

УДК 62—50

© 1990 г.

В. Л. Кан, А. С. Кельзон

УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Обсуждается возможность применения разработанных авторами [1, 2] методов к случаю произвольных значений навигационной постоянной, что позволяет охватить, в частности, случай, когда эта постоянная меньше единицы (мягкое регулирование), а также случай, когда величина этой постоянной лежит в пределах от единицы до двух. Показано, как при помощи введения движения на римановой поверхности можно избавиться от неоднозначностей, связанных с видом правых частей используемых дифференциальных уравнений. Метод разбиения плоскости параметров, разработанный ранее [1], распространяется на общий случай, что позволяет в принципе качественно исследовать характер движения (включая устойчивость и управляемость), не решая уравнений. Приводится пример.

Исследование устойчивости и управляемости при пропорциональной навигации до сих пор часто проводят на основании линеаризованной теории (например, [2]). Однако, если это можно оправдать при изучении поворотливости, поскольку регулирующие устройства обеспечивают малость соответствующих углов, то линеаризация основных уравнений движения неоправданна. В процессе движения угол может изменяться на десятки и сотни градусов (в некоторых случаях движущаяся точка описывает вокруг начала даже более одного оборота), и линеаризация может привести к совершенно неверным выводам.

Демонстрируется возможность исследования устойчивости и управляемости при произвольном значении навигационной постоянной на основании точных уравнений движения центра масс и проведения линеаризации только для вращения вокруг центра масс.

1. Основные уравнения. В случае равномерного и прямолинейного движения преследуемой точки уравнения относительно движения центра масс преследующего тела имеют вид [1]

$$\begin{aligned} a \dot{} &= v_s \cos \eta - v \cos \gamma, & a \dot{\eta} &= v \sin \gamma - v_s \sin \eta, & \eta &= \psi + \gamma, \\ & & \psi &= b \eta \end{aligned} \quad (1.1)$$

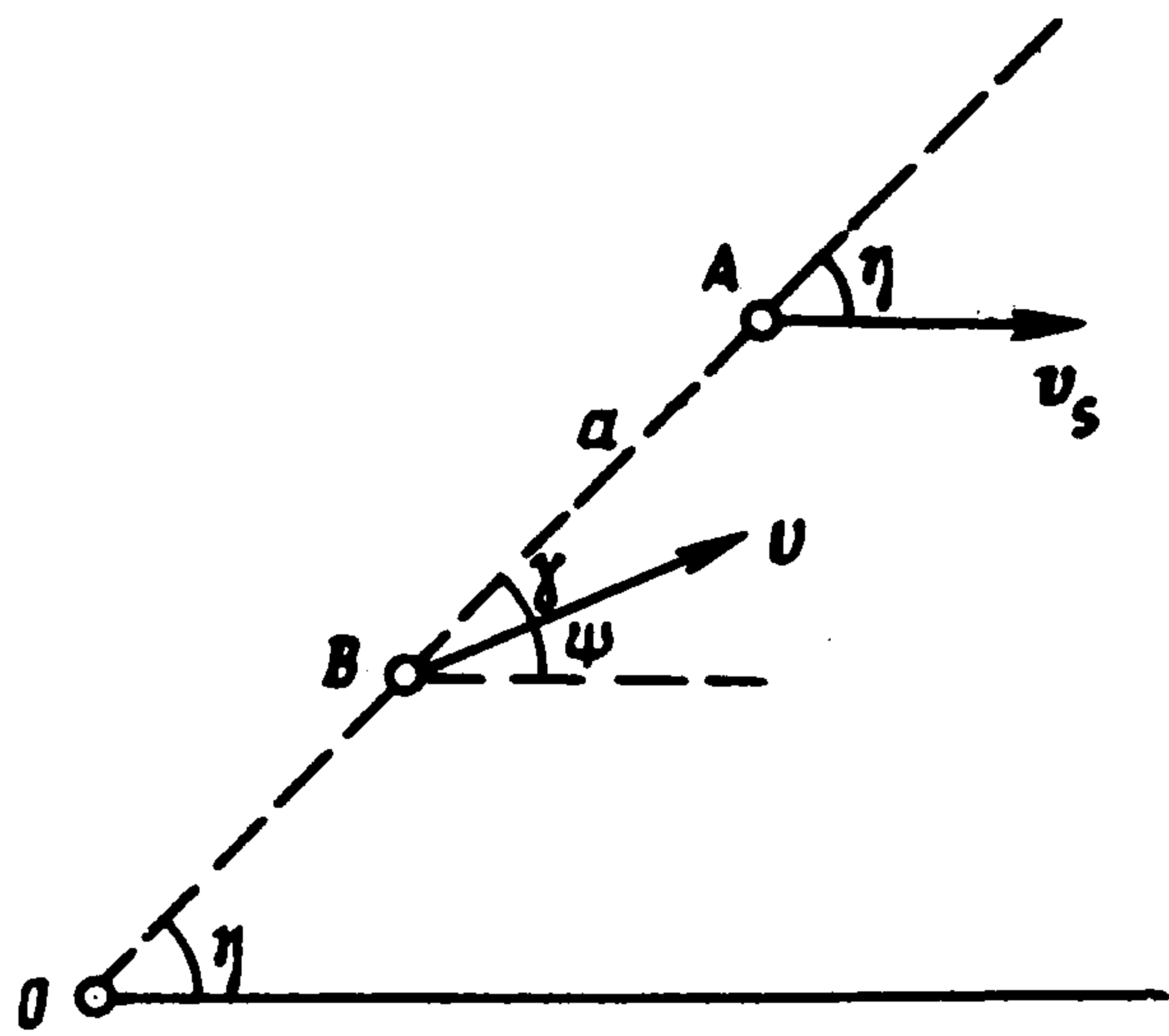
Здесь a — относительное расстояние, η — угол наклона линии визирования, ψ — угол наклона абсолютной скорости, γ — угол упреждения, v — скорость центра масс преследующего тела, v_s — скорость преследуемой точки, b — навигационная постоянная (фиг. 1).

