Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 3, 1990

УДК 531.36 + 62—50



Ю. С. Корбич, В. И. Максимов, Ю. С. Осипов

# ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются задачи динамического моделирования управлений в параболических системах, содержащих диссипативные операторы. Указываются устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы восстановления неизвестных управлений для достаточно общего класса систем. Приводятся примеры.

Ранее [1, 2] был предложен метод исследования задач восстановления характеристик динамических систем, опирающийся на идеи теории позиционного управления [3] и теорию некорректных задач [4] и охватывающий системы с конечным числом степеней свободы. Ниже этот метод развивается для новых классов систем с распределенными параметрами.

1. Содержание изучаемой задачи поясним на модельном примере, описывающем процесс распространения кислорода в поглощающей ткани [5]. Пусть имеется поглощающая ткань, занимающая область $\Omega \subset R^n$ с границей Г. Концентрацию кислорода в ткани в момент $t \in T = [t_0, \vartheta]$ в точке $\eta \in \Omega$ обозначим $y(\eta, t)$. В течение времени $T$ происходит поглощение кислорода. Скорость поглощения $u(\eta, t)$ неизвестна. Однако в дискретные моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta_i$, $\delta_i > 0$, $i \in [0: m-1]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$ с некоторой точностью замеряется концентрация кислорода $y(\eta, \tau_i)$, т. е. находится функция $\psi(\eta, \tau_i)$, приближающая $y(\eta, \tau_i)$. Требуется указать процедуру вычисления $u(\eta, t)$ синхронно с процессом поглощения.

Математически модель процесса поглощения кислорода может быть описана соотношениями

$$y_t^{\boldsymbol\cdot}(\eta, t) - \Delta y(\eta, t) + \partial I_K(y(\eta, t)) \ni u(\eta, t)$$
$$t \in T, \quad y(\eta, t_0) = y_0(\eta) \tag{1.1}$$

Здесь $\partial I_K$ — субдифференциал индикаторной функции множества $K = \{w \in L_2(\Omega) \mid w(\eta) \geqslant 0$ при п. в. $\eta \in \Omega\}$. Функцию $u(\cdot)$ будем в дальнейшем называть управлением. Она подлежит восстановлению.

В соответствии с подходом [1, 2] для вычисления неизвестного управления $u(\cdot)$ поступим следующим образом. Системе (1.1) поставим в соответствие управляемую систему $M$ (модель) с управлением $v(\cdot)$ и фазовой траекторией $z(\cdot)$. Затем построим алгоритм формирования управления $v(\cdot)$ в модели по принципу обратной связи $v(\cdot) = v(\cdot; y(\cdot), z(\cdot))$, такой, что $v(\cdot)$ приближает в подходящем смысле неизвестное управление $u(\cdot)$. Следовательно, заменим задачу вычисления неизвестного управления задачей построения алгоритма формирования управления в модели. При этом алгоритм формирования управления в модели по существу и будет алгоритмом восстановления неизвестного управления. Такой алгоритм должен обладать свойством устойчивости к искажению входной информации.

В работе задача восстановления управления рассматривается для нелинейных параболических включений, содержащих диссипативные операторы. Сначала исследуется проблема восстановления распределенных управлений в системах

$$y^{\cdot}(t) \in Ay(t) + Bu(t) + f(t); \quad t \in T, \quad y \in E, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (1.2)$$

включающих в себя систему (1.1). Затем подобные вопросы изучаются для задач граничного управления, описываемых соотношениями

$$y^{\cdot} = \sigma y + B_1 u_1, \quad y \in E; \quad \tau y = B_2 u_2, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (1.3)$$

При этом существенно используются некоторые идеи [6, 7], а также результаты [8]. В заключительной части статьи построенные конструкции иллюстрируются на примерах.

