Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 531.36 + 62—50

А. Г. Азизов

О ДВИЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СЕРВОСВЯЗЯМИ

Изучаются особенности динамики систем с сервосвязями [1], обусловленные необходимостью учета их неидеальности и освобождаемости. Предлагается конструктивный метод обоснования аксиомы идеальных связей для кинематически управляемых систем и принципа приведения условных связей к действительным. Метод основан на общей теории движения систем с неидеальными связями, развитой в [2, 3] применительно к системам с трением. Составляются и анализируются уравнения, позволяющие решить задачу о стабилизации движений относительно многообразия, определяемого сервосвязями.

Развитию теории Бегена [1], а также ее критическому рассмотрению посвящены работы [4—7]. Особенности аналитической трактовки систем с сервосвязями и систем с условными связями проанализированы в [8]. Однако различная трактовка сил реакций сервосвязей и отсутствие должного обоснования принципа приведения условных связей к действительным оставили открытым вопрос о существовании более тесной связи между этими теориями. Предлагаемый метод исследования позволяет установить условия, при которых согласуются теории [1, 4], и описать динамику систем с сервосвязями с учетом их параметрического освобождения [9].

1. Рассматривается механическая система, положение которой с учетом идеальных голономных связей первого рода [1] определяется координатами q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть на систему действуют заданные силы Q_i, а движение ее ограничено совместными и независимыми связями, среди которых имеются как геометрические

$$f_\alpha(q_j, t) = 0 \quad (f_\alpha \in C_2;\ \alpha = 1, 2, \ldots, a) \tag{1.1}$$

так и кинематические, вообще говоря, нелинейные

$$\varphi_\beta(q_i, q_i^\cdot, t) = 0 \quad (\varphi_\beta \in C_1;\ \beta = 1, 2, \ldots, b) \tag{1.2}$$

Возможные перемещения, допускаемые связями, определим $a + b$ независимыми соотношениями [9]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^\cdot}\delta q_i = 0$$

а многообразие допустимых состояний системы представим в виде

$$q_i = a_i(q_j, t), \quad q_i^\cdot = b_i(q_j, p_s, t) \quad (a_i \in C_2,\ b_i' \in C_1) \tag{1.3}$$

где q_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ — независимые лагранжевы координаты, p_s $(s = 1, 2, \ldots, r)$ — независимые скоростные параметры. При этом вариации координат δq_i можно выразить через произвольные величины $\delta\pi_s$ следующим образом:

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial b_i}{\partial p_s}\delta\pi_s$$

Пусть среди связей (1.1) первые c, а среди связей (1.2) первые d являются связями первого рода. Обозначая N_i силы реакций связей первого рода, а Φ_i—силы реакций сервосвязей, результирующие реакции представим так: $R_i = N_i + \Phi_i$. При этом для систем с неидеальными связями будем иметь условие

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta q_i = \tau \neq 0 \tag{1.4}$$

справедливое для любых возможных перемещений.

Предположим, что многообразие допустимых состояний системы, составленное с учетом только сервосвязей, представимо в виде

$$q_i = a_i^* (q_\mu, t), \quad q_i^{\cdot} = b_i^* (q_\mu, p_\nu, t) \tag{1.5}$$
$$(a_i^* \in C_2;\ b_i^* \in C_1;\ \mu = 1, 2, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots, m)$$

а связи первого рода идеальные. Тогда из (1.4) будет следовать выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \delta q_i = \tau \tag{1.6}$$

справедливое для всякого возможного перемещения, а силы реакций сервосвязей можно единственным образом разложить на составляющие Φ_i^n и Φ_i^τ, такие, что выполняется равенство нулю левой части для Φ_i^n, а величины $\Phi_i^\tau \delta t$ находятся среди возможных перемещений. При этом

$$\Phi_i^n = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=d+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}}, \quad \Phi_i^\tau = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b_i^*}{\partial p_\nu} \tag{1.7}$$

где λ_α и μ_β — неопределенные множители Лагранжа, u_ν — некоторые коэффициенты пропорциональности.

Движение системы будет описываться уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + N_i + \Phi_i \tag{1.8}$$

в которых кинетическая энергия T составлена без учета связей (1.1) и (1.2), а обобщенные силы реакций связей имеют структуру

$$N_i = \sum_{\alpha=1}^{c} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=1}^{d} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{1.9}$$
$$\Phi_i = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=d+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b_i^*}{\partial p_\nu}$$

Наряду с уравнениями общего вида (1.8), в системах с сервосвязями возникает необходимость составления уравнений движения с учетом особенностей их реализации. Рассмотрим одну из таких систем, нередко встречающихся в приложениях [1].