При $b \neq 1$ (случай $b = 1$ соответствует классической задаче преследования или преследования с упреждением и здесь не рассматривается) уравнения (1.1) приводятся к форме [1]

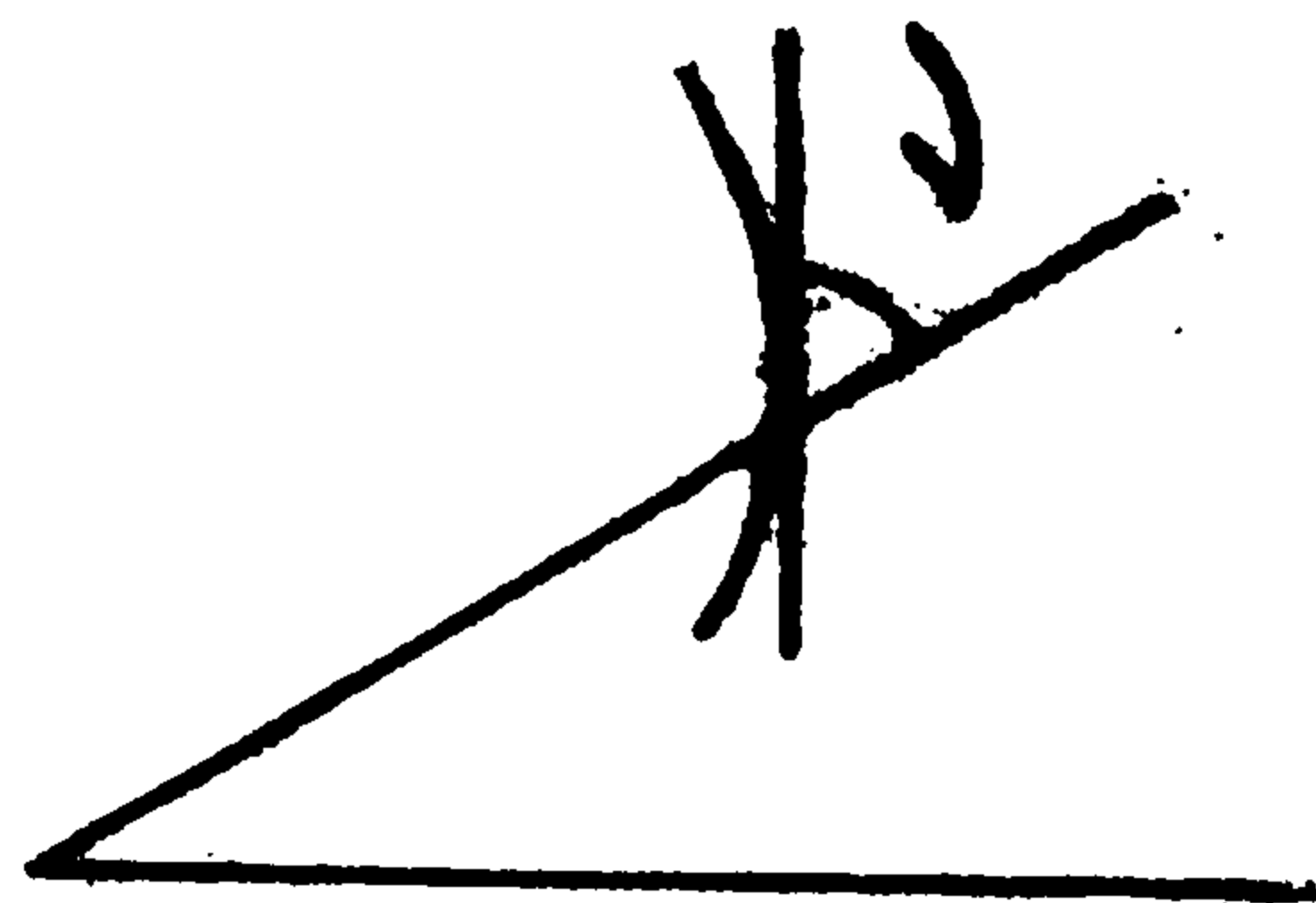
$$\begin{aligned} a \dot{} &= v_1 [\cos \eta - p \cos (b - 1) (\eta - \varepsilon_0)] = v_s F(\eta) \\ a \dot{\eta} &= v_1 [\sin \eta + p \sin (b - 1) (\eta - \varepsilon_0)] = -v_s (\eta) \\ \varepsilon_0 &= \eta_0 + \frac{\gamma_0}{b - 1} = \frac{b}{b - 1} \eta_0 - \frac{1}{b - 1} \psi_0, & p &= \frac{v}{v_1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ε_0 , p — новые параметры, причем ε_0 зависит от начальных условий.

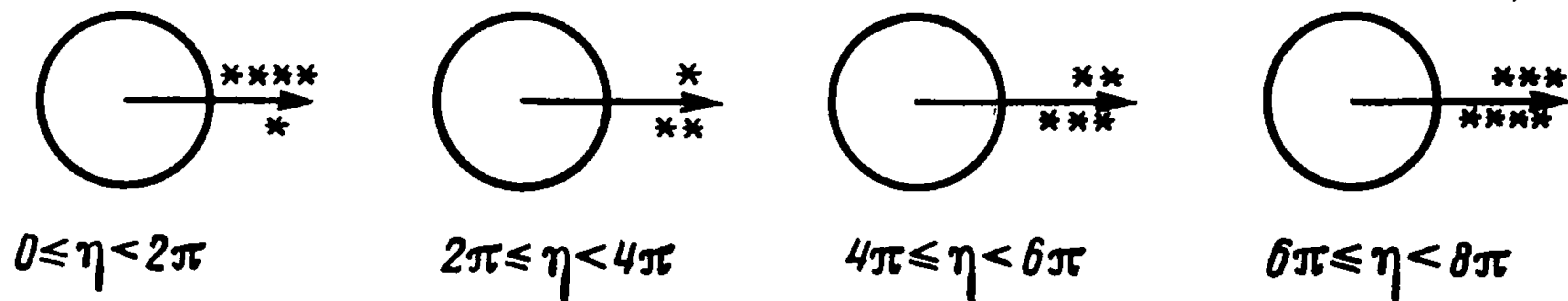
В уравнениях (1.2) величины a и η можно рассматривать как полярные координаты точки B в относительном движении по отношению к точке A , если полюс совместить с точкой A , а полярную ось направить противо-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

положно вектору v_s (если полярную ось направить по v_s , то полярными координатами будут $(a, \pi + \eta)$). Исключая t из уравнений (1.2), получаем уравнение относительной траектории

$$\frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = - \frac{\cos \eta - p \cos (b-1)(\eta - \varepsilon_0)}{\sin \eta + p \sin (b-1)(\eta - \varepsilon_0)} = - \frac{F(\eta)}{f(\eta)} \quad (1.3)$$

При переходе от системы уравнений (1.1) к уравнению (1.3) начальные условия частично включаются в само дифференциальное уравнение в качестве параметров (через параметр ε_0). Поэтому здесь и в дальнейшем полное обозначение правых частей, вспомогательных функций и решений было бы $F(\eta, \varepsilon_0)$, $L(\eta, \varepsilon_0)$, $a(\eta, \varepsilon_0, a_0, t_0)$ и т. п.