Примем обозначения: $L(U, X)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из $U$ в $X$, $C([a, b]; E)$ и $L_2([a, b]; E)$ — стандартные пространства, $W^{1,2}([a, b]; E)$ — пространство сильно абсолютно непрерывных функций, первая производная которых принадлежит $L_2([a, b]; E)$; $W^{1,2}((a, b]; E)$ пространство функций $w(\cdot): [a, b] \to E$, таких, что для любого $\varepsilon > 0$ $w(\cdot): [a+\varepsilon, b] \to E$ есть элемент пространства $W^{1,2}([a+\varepsilon, b]; E)$; $\Delta$ — разбиение отрезка $T$ с диаметром $\delta$, т. е. совокупность точек $\{\tau_i\}$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i \in [0: m-1]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$, $\delta = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$; $\partial\varphi$ — субдифференциал $\varphi$: $E \to (-\infty, +\infty]$; $\partial\varphi^0(y) = \{z \in E \mid |z|_E = \inf |z|_E, \ z \in \partial\varphi(y)\}$; $\bar{A}$ — замыкание множества $A \subset E$; $D(\varphi) = \{y \in E \mid \varphi(y) < +\infty\}$; $\Omega \subset R^n$ — область с границей $\Gamma$; $Q = \Omega \times (t_0, \vartheta)$; $\Sigma = \Gamma \times (t_0, \vartheta)$.

2. Пусть в действительном гильбертовом пространстве $(E, |\cdot|)$ рассматривается управляемая система $\Sigma$, описываемая включением (1.2) с нелинейным многозначным диссипативным оператором $A = -\partial\varphi$, $\varphi$: $E \to (-\infty, +\infty]$ — выпуклая, собственная, полунепрерывная снизу функция, $f(\cdot) \in L_2(T; E)$ — заданное возмущение, $u(t) \in P \subset U$ — управление, $P$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество, $(U, \|\cdot\|)$ — действительное гильбертово пространство, $B \in L(U, E)$. В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y) \geqslant 0$.

Функция $y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot))$ называется сильным решением системы (1.2), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ и начальному состоянию $y_0$, если $y(t_0) = y_0$, $y(\cdot) \in C(T; E) \cap W^{1,2}(T; E)$ и при п. в. $t \in T$ удовлетворяет равенству

$$y^{\cdot}(t) = (Ay(t) + Bu(t) + f(t))^0 \qquad (2.1)$$

Известно ([9], предложение 5), что для любых $y_0 \in D(\varphi)$, $u(\cdot) \in L_2(T; U)$, $f(\cdot) \in L_2(T; E)$ существует единственное сильное решение (1.2), причем

$$|y^{\cdot}(\cdot)|_{L_2(T;E)} \leqslant |Bu(\cdot) + f(\cdot)|_{L_2(T;E)} + \varphi^{1/2}(y_0) \qquad (2.2)$$

Функция $y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot))$ называется слабым решением (1.2), если найдется последовательность $\{y^{(n)}\} \in D(\varphi)$, такая, что $y^{(n)} \to y_0$ в $E$, $y^{(n)}(\cdot) = y(\cdot; y^{(n)}, u(\cdot)) \to y(\cdot)$ в $C(T; E)$. Слабое решение $y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot))$ существует для любых $y_0 \in \overline{D(\varphi)}$, $u(\cdot) \in L_2(T; U)$, $f(\cdot) \in L_2(T; E)$ и обладает свойствами: $y(\cdot) \in C(T; E) \cap W^{1,2}((t_0, \vartheta]; E)$ и при п. в. $t \in T$ удовлетворяет (2.1) ([10], теорема 22) $t \to \varphi(y(t)) \in C((t_0, \vartheta]; R)$ ([9], предложение 5).