2. Как известно [4], возможность трактовки и учета условных связей (сервосвязей) как связей действительных называется принципом приведения условных связей к действительным. Использование этого принципа связано с присоединением к системе условий равенства нулю их реакций. На конкретном примере было показано [8], что применение этого принципа к решению задачи Бегена приводит к противоречивому выводу. Ниже выясняются причины такого противоречия и приводятся условия, при которых согласуются теории [1, 4].

Следуя Бегену, будем предполагать, что в системе, подчиненной $e + f$ ($e = a - c$, $f = b - d$) соотношениям сервосвязей, можно выделить две части Σ и Σ_1, такие, что на систему Σ не действуют никакие реакции связей второго рода, кроме реакций системы Σ_1. Допустим, что положение системы Σ_1, на которую действуют силы реакций сервосвязей Φ_i, определяется координатами q_{l+j} $(j = 1, 2, \ldots, n - l)$ из совокупности q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда движение системы Σ будет описываться l первыми уравнениями из системы (1.8), в которых следует положить $\Phi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. К этим уравнениям, как и в случае [1], присоединяются соотношения (1.1) и (1.2). Задача о движении системы будет определенной, если число сервосвязей будет равно числу $n - l$ параметров, от которых зависит положение системы Σ_1.

Для определения же сил реакций сервосвязей Φ_i $(i = l + 1, l + 2, \ldots, n)$ служат остальные $n - l$ уравнений системы (1.8). При этом к полученным уравнениям присоединяются соотношения

$$\sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=d+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b_i^*}{\partial p_\nu} = 0 \qquad (2.1)$$

вытекающие из условий равенства нулю обобщенных сил реакций сервосвязей, отнесенных к координатам q_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Следовательно, для рассматриваемых систем принцип приведения условных связей к действительным сводится к обычному методу учета связей с последующим присоединением условий (2.1) равенства нулю сил реакций сервосвязей, отнесенных к системе Σ.

Покажем, что предлагаемый метод исследования систем с сервосвязями позволяет найти условия, при которых согласуются теории [1, 4]. Действительно, в уравнениях (1.8) кинетическая энергия составлена без учета связей (1.1) и (1.2). Поэтому она может быть представлена в виде

$$T = T(\Sigma) + T(\Sigma_1)$$

где $T(\Sigma)$ и $T(\Sigma_1)$ — кинетические энергии систем Σ и Σ_1 соответственно. Так как от координат q_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ будет зависеть только $T(\Sigma)$, то из (1.8) получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\Sigma)}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T(\Sigma)}{\partial q_i} = Q_i + N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l) \qquad (2.2)$$

к которым присоединяются соотношения (1.1) и (1.2), если не представляют интереса силы реакций сервосвязей. Введя обозначения $q_{l+\chi} = v_\chi$ $(\chi = 1, 2, \ldots, n - l)$ и записывая уравнения связей в виде

$$f_\alpha (q_i, v_\chi, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, a; \quad i = 1, 2, \ldots, l) \qquad (2.3)$$
$$\varphi_\beta (q_i, q_i^{\cdot}, v_\chi, v_\chi^{\cdot}, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, b; \ \chi = 1, 2, \ldots, n - l)$$

получим параметрические связи, отличающиеся от рассмотренных в [10] тем, что в функции φ_β входят также производные от параметров $v_\chi^{\cdot}$ $(\chi = 1, 2, \ldots, n - l)$.

Уравнения (2.2) совместно с соотношениями связей (2.3) образуют $a + b + l$ уравнений с $c + d + n$ неизвестными. Задача будет определенной, если число параметров v_χ совпадает с числом $e + f$ уравнений сервосвязей. Для определения сил реакций сервосвязей, прикладываемых к системе Σ_1, служат остальные уравнения из (1.8), к которым присоединяются соотношения (2.1).