После нахождения уравнения траектории время движения находится из второго уравнения (1.2).

$$t = - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{a(\eta) d\eta}{v_s f(\eta)} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2)–(1.4) позволяют качественно изучить вид траектории и характер движения. При этом уравнение (1.3) удобнее записать в виде $\operatorname{tg} \nu = -f(\eta)/F(\eta)$, где ν — угол, образуемый относительной траекторией с радиус-вектором (положительное направление траектории считается в направлении возрастания η , фиг. 2). Отсюда

$$\frac{d\nu}{d\eta} = \frac{L(\eta)}{G^2(\eta)}; \quad L(\eta) = \frac{b-2}{2} G^2(\eta) + \frac{b}{2} (p^2 - 1), \quad G^2(\eta) = f^2(\eta) + F^2(\eta) \quad (1.5)$$

Из уравнений (1.2) и (1.5) можно найти также кривизну относительной траектории

$$K = |f(\eta)| \Omega(\eta) / (aG^3(\eta)) \quad (1.6)$$

$$\Omega(\eta) = L(\eta) + G^2(\eta) = pb \{p - \cos [b\eta - (b-1)(\eta - \varepsilon_0)]\}$$

Знак кривизны (совпадающий со знаком $\Omega(\eta)$), здесь определяется по отношению к полюсу, т. е. если $K > 0$, то траектория обращена вогнутостью к полюсу (лежит ближе к нему, чем касательная), а при $K < 0$ траектория обращена выпуклостью к полюсу.

2. Вид траекторий и характер движения. Из уравнений (1.2) видно, что функции $f(\eta)$ и $F(\eta)$ полностью определяют вид траектории и характер движения (множитель v_s влияет только на масштаб). Однако качественное исследование движения при дробных значениях навигационной постоянной (в отличие от случая целочисленного b , рассматриваемого в [1]) наталкивается на трудность, связанную с тем, что $f(\eta)$ и $F(\eta)$ перестают быть однозначными функциями положения точки. В самом деле, при движении точки угол η может выйти за пределы $[0, 2\pi]$, а в случае дробного b значения $f(\eta)$ и $F(\eta)$ при η и $\eta + 2\pi$, вообще говоря, не равны. Таким образом, вычисляя значения правых частей уравнений (1.2) (а также вспомогательных функций) в какой-либо точке, нужно рассматривать «предысторию» движения.

Для пояснения примененного метода приводится один пример траектории, рассмотренный в разд. 6.

Другой подход — считать, что при прохождении луча $\eta = 0$ (2π) полярный угол каждый раз скачком изменяется на 2π , — ввел бы совершенно неоправданные существом дела разрывы. Поэтому при дробных значениях b удобнее перейти от реальной плоскости движения к римановой поверхности и рассматривать движение на этой поверхности. Первый лист римановой поверхности нужно считать совпадающим с плоскостью действительного движения, а лучи $\eta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ разрезами, на которых происходит переход с одного листа на другой. Число листов будет равно q при рациональном $b = l/q$ (причем луч $\eta = 2\pi q$ совпадает с лучом $\eta = 0$) и бесконечно при иррациональном b . Разумеется, истинная траектория получится, если спроектировать риманову поверхность на ее первый лист.

На фиг. 3 показана риманова поверхность и соответствие сторон разрезов при $q = 4$ для всех четырех листов; звездочки означают соответствие краев различных листов римановой поверхности.

Такой подход весьма удобен и при рассмотрении дифференциального уравнения траектории (1.3). Действительно, в этом случае может оказаться, например, что значение η обращает знаменатель правой части к нулю, а значение $\eta + 2\pi$ — не обращает. При рассмотрении движения в реальной плоскости неудобно было бы отличать случай, когда есть особая точка, от случая, когда ее нет. При переходе к римановой поверхности трудность эта исчезает — особая точка располагается на одном из листов римановой поверхности.

Вводя риманову поверхность [3], можно распространить на общий случай произвольного b свойства движения, рассмотренные в [1, 4].

1°. В процессе всего движения угол η изменяется монотонно (при этом он может выходить за пределы $[0, 2\pi]$).

2°. Если в начальный момент угол η совпадает с одним из корней функции $f(\eta)$, то он сохраняет свое значение во все время движения (как относительное, так и абсолютное движение при этом будут прямолинейными), — это случай параллельного сближения (название неудачное, поскольку движение может быть и удалением).

