Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 531.36 + 62—50

С. П. Охезин

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Изучается задача оптимального управления формой области для уравнения теплопроводности. Предлагается аппроксимация этой задачи методом штрафа по форме области, приводящая к исследованию стандартной задачи управления билинейной параболической системой в фиксированной области.

В приложениях довольно часто возникают задачи, при изучении которых приходится сталкиваться с необходимостью решения уравнения теплопроводности для областей, форма которых изменяется со временем [1—4].

Подобные проблемы возникают при изучении процессов переноса энергии или массы, связанных с изменением агрегатного состояния вещества [5, 6], в вопросах теории плотин, механики почв, термики нефтяных пластов, в задачах фильтрации. Решение диффузионных задач для областей с движущимися границами лежит в основе теории зонной очистки материалов [3]. С математической точки зрения краевые задачи теплопроводности в области с движущейся границей принципиально отличны от классических задач теплопроводности. Вследствие зависимости геометрических размеров области от времени к этому типу задач в общем случае неприменимы классические методы исследования, используемые в математической физике.

Для эллиптических управляемых систем проблемы такого сорта были поставлены в обзоре [7]. Обстоятельное исследование этих задач содержится в [8].

Основная сложность, с которой сталкиваются при изучении проблем управления в переменных во времени областях, заключается в том, что приходится иметь дело с функциями состояния $y(t, x)$, определенными при разных значениях t в разных областях изменения переменной x. Для преодоления этой трудности в данной работе предлагается метод штрафа по форме области, позволяющий свести задачу с переменной областью к задаче, определенной в заранее заданном фиксированном множестве. Последняя по своей структуре отличается от первоначальной только наличием дополнительного штрафного слагаемого, содержащего всю информацию о форме области, и представляет собой аналог управляемой билинейной системы, зависящей от большого параметра.

Исследованию свойств этой новой аппроксимирующей системы и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состояние которой описывается следующими уравнениями:

$$y^{\cdot}(t, x) = y''(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < u(t) \tag{1.1}$$

$$y(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant u_0 \tag{1.2}$$

$$y(t, 0) = 0, \; y(t, u(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3}$$

$$u^{\cdot}(t) = v(t), \text{ п. в. } t \in [0, T], \quad v(t) \in [0, V] \tag{1.4}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.5}$$

Здесь $y(t, x)$ — состояние управляемой системы в момент времени t — функция переменной x, изменяющейся на отрезке $[0, u(t)]$, $\varphi(x)$ — начальное распределение величины y. Функция $u(t)$ — абсолютно непрерывная функция, при почти всех t удовлетворяющая уравнению (1.4), $v(t)$ — измеримая по Лебегу функция с областью изменения $[0, V]$, играющая роль управления и определяющая «форму» нецилиндрической области $Q(u) = \{(t, x) \mid t \in (0, T),\ 0 < x < u(t)\}$ изменения аргументов t и x; точкой обозначено дифференцирование по времени, штрихом — по координате x. Таким образом, в каждый момент времени $t \in [0, T]$ состояние системы есть функция $y(t, x)$, определенная при $x \in [0, u(t)]$.

На состояниях этой системы, рассматриваемых в момент времени T, задан функционал качества

$$J(v(\cdot)) = G(y(T, \cdot)) \tag{1.6}$$

Для этого функционала ставится задача поиска управления $v^\circ(\cdot)$, доставляющего ему минимум: $J(v^\circ(\cdot)) = \inf J(v(\cdot))$ по всем допустимым управлениям $v(\cdot)$. (Предлагаемый ниже метод моделирования задач управления формой области распространяется на задачи оптимизации с функционалами качества отличными от (1.6) (см., например, разд. 4).)

Для решения этой задачи предлагается следующая математическая модель. Выберем число X таким образом, чтобы при всех $v(t) \in [0, V]$, $u(t) \in [0, X]$, и рассмотрим в фиксированной области $D = (0, T) \times (0, X)$ модельную задачу, зависящую от параметра $\varepsilon > 0$

$$y_\varepsilon^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x) - y_\varepsilon''(t, x) + \varepsilon^{-1} U(t, x)\, y_\varepsilon(t, x) = 0,\quad (t, x) \in D \tag{1.7}$$

$$y_\varepsilon(0, x) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (u_0, X] \\ \varphi(x), & x \in [0, u_0] \end{cases}$$

$$y_\varepsilon(t, x) = 0,\quad (t, x) \in \Sigma = [0, T] \times (\{0\} \cup \{X\})$$

$$u^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = v(t),\ \text{п. в. } t \in [0, T],\ u(0) = u_0 \tag{1.8}$$

$$U(t, x) = \begin{cases} 1, & x \in [u(t), X] \\ 0, & x \in [0, u(t)) \end{cases},\quad t \in [0, T]$$

В уравнении (1.7) последний член играет роль штрафного слагаемого. Состояние новой управляемой системы $y_\varepsilon(t, x)$ в каждый момент времени t есть функция, определенная при $x \in [0, X]$. Изменение формы области во времени описывается функцией $U(t, x)$. По структуре (1.7), (1.8) — билинейная управляемая система параболического типа, зависящая от параметра аппроксимации $\varepsilon > 0$. Естественно ожидать, что при $\varepsilon \to 0$ решения этой системы будут приближать решения системы (1.1) (1.5) в подходящем функциональном пространстве.