Кратко напомним суть обсуждаемой проблемы. Движение системы (1.2)— $y(\cdot)$ является слабым решением, порожденным неизвестным управлением $u(\cdot)$, $u(t) \in P$ при п. в. $t \in T$. Как $y(\cdot)$, так и начальное положение $y_0$ тоже неизвестны. Однако имеется текущая информация о $y(\cdot)$ —

поступающие в моменты $\tau_i \in \Delta$ элементы $\psi_i \in E$, причем $|\psi_i - y(\tau_i)| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Требуется указать алгоритм, восстанавливающий $u(\cdot)$.

Для вычисления $u(\cdot)$ введем модель, описываемую включением

$$\dot{z}(t) \in Az(t) + Bv^h(t) + f(t), \quad t \in T \tag{2.3}$$

с начальным условием $z(t_0) = z_0 \in D(\varphi)$, $|z_0 - \psi_0| \leqslant 2h$ и траекторией $z(\cdot) = z(\cdot; z_0, v^h(\cdot))$ — сильным решением (2.3). Управлять моделью будем по принципу обратной связи. Именно выберем следующую процедуру формирования управления $v^h(\cdot) = v^h(\cdot; \psi_i, y(\tau_i))$:

$$v^h(t) = v_i \text{ при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \tag{2.4}$$

$$v_i \in \{v \in P \mid l(s_i, v) \leqslant l(s_i) + h\}$$

$$l(s_i, v) = 2(s_i, Bv)_E + \alpha \|v\|^2 \tag{2.5}$$

$$l(s_i) = \inf\{l(s_i, v) \mid v \in P\}, \quad s_i = z(\tau_i) - \psi_i$$

Обозначим: $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности функции $y(\cdot)$, т. е.

$$\omega(\delta) = \sup\{|y(t) - y(\xi)| \mid |t - \xi| \leqslant \delta,\ t, \xi \in T\}$$

$U_*$ — множество всех управлений $v(\cdot) \in L_2(T; U)$, удовлетворяющих условию: $z(\cdot; y_0, v(\cdot)) = y(\cdot)$, $v(t) \in P$ при п. в. $t \in T$. Можно проверить, что $U_*$ содержит единственный элемент $u_*(\cdot)$ с минимальной нормой в пространстве $L_2(T; U)$.

Пусть выбраны величины $\alpha(h) > 0$, $\delta(h) > 0$, $z_0 = z_0^{(h)}$, $\alpha(h) \to 0$, $h \cdot \alpha^{-1}(h) \to 0$, $|z_0 - y_0| \leqslant ch$ и

$$\alpha^{-1}(h)\{\omega(\delta(h)) + \delta(h)(1 + \varphi^{1/2}(z_0))\} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+ \tag{2.6}$$

*Теорема 2.1.* Справедливо утверждение

$$\|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2(T;U)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+$$

Доказательство теоремы проводится по схеме [1] и основывается на том, что алгоритм формирования управления $v^h(\cdot)$ в модели обеспечивает «стабилизацию» в течение времени $T$ функционала

$$\varepsilon_\alpha(t) = |z(t) - y(t)|^2 + \alpha \int_{t_0}^{t} \{\|v^h(\xi)\|^2 - \|u_*(\xi)\|^2\}\, d\xi$$

*Замечания.* 1°. Теорема 2.1 верна также, если (2.6) заменить более слабым условием

$$\alpha^{-1}(h)\Big\{\sum_{i=0}^{m-1} \delta_i\omega_i + \delta(1 + \varphi^{1/2}(z_0^{(h)}))\Big\} \to 0 \text{ при } h \to 0+, \tag{2.7}$$

$$\delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad \omega_i = \sup\{|y(t) - y(\tau_i)| \mid t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\}$$

2°. Если $y_0 \in D(\varphi)$, то можно положить $z_0 = y_0$. В силу (2.2) в этом случае условие (2.7) будет иметь место, когда $\delta\alpha^{-1}(h) \to 0$ при $h \to 0+$.

3°. При формировании управления $v^h(\cdot)$ можно использовать вместо $z(\tau_i)$ их приближение $z^*(\tau_i)$: $|z(\tau_i) - z^*(\tau_i)| \leqslant ch$.