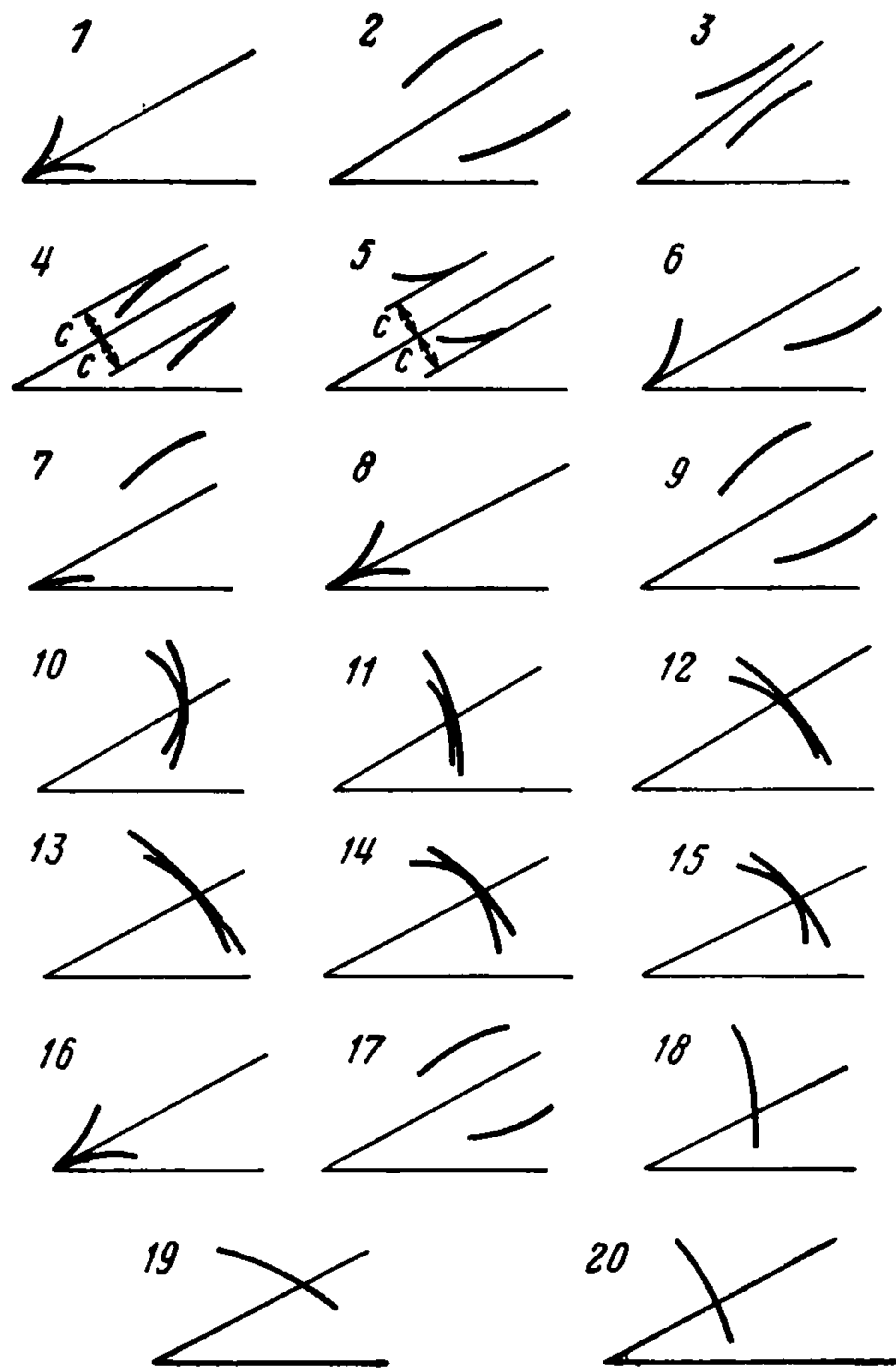
3°. Если в начальный момент $\eta \neq \eta_i$, где

$$f(\eta_i) = 0 \quad (2.1)$$

то все движение происходит в секторе между двумя корнями функции $f(\eta)$ (т. е. относительная траектория не может пересечь ни один из лучей $\eta = \eta_i$).

4°. В конце движения всегда $\eta \rightarrow \eta_i$, причем, если при этом расстояние $a \rightarrow 0$, то движение заканчивается за конечное время (кроме исключительного случая, когда $p = 1$ и начальные условия выбраны весьма специальным образом), если же a безгранично возрастает или стремится к конечному пределу (последнее возможно только при $p = 1$), то движение продолжается неограниченное время.

5°. Траектория вблизи луча $\eta = \eta_i$ может иметь 1 из 20 видов, указанных на фиг. 4. Вид траектории определяется знаками функций $L(\eta_i)$ и $\Omega(\eta_i)$ или их производных, если соответствующие значения равны нулю. (Следует отметить, что некоторые из показанных на фиг. 4 траекторий, например 1, 8, 16 или 2, 9, 17, различаются либо порядком касания с прямой $\eta = \eta_i$, либо скоростью изменения кривизны вблизи $\eta = \eta_i$.)



Фиг. 4

6°. Вид траектории в секторах между корнями может быть качественно описан, если определить корни функций $F(\eta)$ и $\Omega(\eta)$ из соотношений

$$F(\eta_{iF}) = 0, \quad \Omega(\eta_{i\Omega}) = 0 \quad (2.2)$$

построить лучи $\eta = \eta_{iF}$ и $\eta = \eta_{i\Omega}$ (на всей римановой поверхности или на той ее части, которая достижима с первого листа, если считать, что начальные условия соответствуют всегда первому листу), а также учесть знаки кривизны (т. е. $\Omega(\eta)$), возрастание и убывание расстояния (т. е. знак $F(\eta)$) в соответствующих секторах (примеры таких построений для $b = 3/4$ даны в [5]).

Разумеется, можно всегда считать начальные условия находящимися в пределах $(0, 2\pi)$, но тогда величина ε_0 может выйти из интервала $(0, 2\pi)$. Если же исходить из задания ε_0 , то значения η_0, ψ_0 нужно подбирать так, чтобы именно ε_0 имело соответствующее значение. Это позволяет ограничить интервал ε_0 .

7°. Характер движения после построения траекторий определяется сразу, если учесть, что угол η изменяется монотонно, а $\text{sgn } \eta' = -\text{sgn } f(\eta)$.

3. Устойчивость движения. Анализ устойчивости движения в классическом смысле требует учета возмущений и учета свойств регуляторов. Для линеализированной теории он проведен в [5]. Оказывается, что в точной теории, рассмотренной здесь, он менее важен, так как получаемые свойства движения таковы, что сравнительно незначительное воздействие со стороны регуляторов не может, в большинстве случаев, существенно их изменить (разумеется, это не снимает проблем об учете лагов и переходных процессов в регуляторах, о влиянии на величину промаха при сближении и т. п., которые должны быть изучены дополнительно).

Поэтому рассматриваются три аспекта устойчивости.

Устойчивость корней. В связи со свойством $\eta \rightarrow \eta_i$ в конце движения, корни функции $f(\eta)$ делятся на устойчивые и неустойчивые. Устойчивыми

называются корни, к которым стремится угол η в процессе движения, неустойчивыми — те, от которых η удаляется. Возможны также полустойчивые корни, к которым η стремится только с одной стороны. Классификация корней в зависимости от знаков производной $f'(\eta_i)$ (или высших производных, для случая, когда $f'(\eta_i) = 0$), дана в табл. 1. Здесь же показано разделение корней на сближающие и удаляющие в зависимости от направления изменения расстояния при движении по лучу $\eta = \eta_i$; при $p = 1$ возможны также безразличные корни, на которых находятся положения относительного равновесия (устойчивого или неустойчивого).