В дальнейшем будем рассматривать различные функционалы качества G, определенные на подходящих функциональных пространствах. Примером такого функционала может служить

$$G(z(\cdot)) = \int_0^X [z(x) - g(x)]^2\, dx \tag{1.9}$$

где $g(x)$ — заданная функция из пространства $L_2(0, X)$ (см. также разд. 4).

Управляемые системы вида (1.7)—(1.9) хорошо изучены в литературе по оптимальному управлению в распределенных системах [4, 7]. Решения этих задач, зависящие от параметра ε, существуют и имеется большое количество приближенных методов, позволяющих их получить.

Основной результат работы заключается в утверждении, что при $\varepsilon \to 0$ оптимальные решения задачи (1.7)—(1.9) сходятся к оптимальному решению задачи (1.1)—(1.6).

2. Математическая формализация. Введем следующие обозначения: $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева первого порядка на множестве Ω [9—11]; $f|_S$ — сужение функции f (след, если он существует) на множество S;

$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial\Omega\}$; $\operatorname{supp} f$ — носитель функции (распределения) f; $\Sigma(u) = [0, T] \times \{0\} \cup \{(t, x) \mid t \in [0, T],\ x = u(t)\}$.

Определение. Решением задачи (1.1)—(1.5) будем называть всякую функцию y, удовлетворяющую условиям

$$y \in H^1(Q(u)), \quad y|_{\Sigma(u)} = 0, \quad y|_{t=0} = \varphi$$

и интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q(u)} \{y^{\cdot}\varkappa + y'\varkappa'\}\, dxdt = 0, \ \forall \varkappa \in \Phi(u) =$$

$$= \{\varkappa \in C^\infty(\overline{Q(u)}) \mid \forall t \in [0, T] \operatorname{supp} \varkappa(t, \cdot) \subset (0, u(t)),\ \varkappa(T, x) \equiv 0\}$$

Обобщенное решение аппроксимирующей системы понимается в смысле теории распределений и является элементом пространства $L_2(0, T; H_0^1(0, X)) \cap H^1(0, T; L_2(0, X)) \cap L_\infty(0, T; L_2(0, X))$ [9—11].

Стандартными приемами [9—11] с привлечением априорных оценок в энергетических нормах доказывается

Теорема 1. Пусть $\varphi \in H_0^1(0, u_0)$, тогда существует единственное решение задачи (1.1)—(1.5). ▯

3. Основные результаты. Обозначим $y(t, x; u(\cdot))$ решение системы (1.1)—(1.5), продолженное нулем на множество $D \setminus \overline{Q(u)}$ и отвечающее выбранной функции $u(\cdot)$, определяющей форму области. Пусть $y_\varepsilon(t, x; u(\cdot))$ — соответствующее решение системы (1.7), (1.8).

Теорема 2 (о равномерной по $u(\cdot)$ аппроксимации). При $\varepsilon \to 0$ $y_\varepsilon(T, \cdot; u(\cdot)) \to y(T, \cdot; u(\cdot))$ слабо в $L_2(0, X)$ и равномерно на множестве всех допустимых управлений $\{u(\cdot)\}$.

Замечания. 1°. В силу наложенных на параметры системы ограничений, допустимые функции $u(\cdot)$ — монотонно возрастающие. Это позволяет получить стандартными методами [10] энергетические оценки производных $y_\varepsilon^{\cdot}$ в метрике пространства $L_2(0, T; L_2(0, X))$, равномерные по $\{u(\cdot)\}$ и не зависящие от $\varepsilon > 0$, что в конечном итоге и обеспечивает требуемое свойство равномерной аппроксимации.

2°. Используя вероятностное представление для решения системы (1.7), (1.8) [12, 13] можно доказать более сильное утверждение о сходимости y_ε к y в метрике $L_2(0, X)$, равномерной на более широком классе допустимых управлений $\{u(\cdot)\}$ (не обязательно монотонных).

3°. Равномерная по $\{u(\cdot)\}$ сходимость $y_\varepsilon(T, \cdot; u(\cdot))$ к $y(T, \cdot; u(\cdot))$ позволяет рассматривать систему (1.7), (1.8) как аппроксимирующую для системы (1.1)—(1.5). Оптимальное управление $v_\varepsilon^\circ(\cdot)$, решающее задачу оптимизации (1.7)—(1.9), существует [11, 14] и, в силу компактности множества $\{v(\cdot)\}$ в слабой топологии $L_2(0, T)$, при $\varepsilon \to 0$ сходится к управлению $v^\circ(\cdot)$, решающему задачу (1.1)—(1.6). Таким образом показано, что задача управления для системы (1.1)—(1.5) может быть аппроксимирована задачей управления для стандартной управляемой системы (1.7), (1.8).