Замечание 1. В [10] для управляемой системы Σ со связями (2.3) принцип Даламбера—Лагранжа постулируется как соотношение

$$\sum_{i=1}^{l} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\Sigma)}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T(\Sigma)}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0 \qquad (2.4)$$

справедливое на всяком возможном перемещении, определяемом условиями

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, c; \beta = 1, 2, \ldots, d) \tag{2.5}$$

Это позволяет получить уравнения движения в форме (2.2). Последние рассматриваются совместно со связями (2.3), среди которых e геометрических и f кинематических сервосвязей. Так как в [4] эти связи приводятся к действительным, то к условиям (2.5) должны быть присоединены соотношения

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i = 0 \tag{2.6}$$

$$(\alpha = c+1, c+2, \ldots, a; \quad \beta = d+1, d+2, \ldots, l)$$

Для того чтобы из (2.4) при условиях (2.5) и (2.6) получить уравнения движения в форме (2.2), необходимо и достаточно выполнение условий (2.1).

С точки зрения теории Бегена, для систем общая работа сил реакций сервосвязей на возможных перемещениях обращаэтся в нуль, если в (1.6) положить $\delta q_i = 0$ ($i = l+1, l+2, \ldots, n$). При этом из общей теории уравнения (2.2) при условиях (1.1) и (1.2) получаются тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.1).

Поэтому выполнение условий (2.1) необходимо и достаточно для совпадения выводов теорий [1] и [4].

Замечание 2. При отсутствии контактных параметрических связей в уравнениях (2.2) следует положить $N_i = 0$ и присоединить к ним $e + f$ соотношений сервосвязей.

3. Наряду с уравнениями сервосвязей из систем (1.1) и (1.2) будем рассматривать также соотношения

$$t_{c+\gamma}(q_i, t) = \eta_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, e) \tag{3.1}$$

$$\varphi_{d+\rho}(q_i, q_i^{\cdot}, t) = \zeta_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, f)$$

где η_γ и ζ_ρ — параметры, характеризующие непрерывное освобождение системы от геометрических и кинематических связей. При таком параметрическом освобождении системы [9] за отклонения принимаются левые части уравнений сервосвязей, вычисляемые на действительном движении [12], и вместо (1.5) можно получить следующее представление для многообразия допустимых состояний:

$$\begin{gathered} q_i = A_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, t) \quad (A_i^* \in C_1) \\ q_i^{\cdot} = B_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, p_\nu, \zeta_\rho, \eta_\gamma^{\cdot}, t) \quad (B_i^* \in C_1) \end{gathered} \tag{3.2}$$

причем при $\eta_\gamma = \eta_\gamma^{\cdot} = \zeta_\rho = 0$ получим равенства (1.5), определяющие многообразие допустимых состояний неосвобожденной системы.

Для учета c геометрических и d кинематических связей первого рода из систем (1.1) и (1.2) преобразуем их к переменным, определяющим многообразие (3.2), и предположим, что полученные при этом геометрические связи могут быть разрешены относительно переменных $q_{p+1}, q_{p+2}, \ldots, q_k$, а кинематические — относительно $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_m$.

Для многообразия допустимых состояний такой системы получим равенства

$$\begin{gathered} q_i = A_i(q_j, \eta_\gamma, t) \\ q_i^{\cdot} = B_i(q_j, \eta_\gamma, p_s, \zeta_\rho, \eta_\gamma^{\cdot}, t) \end{gathered} \tag{3.3}$$

причем вариации координат δq_i будут выражены через произвольные величины $\delta\pi_s$, $\delta\sigma_\rho$, $\delta\eta_\gamma$ следующим образом:

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial B_i}{\partial p_s} \delta\pi_s + \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\rho} \delta\sigma_\rho + \sum_{\gamma=1}^{e} \frac{\partial B_i}{\partial \eta_\gamma} \delta\eta_\gamma \tag{3.4}$$

Как известно [8], принцип Даламбера — Лагранжа для систем с сервосвязями может быть записан в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-\Phi_i\right)\delta q_i=0 \tag{3.5}$$

где вариации связаны условиями, допускаемыми связями первого рода.

Если учесть соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{c+\gamma}}{\partial q_i}\delta q_i=\delta\eta_\gamma,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{d+\rho}}{\partial q_i^{\cdot}}\delta q_i=\delta\sigma_\rho$$

то общая работа сил реакций сервосвязей может быть преобразована к виду, позволяющему уравнение (3.5) записать так:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-\Phi_i^{\tau}\right)\delta q_i=\sum_{\alpha=1}^{e}\lambda_{c+\alpha}\delta\eta_\alpha+\sum_{\beta=1}^{f}\mu_{d+\beta}\delta\sigma_\beta$$