Таблица 1

Номер случая	$\text{sgn } f'(\eta_i)$	Изменение знака $f(\eta_i)$ при переходе через корень	$\text{sgn } F \times \times(\eta_i)$	Типы корней
1	+1			
	либо $f'(\eta_i) = f''(\eta_i) = 0$ $f'''(\eta_i) > 0$	– на +	–1 +1 0	1) сближающий 2) удаляющий 3) безразличный } устойчивый
2	–1			
	либо $f'(\eta_i) = f''(\eta_i) = 0$ $f'''(\eta_i) < 0$	+ на –	–1 +1 0	4) сближающий 5) удаляющий 6) безразличный } неустойчивый
3	0			
	$f''(\eta_i) \neq 0$	+ на + или – на –	–1 +1 0	7) сближающий 8) удаляющий 9) безразличный } полустойчивый

Устойчивость траектории. Траектории называются устойчивыми, если малому изменению начальных условий соответствуют близкие траектории. При этом близость может пониматься различным образом. Если рассматривать близость по углу, то в связи с тем, что $\eta \rightarrow \eta_i$, в конце движения все траектории устойчивы, кроме прямолинейных траекторий, соответствующих неустойчивым корням (для этих траекторий малое возмущение приводит к конечным изменениям угла). Если рассматривать кратчайшее расстояние между траекториями, то все траектории, для которых расстояние a стремится к нулю или конечному пределу, устойчивы. Что касается траекторий, для которых $a \rightarrow \infty$, то они устойчивы в этом смысле только для тех случаев, когда расстояние от прямой $\eta = \eta_i$ стремится к нулю или конечному пределу (т. е. кроме случаев, 2, 9, 17 и одной из сторон в случаях 6 и 7 (фиг. 4)) и только для возмущений, не изменяющих параметр ε_0 . Для возмущений, изменяющих ε_0 (т. е. корни η_i), траектории, уходящие в бесконечность, всегда неустойчивы в указанном смысле, так как малое изменение корней приводит при $a \rightarrow \infty$ к безгранично возрастающему изменению расстояний. Однако существенной для задач избегания (в которых интерес представляет увеличение a) является, по-видимому, именно устойчивость по углу (пеленгу), т. е. устойчивость в первом смысле.

Устойчивость сближения и удаления. Под устойчивостью сближения или удаления понимается отсутствие влияния малых изменений начальных условий на конечный результат движения.

Такого рода устойчивость имеет место всюду, кроме начальных условий, соответствующих положению точки на неустойчивом или полустойчивом корне. В последнем случае малое возмущение (для полустойчивого корня малое возмущение, выводящее точку на неустойчивую сторону) приводит к резкому изменению характера движения —

его конечный результат заменяется обратным: при сходе с неустойчивого сближающегося корня конечным результатом будет удаление, а с удаляющегося — сближение. Это единственные случаи, когда регулятор, оказывающий малое добавочное воздействие (не сравнимое по величине с воздействием, обеспечивающим выполнение основного соотношения (1.1)), может изменить конечный результат движения. По-видимому, это относится к случаю малых изменений величины p или поворота полярной оси на малый угол (т. е. маневра точки A), если только значения параметров не находятся близко к границам областей с однотипным характером движения (см. ниже).

4. Зависимость движения от параметров. Как указывалось в разд. 2 и 3, характер движения определяется, в первую очередь, значениями и типами корней функции $f(\eta)$, а затем корнями функций $F(\eta)$ и $\Omega(\eta)$, а также взаимным расположением всех этих корней на римановой поверхности.

Если не интересоваться точной формой траекторий, то достаточно изучить вещественные корни функций $f(\eta)$ и $F(\eta)$ и их взаимное расположение. Из уравнений (2.1), (2.2) следует, что корни являются функциями параметров b, p, ε_0 , а при фиксированном b — функциями p и ε_0 . При этом основное значение имеет линия в плоскости параметров p, ε_0 , на которой уравнения имеют кратные корни, поскольку она делит эту плоскость на области, в которых число корней функции одинаково, причем каждый из них довольно слабо зависит от параметров. Эта линия называется сепаратрисой (в плоскости параметров) или дискриминантной кривой. Оба названия применяются и в несколько другом смысле.

Параметрические уравнения сепаратрисы для функции таковы:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sin \eta + p \sin(b-1)(\eta - \varepsilon_0) = 0 \\ f'(\eta) &= \cos \eta + p(b-1) \cos(b-1)(\eta - \varepsilon_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь величина η — параметр (на самом деле это значение двойного корня уравнения (2.1)). Линия, определяемая уравнением (4.1), имеет два периода по η . Это

$$T_1 = \begin{cases} \pi |(b-2)/(b-1)|, & b > 1 \\ \pi |b/(b-1)|, & b < 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

— период отдельной ветви (и одновременно период каждой из однозначных ветвей функции $\eta_i(\varepsilon_0)$, определяемой при заданном p уравнением (2.1)) и $T_2 = 2\pi / |b-1|$ — период сепаратрисы в целом (соответствующий перестановке корней уравнения (2.1)).

При b рациональном периоды T_1 и T_2 соизмеримы и сепаратриса состоит из конечного числа ветвей (для целого этот результат получен в [1]). Для b иррационального сепаратриса имеет инфинитезимальный период, т. е. ее периоды образуют модуль второго рода (по терминологии [6]). Аналогично рассматриваются сепаратрисы функции $F(\eta)$.

Поскольку для определения характера движения важно взаимное расположение корней функций $f(\eta)$ и $F(\eta)$, существенна также взаимная сепаратриса этих функций, т. е. линия в плоскости параметров, в точках которой они имеют общие корни. Из (2.1) и (2.2) следует, что это прямая $p = 1$.

Сепаратрисы $f(\eta)$ и $F(\eta)$ целиком расположены в полосе между прямыми $p = 1$ и $p = |b-1|^{-1}$ (что было показано [1] для целочисленного $b \geq 3$). Поэтому для областей параметров, лежащих выше и ниже указанной полосы, можно указать общие свойства движения. Внутри же полосы для изучения движения нужно построить сепаратрисы $f(\eta)$ и $F(\eta)$ и найти, в какую из подобластей, на которые они разбивают полосу, попадают заданные значения p и ε_0 .

Указанные выше области смыкаются (т. е. полоса сводится к прямой $p = 1$) лишь в случае $b = 2$, исследованном в [7]. Отсюда еще раз очевидна уже отмеченная ранее его исключительность, не позволяющая распространить выводы, полученные для $b = 2$, на общий случай, что иногда делается ошибочно и в настоящее время.

