ный вывод, также отмеченный в [1]: чем короче флютбет, тем он должен быть толще при одном и том же значении скорости v_0.

В заключение отметим, что предлагаемый метод решения может быть распространен также на случай прямоугольного флютбета, углы которого округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации. В этом случае для конформного отображения на прямоугольник возникающего кругового шестиугольника с прямыми углами и двумя разрезами можно снова воспользоваться результатами [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочина И. Н., Полубаринова-Кочина П. Я.* О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 57—66.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101—104.
3. *Брагинская В. А.* Некоторые задачи фильтрации в анизотропном грунте / ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 229—240.
4. *Павлов А. Т.* Установившееся движение грунтовых вод при двух слоях жидкости различной плотности // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 221—228.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
7. *Береславский Э. Н.* О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3—7.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 30.V.1989

УДК 533.951

Н. А. Глазунова, Ю. А. Степанянц

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НАРАСТАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Методом интегральных соотношений получены оценки фазовой скорости и инкремента нарастания возмущений в сдвиговом потоке замагниченной плазмы, аналогичные известным оценкам [1, 2] в гидродинамике стратифицированной жидкости и уточняющие результаты работы [3].

1. Будем исходить из известной системы уравнений магнитной гидродинамики для идеальной несжимаемой жидкости переменной плотности в поле силы тяжести [4]:

$$\begin{gathered}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{1}{\rho+\rho_1}\left\{-\nabla p + g\rho_1 - \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}\right]\right\}\\ \partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right],\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\\ \partial_t\rho_1 + (\mathbf{v}\nabla)(\rho+\rho_1) = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь p и ρ_1 — возмущения давления и плотности, $\rho(z)$ — невозмущенное распределение плотности по вертикали, остальные обозначения традиционны.

Пусть жидкость заключена между двумя твердыми горизонтальными границами $z = 0$ и $z = H$, в невозмущенном состоянии компоненты векторов скорости потока и напряженности магнитного поля имеют вид $\{U(z), 0, 0\}$, $\{B_0(z), 0, 0\}$. Возмущения этих полей будем считать двумерными: $\mathbf{v} = \{u, 0, w\}$, $b = \{b_x, 0, b_z\}$. Линеаризуя исходную систему уравнений и затем отыскивая решения в виде произведения соответствующих структурных функций, зависящих от z, на $\exp\{ik(x - ct)\}$, приведем систему (1.1) к одному уравнению для вспомогательной функции $f(z) = F(z)[U(z) - c]^n/\rho'$ (штрих означает производную по z), где $F(z)$ — функция, задающая структуру возмущения плотности по вертикали. Полученное таким образом уравнение умножим на комплексно-сопряженную функцию $\bar f(z)$ и проинтегрируем по z от 0 до H; в результате приходим к интегральному соотношению (пределы интегрирования всюду далее для простоты записи опущены):

$$\begin{aligned}
&\int \rho\,[(U-c)^{2(1-n)} - V_A^2\,(U-c)^{-2n}]\,[\,|f'|^2 + k^2\,|f|^2]\,dz + \\
&+ \int \{\rho\,(U-c)^{-2n}\,[n\,(1-n)\,U'^2 - N^2] + n\,(U-c)^{1-2n}\,(\rho U')' - \\
&- n\,(U-c)^{-2n-1}U'\,(\rho V_A^2)' - n\rho V_A^2\,(U-c)^{-2n-1}U'' + \\
&+ n\,(n+1)\,\rho V_A^2\,(V-c)^{-2(n+1)}U'^2\}\,|f|^2 dz = 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь n — произвольное число, $N^2(z) = -g\rho'/\rho$ — квадрат частоты плавучести, $V_A^2 = B_0^2/(4\pi\rho)$ — квадрат альфвеновской скорости, c — фазовая скорость возмущения, которая при задании действительного волнового числа k представляет собой комплексный спектральный параметр краевой задачи для упомянутого уравнения с граничными условиями $f(0) = f(H) = 0$.

Равенство (1.2) представляет собой по существу набор независимых интегральных соотношений для различных значений параметра n. Каждое из этих соотношений может быть использовано для вывода тех или иных оценок для спектрального параметра c. В обычной гидродинамике стратифицированной жидкости, переход к которой естественно осуществляется при B_0, $V_A^2 \to 0$, различные оценки для c удалось получить в случаях $n = 0, 1/2, 1$ [1, 2, 5—9]. В магнитной гидродинамике ситуация более сложная — здесь удается исследовать лишь случай $n = 0$.

