_0)$ — эллипсоид вращения.

Следствие 2.3. Если $a_0 = 0$, то $P_0 = \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$.

3. Построение решения. *Теорема 3.1.* Для решения $a_0(\cdot)$ задачи 1 справедливо представление

$$a_0(t) = Sa_*(t), \quad a_*^i(t) = c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$
$$\omega_i T + \varphi_i = {}^1/_2(2k_i - 1)\pi \tag{3.1}$$

где k_i — натуральные числа, S — произвольная ортогональная матрица, удовлетворяющая условию $Sa_*(0) = a_0$.

Доказательство. Из (2.2) и (2.4) следует, что в рассматриваемом случае

$$a_0^{\cdot\cdot}(t) + Ma_0(t) = 0, \quad a^{\cdot}(T) = 0 \tag{3.2}$$

Так как M — симметрическая, неотрицательно определенная матрица, то существует такая ортогональная матрица Q, что

$$Q^*MQ = \operatorname{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2\}$$

Пусть $a_*(t) = Q^* a_0(t)$. Тогда из (3.2) следует уравнение и граничное условие для $a_*^i(t)$. Доказательство теоремы завершается ссылкой на лемму 2.1.

Теорема 3.2. Пусть $a_0(\cdot)$ — решение задачи 1 при $a_0 = 0$. Тогда существует ортогональная матрица S, такая, что выполняются соотношения (3.1) при $\varphi_i = 0$ и

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2T}, \quad c_i = c, \quad c^2 = \frac{24\Delta^2 T}{\pi n(4n^2 - 1)} \tag{3.3}$$

Доказательство. Так как $a_0 = 0$, то из теоремы 3.1 следует, что решение задачи 1 представляется в виде (3.1), причем $\varphi_i = 0$. Из (1.6) и следствия 2.3 вытекает, что

$$\begin{gathered}\langle (a_*^i)^2\rangle = {}^1/_2 c_i^2 T = \lambda_0 \\ \langle a_*^i a_*^j\rangle = 0; \quad i \neq j; \quad \sum \langle (a_*^{\cdot i})^2\rangle \leqslant \Delta^2\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь и далее суммирование ведется от $i = 1$ до $i = n$.

Отсюда получаем

$$c_i = c_j, \quad \omega_i \neq \omega_j, \quad i \neq j; \quad \sum {}^1/_2 c_i^2 T \omega_i^2 = \lambda_0 \sum \omega_i^2 \leqslant \Delta^2$$

и, следовательно, максимальное значение λ_0 достигается при значениях ω_i, удовлетворяющих первому из соотношений (3.3). При этом $c_i^2 = 2\lambda_0 / T = 2\Delta^2 / (T \sum \omega_i^2)$, и приходим к последним двум соотношениям (3.3). Теорема доказана.

При $a_0 \neq 0$ величины c_i, ω_i, φ_i в (3.1) определяются несколько сложнее. Пусть

$$z > 0, \quad f_i(z) = \left(\frac{1}{\cos^2 x_i} + \frac{z}{x_i^2}\right)^{-1}, \quad g_i(z) = \frac{x_i^2}{\cos^2 x_i} - z$$

где $x_i = x_i(z)$ — i-е в порядке возрастания неотрицательное решение уравнения

$$x \operatorname{tg} x = z \tag{3.5}$$

Приведем без доказательства следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. Уравнение

$$\sum f_i(z)(\alpha - g_i(z)) = 0 \tag{3.6}$$

имеет единственное неотрицательное решение для любых $\alpha \geqslant \pi^2 n (n - 1) / 3$.

Теорема 3.3. Пусть $0 < \| a_0 \|^2 \leqslant \varkappa_n$, $\varkappa_n = 6\Delta^2 T / [\pi^2 n (n - 1)]$ и z_0 — решение уравнения (3.6) при $\alpha = 2\Delta^2 T / \| a_0 \|^2$. Тогда решение $a_0(\cdot)$ задачи 1 представляется в виде

$$\begin{gathered} a_0(t) = Sa_*(t), \quad a_*^i(t) = c_i \cos(x_i^\circ (t / T - 1)) \\ c_i^2 = 4 \frac{(\Delta^2 T + z_0 \| a_0 \|^2) x_i^\circ}{(2x_i^\circ + \sin 2x_i^\circ) \Sigma (x_i^\circ)^2}, \quad x_i^\circ = x_i(z_0) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Изложим доказательство теоремы, пропуская некоторые элементарные, но громоздкие преобразования. Заметим сначала, что матрицы M и P_0 коммутативны. Поэтому в доказательстве теоремы 3.1 преобразование Q можно выбрать таким образом, что оно одновременно приводит P_0 к диагональному виду. Из леммы 2.2 следует, что все собственные числа матрицы P_0, за исключением, быть может, максимального, равны между собой.