Общие выводы о характере движения даны в табл. 2 для случая $b < 1$, $b = 1 - q^{-1}$. Число экстремумов на траектории совпадает с числом секторов возможного движения. Аналогично могут быть составлены таблицы для рациональных b . Общие выводы, сделанные в них (кроме числа листов римановой поверхности), справедливы для любых значений b , лежащих в соответствующих пределах ($b < 1$, $1 < b < 2$, $b = 2$, $b > 2$). Небольшое уточнение по поводу вида траекторий связано с возможностью совпадения корней функций $f(\eta)$ и $\Omega(\eta)$. Соответствующая линия в плоскости параметров имеет уравнение

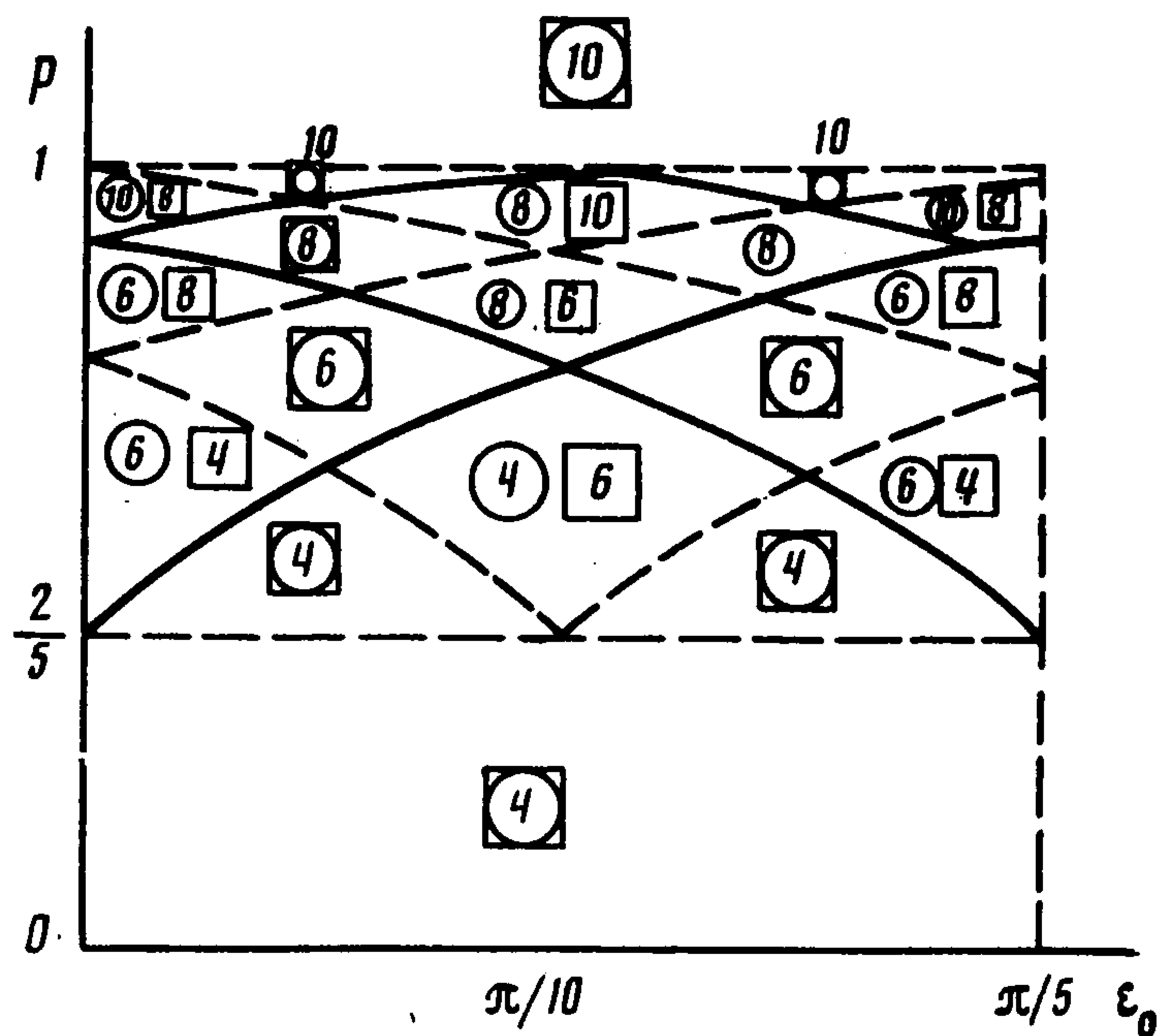
$$\Omega(\eta_i) = 0 \quad (4.3)$$

где η_i — корни уравнения (2.1). Она целиком лежит в области, где $p \leq 1$, поскольку очевидно, что при $p > 1$ функция $\Omega(\eta)$ корней не имеет. Исключая η_i из (4.3) и (2.1), имеем

$$p = \cos[\varepsilon_0 + \frac{1}{2}(2m + 1)\pi b(b - 1)^{-1}] \quad (4.4)$$

Как видно из табл. 2, для полосы между $p = 1$ и $p = |b - 1|^{-1}$ (эта полоса находится выше прямой $p = 1$ при $b < 2$ и ниже ее при $b > 2$) характер движения может быть различным.

Для выяснения характера движения нужно фактически построить сепаратрисы $f(\eta)$ и $F(\eta)$. Для этого, как следует из указанной выше периодичности, достаточно построить одну дугу сепаратрисы (основную дугу) при изменении параметра η от 0 до π . Затем эту дугу периодически повторяют, получая одну ветвь сепаратрисы, после чего построенную линию смещают на величины кратные T_2 . Затем, что при b рациональном при этом получается только конечное число ветвей, так как в этом случае периоды T_1 и T_2 находятся в рациональном отношении, и после некоторого числа трансляций положение ветви совпадает с первоначальным. При b иррациональном кривая всюду плотно заполнит полосу, и при исследовании зависимости решения от параметров нужно учитывать только те ветви, которые относятся к корням η , расположенным на соответствующих листах римановой поверхности.



Фиг. 5

Пример разбиения плоскости параметров сепаратрисами $f(\eta)$ и $F(\eta)$ для $b = 7/2$ дан на фиг. 5. Сплошной линией показана сепаратриса $f(\eta)$, а штриховой — сепаратриса $F(\eta)$. В кружках дано число вещественных корней функции $f(\eta)$ (лежащих на двух листах римановой поверхности, так как для данного b знаменатель $q = 2$), а в квадратах — число корней $F(\eta)$. Для каждой из подобластей, на которые разбивается полоса сепаратрисами, вид траекторий и общий характер движения одинаковы. Другие примеры даны в [1] (для $b = 3, 4, 5$) и в [6] (для $b = 3/4$). Там же даны более подробные построения траекторий для указанных случаев. Отметим, что траектория при $b = 7/2$ является промежуточной между траекториями для $b = 3$ и 4 , рассмотренными в [1], и исследование показывает промежуточный характер движения в этом случае.