4°. Аппроксимирующая система отличается от исследуемой только наличием дополнительного штрафного слагаемого.

5°. При условии монотонного по включению изменения областей $Q(u)(\tau) = Q(u) \cap \{t = \tau\}$ во времени полученные выше результаты допускают естественное обобщение и для более общих многомерных (по переменной x) уравнений параболического типа.

4. В качестве примера предлагаемой в работе аппроксимации рассмотрим ее приложение к однофазной задаче Стефана.

Классическая модель одномерной фронтальной задачи Стефана описывается следующими уравнениями [5, 6]:

$$\begin{gathered} y^{\cdot}(t, x) = y''(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < u(t) \\ y(0, x) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant u_0; \quad y(t, 0) = 0, \quad y(t, u(t)) = 0 \\ y'(t, u(t)) = -ku^{\cdot}(t), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $y(t, x)$ — температура «жидкой» фазы в точке x в момент времени t. Функция $\varphi_0(\cdot)$ описывает начальное распределение температуры в «жидкой» фазе, а функция $u(t)$ описывает изменение формы области, занятой жидкой фазой. В каждый момент времени t $u(t)$ — граница раздела фаз. Предпоследнее условие в (4.1) является математической формой записи уравнения теплового баланса на границе раздела фаз.

Смоделируем, используя приведенные выше результаты, задачу Стефана в виде задачи оптимального управления формой области для уравнения теплопроводности.

По виду функции $\varphi_0(\cdot)$ можно априорно оценить [5, 6] величину производной $u^{\cdot}(t) \equiv v(t)$ в задаче Стефана. Будем считать, что эта оценка известна: $v(t) \in [0, V]$ и число X выбрано так, что $u(t) \in (0, X)$ $\forall t \in [0, T]$.

Рассмотрим соответствующую модельную задачу оптимального управления

$$y_\varepsilon^{\cdot}(t, x) - y_\varepsilon''(t, x) + \varepsilon^{-1} U_\varepsilon(t, x)\, y_\varepsilon(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D$$

$$y_\varepsilon(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [0, u_0] \\ 0, & x \in (u_0, X] \end{cases}$$

$$y_\varepsilon(t, 0) = 0, \quad y_\varepsilon(t, X) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \tag{4.2}$$

$$u^{\cdot}(t) = v(t), \; u(0) = u_0$$

$$J(\varepsilon, v(\cdot)) = \int_0^T [y_\varepsilon'(t, u(t)) + kv(t)]^2\, dt \to \inf \tag{4.3}$$

Здесь $U_\varepsilon(t, x)$ — функция, отвечающая за «форму» области, в которой развивается процесс, и имеющая вид

$$U_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leqslant u(t) \\ w_\varepsilon(x - u(t) - \varepsilon), & u(t) < x \leqslant u(t) + \varepsilon \\ 1, & u(t) + \varepsilon < x < X \end{cases}$$

$$w_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \omega_\varepsilon(|\xi|)\, d\xi, \quad \omega_\varepsilon(|\xi|) = \begin{cases} 0, & |\xi| \geqslant \varepsilon \\ C\varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon^2(\varepsilon^2 - |\xi|^2)^{-1}), & |\xi| < \varepsilon \end{cases}$$

Число C выбрано из условия

$$\int_{-\infty}^{0} \omega_\varepsilon(|\xi|)\, d\xi = 1$$

По структуре функция $U_\varepsilon(t, x)$ — гладкая регуляризация характеристической функции $U(t, x)$. Выбор гладкой функции $U_\varepsilon(t, x)$, аппроксимирующей характеристическую функцию $U(t, x)$, обусловлен видом функционала качества (4.3).

Используя технику, примененную в теореме 2, можно показать, что задача (4.2), (4.3) имеет решение $y_\varepsilon(t, x;\; u_\varepsilon^\circ(\cdot))$, $v_\varepsilon^\circ(\cdot)$, которое при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению задачи Стефана. При этом $y_\varepsilon(t, x;\; u_\varepsilon^\circ(\cdot))$ сходится к $y(t, x)$ в норме пространства $L_2(D)$, а $v_\varepsilon^\circ(\cdot)$ сходится к $v^\circ(\cdot)$ в слабой топологии пространства $L_2(0, T)$.

Таким образом, предлагаемый в работе метод штрафа по области позволяет свести решение задачи Стефана к задаче оптимального управления для специально сконструированной системы (4.2), решение которой при достаточно малых $\varepsilon > 0$ мало отличается от решения задачи Стефана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринберг Г. А.* О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 269—273.
2. *Карташов Э. М., Любов Б. Я.* Аналитические методы решения краевых задач управления теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83—111.
3. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
6. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
7. *Лионс Ж.-Л.* Об оптимальном управлении распределенными системами // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28. Вып. 4. С. 15—46.
8. *Осипов Ю. С., Суетов А. П.* Об одной задаче Ж.-Л. Лионса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 288—291.

9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
11. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 611 с.
13. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1987. 597 с.
14. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
23.VI.1989