Подставляя вместо δq_i их значения из (3.4), получим систему дифференциальных уравнений, которую путем введения энергии ускорений S, составленной с учетом (3.3), можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial S}{\partial p_s^{\cdot}}=Q_s^p+\Phi_s^p,\quad Q_s^p=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial B_i}{\partial p_s},\quad \Phi_s^p=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^{\tau}\frac{\partial B_i}{\partial p_s} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\eta_\alpha^{\cdot\cdot}}=Q_\alpha^\eta+\Phi_\alpha^\eta+\lambda_{c+\alpha},\quad Q_\alpha^\eta=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial B_i}{\partial\eta_\alpha^{\cdot}},\quad \Phi_\alpha^\eta=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^{\tau}\frac{\partial B_i}{\partial\eta_\alpha^{\cdot}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\zeta_\beta^{\cdot}}=Q_\beta^\zeta+\Phi_\beta^\zeta+\mu_{d+\beta},\quad Q_\beta^\zeta=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial B_i}{\partial\zeta_\beta},\quad \Phi_\beta^\zeta=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^{\tau}\frac{\partial B_i}{\partial\zeta_\beta}$$

Совместно с кинематическими соотношениями (3.3) они служат для определения неизвестных p_s, q_i, η_α, ζ_β. Параметрами управления в этих уравнениях будут величины λ_{c+1}, λ_{c+2}, ..., λ_a; μ_{d+1}, μ_{d+2}, ..., μ_b; u_1, u_2, ..., u_m.

Для систем, рассмотренных в разделе 2, к полученным уравнениям следует присоединить также условия (2.1).

Замечание 3. Введя обозначения

$$\eta_\gamma^{\cdot}=y_\gamma,\quad \zeta_\rho=y_{e+\rho},\quad \eta_\gamma=y_{q+\gamma}$$

$$\eta^{\cdot\cdot}{}_\gamma=V_\gamma,\quad \zeta_\rho^{\cdot}=V_{e+\rho}\ (q=e+f)$$

получим систему [11]

$$y^{\cdot}=Ay+BV \tag{7}$$

Эта система, описывающая отклонение движения от сервосвязей, вполне управляема [13], и для нее всегда можно найти управления вида $V=V(y)$, $V(0)=0$, обеспечивающие стабилизацию нулевого решения уравнений

$$y^{\cdot}=Ay+BV(y),\quad y(0)=y^{\circ}$$

Рассматривая эту систему совместно с уравнениями (3.6), будем иметь возможность определить силы реакций сервосвязей, обеспечивающие стабилизацию движений относительно многообразия, определяемого условиями сервосвязей, а также уравнения, предельные значения которых соответствуют движению системы согласно этим условиям.

4. В качестве примеров применения изложенного метода к исследованию систем с сервосвязями рассмотрим задачи Бегена.

Пример 1. Сохраняя все обозначения ([1], п. 17), рассмотрим задачу о движении пластинки Σ, шарнирно связанной с круглым диском Σ_1.

Ограничиваясь сначала случаем точного выполнения сервосвязи

$$\alpha - \beta - \pi/2 = 0 \tag{4.1}$$

и учитывая, что вариации координат связаны соотношением $\delta\alpha = \delta\beta$ и выполнены все условия замечания 2, будем иметь

$$T = T(\Sigma) + T(\Sigma_1) = \frac{1}{2}\{M[R^2\alpha^{\cdot 2} + (b^2 + k^2)\beta^{\cdot 2} + 2bR\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos(\alpha - \beta)] + I_1\alpha^{\cdot 2}\}, \quad Q_\alpha = -RF\sin\alpha$$

$$Q_\beta = -aF\sin\beta, \quad \Phi_\alpha{}^n = -\Phi_\beta{}^n = \lambda, \quad \Phi_\alpha{}^\tau = \Phi_\beta{}^\tau = u$$

Уравнения движения (1.8) совместно с условием (2.1), определяющим равенство $\lambda = u$, приводят к системе

$$\begin{gathered} M[(b^2 + k^2)\beta^{\cdot\cdot} - bk\beta^{\cdot 2}] + aF\sin\beta = 0 \\ [M(b^2 + k^2 + R^2) + I_1]\beta^{\cdot\cdot} + F(a\sin\beta + R\cos\beta) = 2u \end{gathered} \tag{4.2}$$

Замечание 4. В рамках теории [10] в общее уравнение динамики входят только заданные силы. Поэтому вывод уравнений (7.5) в [4] путем включения в число заданной силы Q_α параметра u, характеризующего реакцию, нельзя считать обоснованным. Применение теории [4] к решению этой задачи требует введения контактной параметрической связи, в качестве которой можно взять уравнение, выражающее условие сцепления сервомотора [1] с диском Σ_1.