p	Число секторов возможного движения на римановой поверхности	Возможное число полустойчивых корней	Изменение v как функции η	Тип экстремумов	Знак кривизны траектории	Вид траектории у корней $f(\eta)$ по классификации таблицы 1	Возможные типы корней $f(\eta)$ по классификации фиг. 4	Взаимное расположение корней $f(\eta)$ и $F(\eta)$
	$2q$	Нет	Убывает	Минимумы	Любой	Типы 2 и 4	Типы 2, 3, а также типы 4, 5 на линии (4.5)	Взаимно разделяются
	$2q$, кроме значений, соответствующих минимумам сепаратрисы	Один для q четного, два для q нечетного	Убывает	Минимумы (внутри интервала)	+	Типы 2 и 4 для корней, не совпадающих с корнями $F(\eta)$, типы 7, 8, 9 для совпадающих	Тип 2 и типы 11, 13 вне экстремумов сепаратрис. Возможен тип 15 в экстремуме сепаратрисы $F(\eta)$ и тип 17 в экстремуме сепаратрисы $f(\eta)$	Часть корней совпадает
1	Промежуточное между 2 и $2q$	Один для q четного, два для q нечетного (в точках самопересечения сепаратрисы вдвое больше) Нет	Может и убывать и возрастать	Возможны и максимумы и минимумы	+	Типы 1, 2, 4, 5 вне сепаратрисы, а также типы 3, 6 на сепаратрисе	Тип 1, 2 вне сепаратрисы. На сепаратрисе возможны случаи	Могут взаимно разделяться, но не для секторов
	2	Нет	Убывает	Минимумы	+	Типы 2 и 4	Тип 2 вне экстремумов сепаратрисы. Возможен тип 9 в экстремумах сепаратрисы	Взаимно разделяются
	2	Нет	Убывает	Минимумы	+	Типы 2 и 4	Тип 2	Взаимно разделяются

5. **Управляемость движения.** Движение при управлении по методу пропорциональной навигации фактически возможно, только если возникающие нормальные ускорения не будут слишком велики. Нормальное ускорение точки связано с кривизной абсолютной траектории (сокращенно — абсолютной кривизной), причем вследствие постоянства модуля скорости изменение ускорения определяется только изменением абсолютной кривизны. Имеем (фиг. 1) $w_n = K_a v^2 = \psi' v$, где w_n — нормальное ускорение; K_a — абсолютная кривизна; ψ' — угловая скорость вектора скорости в абсолютном движении. Отсюда $K_a = \psi' / v$. Используя уравнения (1.4) и (1.6), получим

$$K_a = -bf(\eta) / (pa) \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) дает возможность рассматривать изменение кривизны вдоль траектории как функцию относительной полярной координаты η . Дифференцируя равенство (5.1) и учитывая уравнения (1.5) и (1.6), получаем

$$\frac{dK_a}{d\eta} = \frac{1}{\eta'} \frac{dK_a}{dt} = -\frac{b}{p} \frac{\Phi(\eta)}{a} \quad (5.2)$$

$$\Phi(\eta) = f'(\eta) + F(\eta) = 2 \cos(\eta) + p(b-2) \cos(b-1)(\eta - \varepsilon_0)$$

Очевидно, что экстремум абсолютной кривизны (а следовательно, и нормального ускорения) может находиться только в корнях функции $\Phi(\eta)$. Если же функция $\Phi(\eta)$ не имеет корней в рассматриваемом секторе (т. е. в секторе между начальным значением η_0 и ближайшим устойчивым корнем) или корень соответствует минимуму $|K_a|$, то наибольшее значение кривизны должно находиться на границе интервала. В этом случае следует рассматривать $\lim K_a$ при $\eta \rightarrow \eta_i$, для чего можно использовать линеаризованную теорию, поскольку движение происходит вблизи корня.

В линеаризованной теории имеем вблизи простого корня (см. [1])

$$a \approx c_1 |\eta - \eta_i|^\alpha, \quad \alpha = -F(\eta_i) / f'(\eta_i)$$

и, следовательно, для абсолютной кривизны вблизи корня

$$|K_a| \approx c_1 |\eta - \eta_i|^{r_1}, \quad r_1 = 1 + F(\eta_i) / f'(\eta_i) = \Phi(\eta_i) / f'(\eta_i) \quad (5.3)$$

Очевидно, что поведение кривизны вблизи корня определяется знаком величины r_i , а поскольку для устойчивых корней (которые только и представляют интерес) $f'(\eta_i) > 0$, знак r_i совпадает со знаком $\Phi(\eta_i)$. Таким образом, та же функция $\Phi(\eta)$ определяет изменение кривизны вдали от корня и поведение кривизны при встрече [8].

Если устойчивый корень попадает в сектор римановой поверхности, где $\Phi(\eta) > 0$, то кривизна будет стремиться к нулю при подходе к этому корню (из (5.2) видно только, что она убывает в соответствующем векторе) и, следовательно, по терминологии, введенной в [1], он будет хорошо регулируемым. Наоборот, если в соответствующем секторе $\Phi(\eta) < 0$, то кривизна возрастает (согласно (5.2)) и стремится к бесконечности (согласно (5.3)). Могло бы показаться, что все это относится только к случаю, когда угол η возрастает. Однако, фактически интерес представляет не K_a , а $|K_a|$, а из (5.1) и (5.2) следует, что

$$\text{sgn}(d|K_a|/d\eta) = \text{sgn} f(\eta) \text{sgn} \Phi(\eta) \quad (5.4)$$

и поскольку из (1.6) следует, что $\text{sgn} \eta' = -\text{sgn} f(\eta)$, возрастании η со временем имеем случай, рассмотренный ранее, а убывании η со временем знаки $d|K_a|/d\eta$ и $\Phi(\eta)$ совпадают.

Таким образом, построив на римановой поверхности лучи $\eta = \eta_i \Phi$, соответствующие корням уравнения $\Phi(\eta_i \Phi) = 0$, можно найти, как будет изменяться абсолютная кривизна (т. е. нормальное ускорение) вдоль траектории, а также поведение ее при подходе к точке встречи (если она возможна), т. е. при подходе к устойчивым сближающимся корням.

Построив взаимную сепаратрису функций $f(\eta)$ и $\Phi(\eta)$, т. е. линию, определяемую параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sin \eta + p \sin(b-1)(\eta - \varepsilon_0) = 0 \\ \Phi(\eta) &= 2 \cos \eta + p(b-2) \cos(b-1)(\eta - \varepsilon_0) = 0 \end{aligned}$$

можно разбить плоскость параметров на области, в которых корни имеют одинаковый тип. Регулируемость корней может изменяться только при переходе из одного сектора между корнями $\Phi(\eta)$ в другой, т. е. при совпадении корней функций $\Phi(\eta)$ и $f(\eta)$, и, следовательно, изучить зависимость регулируемости от параметров.