2. Рассмотрим случай $n = 0$. Предположим, что основное течение неустойчиво, так что фазовая скорость возмущения комплексна $c = c_r + ic_i$, причем $c_i > 0$. Мнимая часть интегрального соотношения (1.2) при $n = 0$ имеет вид

$$\int \rho\,(U - c_r)\,Q dz = 0,\quad Q = |f'|^2 + k^2\,|f|^2$$

Представим действительную часть соответствующего интегрального соотношения в виде

$$\int \rho U^2 Q dz = I_1 + I_2 + |c|^2 I$$

$$I_1 = \int \rho V_A^2 Q dz,\quad I_2 = \int \rho N^2\,|f|^2 dz,\quad I = \int \rho Q dz$$

Пусть на отрезке $[0, H]$ профиль скорости ограничен и заключен в пределах $U_{\min} \leqslant U(z) \leqslant U_{\max}$. Используем неравенство

$$\begin{aligned}
0 \geqslant \int \rho\,(U - U_{\min})\,(U - U_{\max})\,Q dz = I_1 + I_2 + \chi I \geqslant \\
\geqslant (\chi + V_{A\,\min}^2)\,I + I_2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\chi = (c_r - U_+)^2 + c_i^2 - U_-^2,\quad U_\pm = (U_{\max} \pm U_{\min})/2$$

Если в этом неравенстве отбросить заведомо положительный интеграл I_2 (предполагая, что стратификация статически устойчивая, т. е. $N^2(z) > 0$), то неравенство лишь усилится. В этом случае из него следует результат работы [10] — теорема «о полукруге»: комплексная фазовая скорость нарастающих возмущений заключена внутри полукруга на комплексной плоскости с центром в точке $(U_+,\ 0)$ и радиусом $R = \sqrt{U_-^2 - V_{A\,\min}^2}$ (на фигуре этот полукруг [10] показан штриховой линией). Однако отбрасывание интеграла I_2, содержащего N^2, фактически означает пренебрежение стратификацией (однородная по плотности жидкость). В работе [3] удалось учесть влияние этого интеграла, его удалось выразить через интеграл I, но при этом были использованы довольно грубые оценки, вследствие чего в окончательный результат не вошла зависимость области возможных значений c от волнового числа k. Ниже проводятся более тонкие оценки, аналогичные использованным в [1, 2].

3. Воспользуемся вспомогательным интегральным соотношением для функции $G = f\sqrt{U - c}$. Оно получается после простых, но громоздких преобразований, аналогичных проведенным при выводе соотношения (1.2). Мнимая часть нового интегрального соотношения дает ($N^2/U'^2 \equiv J(z)$ — число Ричардсона):

$$\begin{aligned}
&\int \rho\,(1 + V_A^2\,|U - c|^{-2})\,(|G'|^2 + k^2\,|G|^2)\,dz - \\
&- \int \rho\,\{(1/4 - J)\,U'^2 - (U - c_r)\,|U - c|^{-2}[V_A^2 U'' + \\
&+ U'\,(\rho V_A^2)'/\rho] + 3/4\,V_A^2\,|U - c|^{-4}U'^2[3\,(U - c_r)^2 - c_i^2]\}\,|U - \\
&- c|^{-2}\,|G|^2 dz = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Отбрасывая в (3.1) заведомо положительное слагаемое, содержащее сомножитель $V_A^2\,|U - c|^{-2}$, и оценивая снизу оставшиеся интегралы, приходим к неравенству

$$\Lambda B^2 \geqslant D^2;\quad \Lambda = 1/4 - J_{\min} + (\mu^2 + \nu^2)\,/\,c_i^2 \tag{3.2}$$

$$B^2 = \int \rho U'^2 \mid U - c\mid^{-1} \mid G \mid^2 dz, \quad D^2 = \int \rho\,(\mid G' \mid^2 + k^2 \mid G \mid^2)\, dz$$

$$\mu^2 = {}^9/_4\, V^2_{A\max} + \max \mid V_A{}^2\,(c_r - U)\, U'' / U'^2 \mid$$

$$\nu^2 = \max \mid (\rho V_A{}^2)'(c_r - U) / (\rho U') \mid$$

Используя неравенство

$$\mid G' \mid^2 \geqslant \mid U - c \mid \mid f' \mid^2 + {}^1/_4\, U'^2 \mid f \mid^2 / \mid U - c \mid - \mid U' \mid \mid f' \mid \mid f \mid$$

а также неравенство Коши—Буняковского—Шварца для оценки интеграла

$$\int \rho U' \mid f' \mid \mid f \mid dz \leqslant AB, \quad A^2 = \int \rho \mid U - c \mid \mid f' \mid^2 dz$$

оценим правую часть (3.2):

$$D^2 \geqslant A^2 + {}^1/_4\, B^2 + k^2C^2 - AB, \quad C^2 = \int \rho \mid U - c \mid \mid f \mid^2 dz \tag{3.3}$$

В работах [3, 6] получено неравенство, аналогичное (3.3), но там слагаемые A^2 и k^2C^2 объединены в одно. Это приводит к тому, что после выполнения дальнейших оценок результат не зависит от волнового числа k, т. е. таким образом получается грубая оценка, равномерная по k. Однако, как показано в [1, 7], каждый из интегралов A, B, C может быть оценен по отдельности, что и сделано ниже.