3. Рассмотрим теперь случай системы (1.3). Считаем, что $E$, $X$, $U_1$, $U_2$ — действительные гильбертовы пространства, $\sigma$: $E \to E$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, $\tau$: $E \to X$ — линейный (граничный) оператор, $B_1$: $U_1 \to E$ и $B_2$: $U_2 \to X$ — линейные непрерывные операторы, $u_1 = u_1(t) \in P_1$, $u_2 = u_2(t) \in P_2$ при п. в. $t \in [0, \vartheta]$ $(t_0 = 0)$, $P_1 \subset U_1$ и $P_2 \subset U_2$ — выпуклые, ограниченные и замкнутые множества.

Введем оператор $A \in L(E, E)$ следующим образом:

$$D(A) = \{y \in D(\sigma) \mid \tau y = 0\}, \quad Ay = \sigma y, \quad \forall y \in D(A)$$

В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия [8].

1°. $D(\sigma) \subset D(\tau)$ и сужение $\tau$ на $D(\sigma)$ непрерывно.

2°. $A$ — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ на $E$.

3°. Существует оператор $B \in L(U_2, E)$ со свойствами

$$\sigma B \in L(U_2, E), \quad \tau(Bu) = B_2 u, \quad \forall u \in U_2$$
$$|Bu| \leqslant c\, |B_2 u|_X, \quad \forall u \in U_2$$

где $c$ — положительная постоянная.

4°. Для любых $t \in (0, \vartheta]$ и $u \in U_2$, $S(t)\, Bu \in D(A)$. Существует положительная функция $\gamma(\cdot) \in L_1([0, \vartheta]; R)$, такая, что

$$\| AS(t)\, B \|_{L(U_2, E)} \leqslant \gamma(t) \text{ при п. в. } t \in (0, \vartheta)$$

Пусть

$$U = U_1 \times U_2, \quad u = (u_1, u_2), \quad \Lambda \in L(U, E)$$
$$\Lambda u = \Lambda(u_1, u_2) = \Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2, \quad \forall u_1 \in U_1$$
$$u_2 \in U_2, \quad \Lambda_1 = \Pi^{-1} B_1, \quad \Lambda_2 = \Pi^{-1}(\sigma B - \lambda_0 B) - B, \quad \Pi = A - \lambda_0 I, \quad \lambda_0 \in \rho(A)$$

где $\rho(A)$ — резольвента $A$. Тогда система (1.3) переписывается в виде

$$y^{\cdot} = Az + B_1 u_1 + \sigma B u_2 + f, \quad y = z + Bu_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.1}$$

которая, в свою очередь, преобразуется к эквивалентной абстрактной задаче Коши для системы [8]

$$w^{\cdot} = Aw + \Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2 + \Pi^{-1} f, \quad y = \Pi w \tag{3.2}$$

Слабым решением системы (3.2), а следовательно, и систем (3.1), (1.3), называется функция $y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot)) \in C([0, \vartheta]; E)$, определяемая равенством

$$y(t) = V(t; y_0, u(\cdot)) = S(t)\, y_0 + \int_0^t \Pi S(t-s)(\Lambda u(s) + \Pi^{-1} f(s))\, ds$$

При сформулированных выше условиях любым $y_0 \in E$ и $u(\cdot) \in L_\infty([0, \vartheta]; U)$ отвечает единственное слабое решение [8].