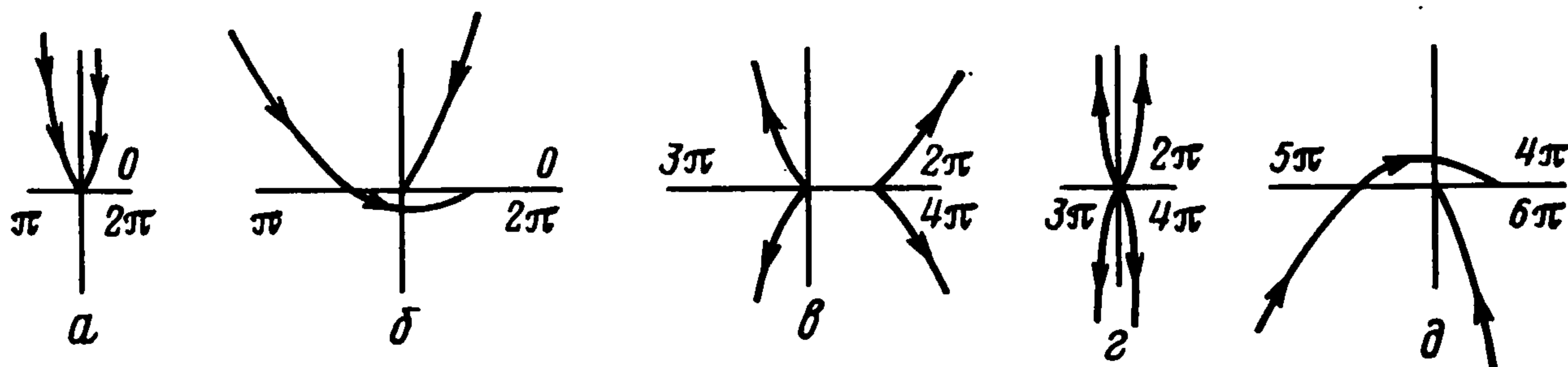
6. Пример. Рассмотрим случай $b = 2/3$, $p = 2$, $\varepsilon_0 = 0$, на котором можно продемонстрировать зависимость устойчивости и управляемости от параметра p . Имеем

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sin \eta - p \sin^{1/3} \eta, & F(\eta) &= \cos \eta - p \cos^{1/3} \eta \\ f'(\eta) &= \cos \eta - 1/3 p \cos^{1/3} \eta, & \Phi'(\eta) &= 2 \cos \eta - 4/3 p \cos^{1/3} \eta \end{aligned}$$

Одним из корней функции $f(\eta)$ является корень $\eta_1 = 0$.

Имеем $f'(\eta_1) = 1 - 1/3 p$. Таким образом, корень η_1 устойчивый при $p > 3$.

Поскольку $F(\eta_1) = 1 - p$, корень η_i сближающийся при $p > 1$. Однако из того, что он устойчивый и сближающийся при $1 < p < 3$, не следует, что сближение из области, близкой к этому корню, реально осуществимо для всех этих значений p . Действительно, имеем $\Phi(\eta_1) = 2 - 4/3 p$. Следовательно, корень хорошо регулируем только



Фиг. 6

при $1 < p < 3/2$ и плохо регулируем при $3/2 < p < 3$. Отсюда следует, что, например, при $p = 2$ движение не может быть осуществлено, так как нормальное ускорение при подходе к точке встречи безгранично возрастает. С другой стороны, интересно, что при $1 < p < 3/2$ нормальное ускорение при подходе к корню стремится к нулю, т. е. встреча возможна, несмотря на «мягкое» регулирование $(b-1)$.

Отметим, что по виду относительной траектории трудно судить о регулируемости корней. Для данного примера можно использовать подстановку, обобщающую применявшиеся в [2] для целых b , и получить уравнение траектории в конечном виде.

Если $Z = \operatorname{tg}^{1/3} \eta$, то $g(\eta) = (1 + Z^2)^{3/2} |Z^2 - 1/3|^{-3} |Z|^3$ дает уравнение траектории с точностью до постоянного множителя.

Соответствующий график траектории при $b = 2/3$, $p = 2$, $\varepsilon_0 = 0$ (в произвольном масштабе) показан на фиг. 6. Поскольку относительное расстояние a меняется очень сильно, невозможно изобразить всю траекторию в одном масштабе. Поэтому фиг. 6 состоит из пяти чертежей. На двух из них (a и $г$) в малом масштабе дан общий вид траектории для некоторых участков, а на трех остальных в большом масштабе отдельные части траектории вблизи начала координат. В этом случае можно проиллюстрировать указанное выше явление.

Действительно, при подходе, например, к лучу $\eta = 2\pi$ точка продолжает свое движение по совершенно другой траектории, чем при подходе к лучу, соответствующему $\eta = 4\pi$, хотя геометрически эта одна и та же точка плоскости. Причина — различие в условиях. Здесь различие автоматически учитывается величиной угла η .

На первом и третьем листах римановой поверхности виден подход к корню η_1 . Однако на самом деле, как было уже указано, этот подход неосуществим.

Следует отметить, что приведенный пример иллюстрирует влияние параметра p . Поскольку начальные условия частично объединены в параметре ε_0 , а в остальном рассмотрена вся траектория, влияние начальных условий на данном примере не иллюстрируется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кан В. Л., Кельзон А. С. Теория пропорциональной навигации. Л.: Судостроение. 1965, 423 с.
2. Кан В. Л., Кельзон А. С. Пропорциональная навигация и проблема избегания // Аннот. докл. 3-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Наука, 1968. С. 149.
3. Справочник по системотехнике / Под ред. Макола Р. М.: Сов. радио, 1970. 688 с.
4. Григорьева О. В. Выбор траекторий расхождения судов в море при автоматическом управлении в зависимости от соотношения скоростей маневрирующих судов // Судовождение. Науч.-техн. сб. Л.: Мортрансп. 1969. Вып. 10. С. 57—71.
5. Кан В. Л., Кельзон А. С., Нефедьев В. Н. Пропорциональная навигация и проблема избегания // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 3. С. 397—405.
6. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
7. Spitz H. Partial navigation courses for a guided missile attacking a constant velocity target, Washington: Naval Res. Lab., 1946. 56 p.
8. Неупокоев Ф. К. Стрельба зенитными ракетами. М.: Воениздат. 1970. 351 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.XII.1988