Предположим теперь, что начальные условия системы несовместимы с уравнением (4.1) и требуется решить задачу о стабилизации движений относительно этого многообразия.

Соотношениями

$$\alpha = x + \eta + \pi/2, \quad \beta = x$$

тождественно удовлетворяющими условию

$$\alpha - \beta - \pi/2 = \eta$$

введем независимые координаты x и η и преобразуем к ним общее уравнение динамики

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} - Q_\alpha - \Phi_\alpha{}^\tau\right)\delta\alpha + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \beta^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} - Q_\beta - \Phi_\beta{}^\tau\right)\delta\beta = \lambda\delta\eta$$

В результате получим систему, которую путем присоединения уравнения

$$\eta^{\cdot\cdot} = V(\eta, \eta^{\cdot}), \quad V(0, 0) = 0, \quad \eta(0) = \eta^\circ, \quad \eta^{\cdot}(0) = \eta^{\cdot\circ} \tag{4.3}$$

с асимптотически устойчивым нулевым решением, можно записать в виде

$$\begin{gathered} [M(b^2 + k^2 + R^2 - 2bR\sin\gamma) + I_1]\beta^{\cdot\cdot} + [MR(R - b\sin\gamma) + I_1]V(\eta, \eta^{\cdot}) - \\ - MbR\eta^{\cdot}(\eta^{\cdot} + 2\beta^{\cdot})\cos\eta + F[a\sin\beta + R\cos(\beta + \eta)] = 2u \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$[MR(R - b\sin\eta) + I_1]\beta^{\cdot\cdot} + (MR^2 + I_1)V(\eta, \eta^{\cdot}) + MbR\beta^{\cdot 2}\cos\eta + RF\cos(\beta + \eta) = 2u$$

Уравнения (4.3) и (4.4) позволяют определить движение системы, а также силу реакций сервосвязи Φ_α, стабилизирующую движение относительно многообразия, определяемого сервосвязью (4.1). Причем уравнения (4.4) при $\eta \to 0$ переходят в предельную систему, которую можно привести к виду (4.2).

Пример 2. Рассмотрим задачу о качении без скольжения однородного шара радиуса R по материальной плоскости P. Сохраняя все обозначения ([1], п. 21), будем предполагать, что плоскость P, на которую действуют силы реакций сервосвязей, имеет массу m, а кинематические уравнения Эйлера заданы соотношениями

$$\begin{gathered} p = \theta^{\cdot}\cos\psi + \varphi^{\cdot}\sin\psi\sin\theta \\ q = \theta^{\cdot}\sin\psi - \varphi^{\cdot}\cos\psi\sin\theta \\ r = \psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\theta \end{gathered}$$

На систему, движение которой стеснено связями первого рода

$$\begin{gathered} \xi^{\cdot} - u^{\cdot} - R(\theta^{\cdot}\sin\psi + \varphi^{\cdot}\cos\psi\sin\theta) = 0 \\ \eta^{\cdot} - v^{\cdot} + R(\theta^{\cdot}\cos\psi + \varphi^{\cdot}\sin\psi\sin\theta) = 0 \end{gathered} \tag{4.5}$$

должны быть наложены сервосвязг

$$\xi^{\cdot} + \omega\eta = 0, \quad \eta^{\cdot} - \omega\xi = 0 \tag{4.6}$$

Составим уравнения движения и определим структуру сил реакций сервосвязей, обеспечивающих стабилизацию движения относительно многообразия, определяемого связями (4.6).

Энергия ускорений системы равна

$$S = S(\Sigma) + S(\Sigma_1) = {}^1/_2 M (\xi^{\cdot\cdot 2} + \eta^{\cdot\cdot 2}) + {}^1/_2 A (p^{\cdot 2} + q^{\cdot 2} + r^{\cdot 2}) + {}^1/_2 m (u^{\cdot\cdot 2} + v^{\cdot\cdot 2})$$

$$(A = {}^2/_5 MR^2)$$

Определяя в соответствии с (1.8) составляющие сил реакций сервосвязей и учитывая условия (2.1) равенства нулю сил реакций, отнесенных к координатам системы Σ, получим, что отличными от нуля будут лишь составляющие $\Phi_u = \Phi_u^{\tau}$, $\Phi_v = \Phi_v^{\tau}$.