Для вычисления управления $u_*(\cdot) \in U_*$ можно воспользоваться описанным в разд. 2 алгоритмом. При этом в качестве модели $M$ следует взять систему

$$p^{\cdot}(t) = Ap(t) + \Lambda v^h(t) + \Pi^{-1} f(t), \quad z(t) = \Pi p(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.3}$$

понимая под движением $z(t) = V(t; \psi_0, v^h(\cdot))$. Отображения $\alpha(h)$ и $\delta(h)$ надо выбирать из условия:

$$\alpha(h) \to 0, \quad h\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \delta(h)\, \alpha^{-1}(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+$$

Управление $v^h(\cdot)$ в модели необходимо вычислять по правилу (2.4), полагая

$$v_i = v_i(t) \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$
$$l_1(s_i^*, v_i(\cdot)) \leqslant l_1(s_i^*) + h\delta_i, \quad s_i^* = S(\delta_i)\, \Pi^{-1}(z(\tau_i) - \psi_i)$$
$$l_1(s_i^*, v_i(\cdot)) = 2\left(s_i^*, \int_0^{\delta_i} S(\delta_i - s)\, \Lambda v_i(\tau_i + s)\, ds\right)_E$$
$$\alpha \int_0^{\delta_i} \| v_i(\tau_i + s) \|^2\, ds, \quad l_1(s_i^*) = \inf \{ l_1(s_i^*;$$
$$v(\cdot)) \mid v(t) \in P \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \}$$

При таком выборе модели, отображений $\alpha(h)$ и $\delta(h)$, а также правиле вычисления управления $v^h(\cdot)$ имеет место теорема 2.1, если $z_0 = \psi_0$.

*Замечания.* 4°. Пусть

$$\omega_1(\delta) = \sup\{|\{S(t) - S(\xi)\}\Lambda v| \mid t, \xi \in [0, \delta], v \in P\}$$
$$\omega_1(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$
$$\{\omega_1(\delta(h)) + \delta(h)\}\alpha^{-1}(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+.$$

Тогда можно определить $v^h(\cdot)$ согласно (2.4), (2.5), считая в (2.5) $B = \Lambda$, $s_i = s_i^*$.

*Замечания.* 5°. Теорема 2.1 также верна, если полугруппа $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ $\omega$ — диссипативная: $|S(t)z| \leqslant e^{\omega t}|z|$, $\forall z \in E$.

4. **Примеры.** 1°. Рассмотрим задачу граничного управления линейной параболической системой с условиями Дирихле. Пусть $\Omega \subset R^n$ — открытое ограниченное множество с достаточно гладкой границей и

$$y_t^{\boldsymbol{\cdot}}(\eta, t) - \Delta y(\eta, t) = f(\eta, t) \quad \text{в} \quad \Omega \tag{4.1}$$
$$y(\eta, t)|_\Gamma = u(\eta, t) \quad \text{при} \quad t \in (0, \vartheta),\ y(\eta, 0) = y_0(\eta)$$
$$y_0(\eta) \in L_2(\Omega),\ f \in L_2(Q), \quad u \in L_2(\Sigma),\ |u(\eta, t)|_{L_2(\Gamma)} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \text{п. в. } t \in (0, \vartheta).$$

Чтобы переписать систему (4.1) в виде (1.3), следует положить [8]:

$$E = U_1 = L_2(\Omega),\ X = H^{-1/2}(\Gamma), \quad U_2 = L_2(\Gamma), \quad B_1 = 0$$
$$B_2 = I, \quad \sigma = \Delta, \quad D(\sigma) = \{y \in L_2(\Omega) \mid \Delta y \in L_2(\Omega)\}$$

где $\tau$ — оператор следа: $\tau y \in H^{-1/2}(\Gamma)$, если $y \in D(\sigma)$, $A = \Delta$, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Линейный непрерывный оператор $B$: $L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega)$ задается по правилу: $Bu = w_u$, $w_u \in L_2(\Omega)$ — единственное обобщенное решение задачи Дирихле $\Delta w_u = 0$ на $\Omega$, $w_u|_\Gamma = 0$, т. е.