Поэтому для $a_*^i(\cdot)$, удовлетворяющих первым двум равенствам (3.1), имеют место последние два соотношения (3.4) и

$$\langle (a_*^1)^2 \rangle = \lambda_1 \geqslant \lambda_0 = \langle (a_*^m)^2 \rangle, \quad m = 2, 3, \ldots, n \tag{3.8}$$

Более того, в силу (2.1) последнее неравенство (3.4) может быть заменено на равенство. Вычисляя соответствующие интегралы, можно показать, что второе соотношение (3.4) влечет условие

$$\omega_i \neq \omega_j, \quad i \neq j, \quad \omega_i T \operatorname{tg} \omega_i T = z$$

причем $\omega_i T$ совпадают с первыми в порядке возрастания неотрицательными решениями уравнения (3.5).

В условиях теоремы в (3.8) также достигается равенство, и определение величин λ_0, z, c_i сводится к решению системы трансцендентных уравнений

$$\begin{gathered} c_i^2 T \cos^2 x_i(z) = 2 f_i(z) \lambda_0 \\ \Sigma c_i^2 \cos^2 x_i(z) g_i(z) = 2T\Delta^2, \quad \Sigma c_i^2 \cos^2 x_i(z) = \| a_0 \|^2 \end{gathered}$$

После преобразований решение этой системы можно представить в виде (3.7).

Представляет интерес выражение для оптимального решения при $\| a_0 \|^2 = \varkappa_n$. В этом случае $z_0 = 0$, $x_i^\circ = (i - 1)\pi$ и из (3.7) следует

$$\begin{gathered} a_*^1(t) = c_1, \quad a_*^m(t) = c_m \cos((m - 1)\pi (t/T - 1)) \\ 2c_1^2 = c_m^2 = 2\varkappa_n / (2n - 1), \quad m = 2, 3, \ldots, n \end{gathered} \tag{3.9}$$

Ясно, что в этом случае прибавление константы к $a_*^1(t)$ не нарушает двух последних соотношений (3.4) и не изменяет величину λ_0 минимального собственного числа матрицы P_0. Следовательно, вид оптимального решения не изменится при $\| a_0 \|^2 > \varkappa_n$.

Теорема 3.4. При $\| a_0 \|^2 \geqslant \varkappa_n$ решение задачи 1 представляется в виде $a_0(t) = Sa_*(t)$, где S — ортогональная матрица, а $a_*(t)$ удовлетворяет соотношениям (3.9) при

$$c_1^2 = \| a_0 \|^2 - c_2^2 - c_3^2 - \ldots - c_n^2 = \| a_0 \|^2 - 2\varkappa_n (n-1) / (2n-1)$$

Замечание. При $\alpha \to +\infty$ решение z_0 уравнения (3.6) стремится к $+\infty$ и $x_i(z_0) \to$ $\to {}^1/_2 (2i-1)\pi$. Поэтому теоремы 3.2—3.4 можно свести к одному утверждению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Математическая теория планирования эксперимента. / Под ред. С. М. Ермакова. М.: Наука, 1983. 391 с.
4. *Ананьев Б. И., Ширяев В. И.* Определение наихудших сигналов в задачах гарантированного оценивания // Автоматика и телемеханика. 1987. № 3. С. 49—58.
5. *Куржанская Н. А.* Оптимальное управление пучком траекторий системы с неопределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 404—410.
6. *Гусев М. И.* Об оптимизации измерений в задаче оценивания состояния динамической системы при геометрических ограничениях на помехи // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 1862—1870.
7. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В. С. Королюка. Киев: Наук. думка, 1978. 582 с.
8. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 143 с.

Киев

Поступила в редакцию
29.III.1989