Введя в рассмотрение уравнения

$$\xi^{\cdot} + \omega\eta = \zeta_1, \quad \eta^{\cdot} - \omega\xi = \zeta_2 \tag{4.7}$$

соотношениями

$$\xi^{\cdot} = \zeta_1 - \omega\eta, \quad \eta^{\cdot} = \zeta_2 + \omega\xi \tag{4.8}$$

$$\theta^{\cdot} = R^{-1} [(p_2 - \zeta_2 - \omega\xi) \cos\psi + (\zeta_1 - p_1 - \omega\eta) \sin\psi]$$

$$\psi^{\cdot} = R^{-1} \operatorname{ctg}\theta \, [(p_2 - \zeta_2 - \omega\xi) \sin\psi + (\zeta_1 - p_1 - \omega\eta) \cos\psi] + r$$

$$\varphi^{\cdot} = (R \sin\theta)^{-1} [(p_2 - \zeta_2 - \omega\xi) \sin\psi + (p_1 - \zeta_1 + \omega\eta) \cos\psi]$$

$$u^{\cdot} = p_1, \quad v^{\cdot} = p_2$$

тождественно удовлетворяющими условиям (4.5) и (4.7), введем скоростные параметры ζ_1, ζ_2, p_1, p_2, r. Преобразуя энергию ускорений системы к этим переменным, получим

$$S = {}^1/_2 M \langle [\zeta_1^{\cdot} - \omega(\zeta_2 + \omega\xi)]^2 + [\zeta_2^{\cdot} + \omega(\zeta_1 - \omega\eta)]^2 \} + {}^2/_5 \{ [\zeta_1^{\cdot} - p_1^{\cdot} -$$

$$- \omega(\zeta_2 + \omega\xi)]^2 + [p_2^{\cdot} - \zeta_2^{\cdot} - \omega(\zeta_1 - \omega\eta)]^2 + R^2 r^{\cdot 2} \} \rangle + {}^1/_2 m (p_1^{\cdot 2} + p_2^{\cdot 2})$$

Составляя уравнения движения в форме (3.6) и присоединяя к ним уравнения

$$\zeta_1^{\cdot} = V_1(\zeta_1), \quad V_1(0) = 0, \quad \zeta_1(0) = \zeta_1^{\circ} \tag{4.9}$$

$$\zeta_2^{\cdot} = V_2(\zeta_2), \quad V_2(0) = 0, \quad \zeta_2(0) = \zeta_2^{\circ}$$

с асимптотически устойчивым нулевым решением, получим систему

$$p_1^{\cdot} - {}^7/_2 [V_1(\zeta_1) - \omega(\zeta_2 + \omega\xi)] = 0 \tag{4.10}$$

$$p_2^{\cdot} - {}^7/_2 [V_2(\zeta_2) + \omega(\zeta_1 - \omega\eta)] = 0$$

$$(M + {}^7/_2 m) [V_1(\zeta_1) - \omega(\zeta_2 + \omega\xi)] = \Phi_u^{\tau}$$

$$(M + {}^7/_2 m) [V_2(\zeta_2) + \omega(\zeta_1 - \omega\eta)] = \Phi_v^{\tau}$$

Уравнения (4.9) и (4.10) совместно с кинематическими соотношениями (4.8) определяют движение системы, а также силы реакций сервосвязей. При $\zeta_1 \to 0$, $\zeta_2 \to 0$ из уравнений (4.10) и равенств (4.8) будет следовать предельная система, соответствующая выполнению соотношений сервосвязей (4.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беген А*. Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1967. 192 с.
2. *Пэнлеве П*. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
3. *Румянцев В. В*. О системах с трением // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 969—977.
4. *Киргетов В. И*. О движении управляемых механических систем с условными связями /сервосвязями/ // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 433—446.
5. *Пожарицкий Г. К*. Об уравнениях движения для систем с неидеальными связями // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 458—462.
6. *Нугманова Ш. С*. Об уравнениях движения регулируемых систем // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1953. Вып. 27. С. 23—40.
7. *Румянцев В. В*. О движении некоторых систем с неидеальными связями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1961. № 5. С. 67—75.
8. *Румянцев В. В*. О движении управляемых механических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 771—781.
9. *Четаев Н. Г*. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
10. *Киргетов В. И*. О кинематически управляемых механических системах // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 15—24.
11. *Азизов А. Г*. О движении одной управляемой системы переменной массы // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 567—572.
12. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д*. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
13. *Красовский Н. Н*. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
21.IV.1989