$$\int_\Omega w_u \Delta\psi d\eta = \int_\Gamma u \frac{\partial\psi}{\partial n} ds\ \forall\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Условия 1°—4° из разд. 3 выполнены, причем $\gamma = Ct^{-3/4}$ [8]. Фазовое положение модели при $\lambda_0 = 0$ находится по формуле

$$z(t) = S(t)y_0 - \int_0^t \Delta S(t-s)Bu(s)ds$$

а управление $v_i(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ в момент $\tau_i$ определяется из условий

$$v_i(t) = v_*(t - \tau_i) \quad \text{при} \quad \text{п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

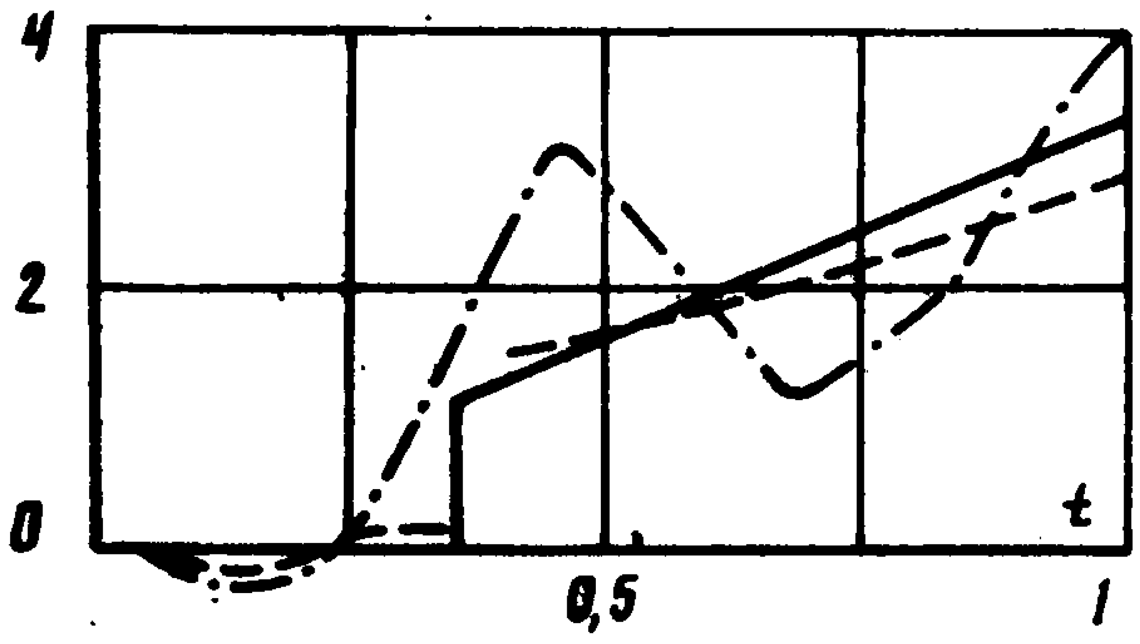
$$2\int_0^{\delta_i}\left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{-1}S(\delta_i - s)s_i^*|_\Gamma,\ v_*(s)\right)_{L_2(\Gamma)} + \alpha\int_0^{\delta_i}\|v_*(s)\|^2_{L_2(\Gamma)}ds \leqslant$$
$$\leqslant \inf\left\{2\int_0^{\delta_i}\left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{-1}S(\delta_i - s)s_i^*|_\Gamma,\quad v(s)\right)_{L_2(\Gamma)}ds + \right.$$
$$\left. + \alpha\int_0^{\delta_i}\|v(s)\|^2_{L_2(\Gamma)}ds \mid \|v(s)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant 1 \text{ при п. в. } s \in [0, \delta_i]\right\} + h\delta_i$$
$$s_i^* = S(\delta_i)A^{-1}(z_i - \psi_i), \quad |z_i^* - z(\tau_i)|_{L_2(\Omega)} \leqslant h$$

2°. На ЭВМ был смоделирован процесс восстановления $u$ в системе (1.1) при следующих данных:

$$n = 2, \quad \Omega = \{(\eta_1, \eta_2) \mid 0 < \eta_1 < 1, \quad 0 < \eta_2 < 1\}$$
$$T = [0, 1], \quad y_0(\eta) = 0, \quad P = \{u(\eta) \in L_2(\Omega) \mid$$
$$|u(\eta)| \leqslant 20 \text{ при п. в. } \eta \in \Omega\}$$
$$y(t, \eta) = \begin{cases} 5t(1-\eta_1)(1-\eta_2)\eta_1\eta_2, & \eta_1 \leqslant t \\ 0, & \eta_1 > t \end{cases}$$
$$u_*(t, \eta) = \begin{cases} y_t^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \eta) - \Delta y(t, \eta), & \eta_1 \leqslant t \\ 0, & \eta_1 > t \end{cases}$$

Фазовая траектория модели $z(\cdot)$ считалась явным сеточным методом ([11], гл. 6) с временным шагом $\delta$. Область $\Omega$ разбивалась на квадраты со стороной $h_1 = 0{,}05$ и заменялась равномерной сеткой с шагом $h_1$. При формировании управления $v^h(\cdot)$ в модели использовались лишь значения $\psi(\tau_i, \eta)$ в узлах сетки.

На фигуре изображены сечения в узле $\eta_1 = 0{,}27$, $\eta_2 = 0{,}27$ управления $u_*(t, \eta)$ (сплошная линия), а также величин $v^h(\eta, t)$, найденных при $\delta = 1/1200$, $\psi(\eta, \tau_i) = y(\eta, \tau_i)$ (штриховая линия) и $\delta = 1/1500$, $\psi(\eta, \tau_i) = y(\eta, \tau_i) + 0{,}25 \sin(-10t)$ (штрихпунктир). Как показал результат численного эксперимента, величина $\| u_*(\cdot) - v^h(\cdot)\|_{L_2(Q)}$ равна 0,82989 в первом случае и 4,66924 во втором случае.




*Замечания.* 6°. При решении задачи моделирования управления на ЭВМ в случае, когда $E$ — соболевское пространство на $\Omega$, естественно заменять $\Omega$ некоторой сеткой $\overline{\omega} = \{\eta_j \mid j \in [1: N]\} \subset \Omega$ с шагом $h_1$ и предполагать, что значения $\psi(\eta, \tau_i)$ измеряются в узлах $\eta_j$. При этом в качестве уравнения модели можно брать разностный аналог уравнения (2.3) или (3.3), а вместо функций $v^h(\cdot)$ сеточные функции $v^h(\eta_j, \tau_i)$.

*Замечания.* 7°. Для систем с распределенными параметрами, описываемых простейшими краевыми задачами для уравнений параболического и гиперболического типов, вопросы, аналогичные рассмотренным в настоящей работе, обсуждались, в частности, в докладе Ю. С. Осипова «Управление и моделирование в многомерных системах» на общем собрании Отделения механики и процессов управления в ноябре 1984 г.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51—60.
2. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* Метод функций Ляпунова в задаче моделирования движения // Устойчивость движения. Новосибирск. М.: Наука, 1985. С. 53—56.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. С. 456.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. С. 285.
5. *Magenes E.* Topics in parabolic equations: Some typical free boundary problems // Boundary value problems for linear evolution partial differential equations. N. Y.: Acad. Press, 1977. P. 239—312.
6. *Barbu V.* Optimal control of variational inequalities. London, 1984. 306 p. (Res. Notes Math.; № 100).
7. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314—1317.
8. *Barbu V.* Boundary control problems with convex cost criterion // SIAM J. Control and Optimiz. 1980. V. 18. № 2. P. 227—243.
9. *Brezis H.* Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires // Isr. J. Math. 1971. V. 9. № 4. P. 513—534.
10. *Brezis H.* Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations // Contributions to nonlinear functional analysis. N. Y.: Acad. Press, 1971. P. 101—156.
11. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. С. 574.


Свердловск, Зеленогура


Поступила в редакцию
25.VII.1989