Объединяя неравенства (3.2) и (3.3), запишем

$$(A / B - {}^1/_2)^2 \leqslant \Lambda - k^2C^2 / B^2 \tag{3.4}$$

Для отношения C^2/B^2 из определения величин B и C следует оценка $C^2/B^2 \geqslant c_i^2/U'^2_{\max}$, учитывая которую, неравенство (3.4) можно переписать в виде

$$A^2 + k^2C^2 \leqslant MB^2, \quad M = {}^1/_4 + \Lambda + \sqrt{\Lambda - k^2c_i^2/U'^2_{\max}} \tag{3.5}$$

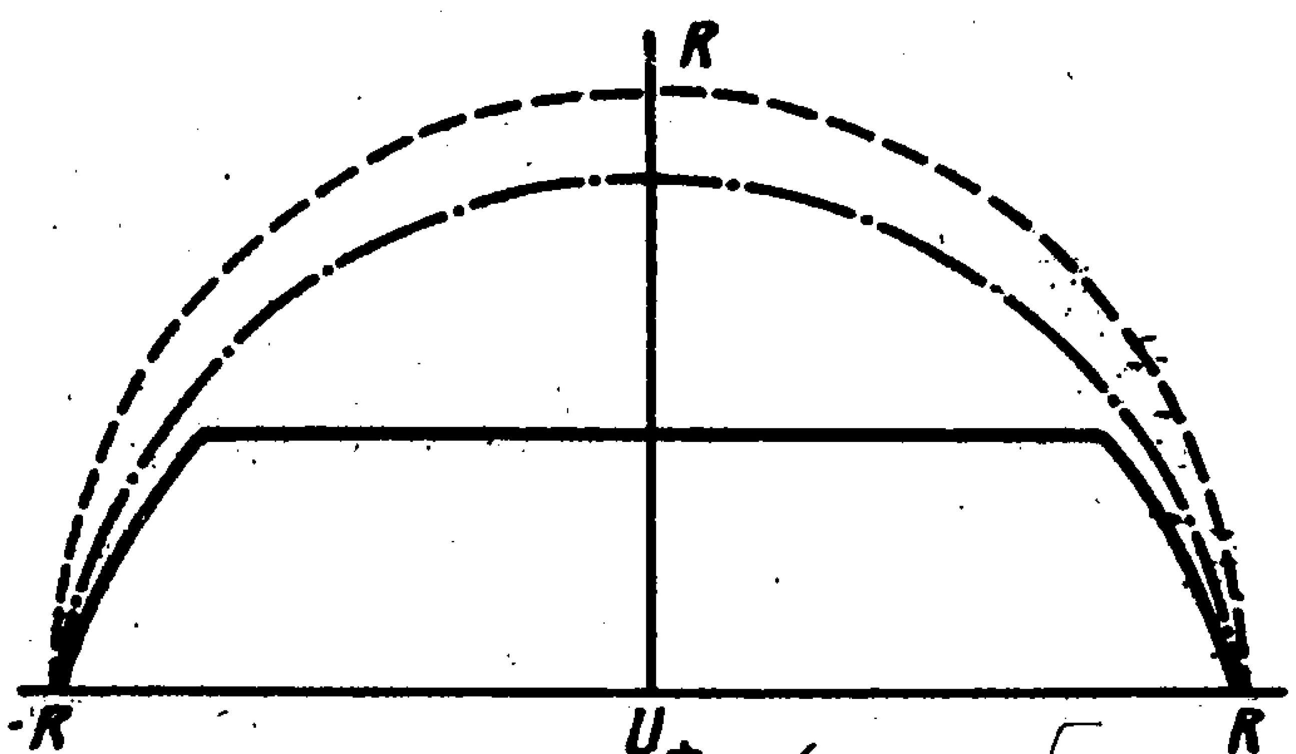
С другой стороны, из определения интегралов A, B, C вытекает

$$A^2 + k^2C^2 \geqslant c_i I, \quad B^2 \leqslant I_3/c_i, \quad I_3 = \int \rho U'^2 \mid f \mid^2 dz$$

Подставляя эти оценки в неравенство (3.5), получим $I_3 \geqslant c_i^2 I/M$. Кроме того, имеем $I_2 \geqslant J_{\min} I_3$. Используя последние два неравенства, получим окончательно из (2.1):

$$(c_r - U_+)^2 + c_i^2\,(1 + J_{\min}/M) \leqslant R^2 \tag{3.6}$$

На комплексной плоскости c это неравенство ограничивает область возможных значений фазовой скорости, причем форма ограничивающей кривой явно зависит как от минимального значения числа Ричардсона $J_{\min}$, так и от волнового числа возмущения k. Полагая в (3.6) $\mu = \nu = 0$, для бесконечно длинных возмущений ($k \to 0$) получим результат работы [3]. Ограничивающая кривая в этом случае превращается в полуэллипс, малая полуось которого в направлении c_i явно зависит от $J_{\min}$ (штрихпунктирная кривая на фигуре). В пределе $J_{\min} \to 0$ полуэллипс переходит в полукруг [10].



Можно показать, что в общем случае $k \neq 0$, $J_{\min} \neq 0$ кривая, ограничивающая область (3.6), всегда лежит как внутри полукруга [10], так и внутри полуэллипса [3] (сплошная кривая на фигуре). При отсутствии внешнего магнитного поля, когда $V_A{}^2 = 0$, из (3.6) следует уже известный результат для обычной гидродинамики стратифицированной жидкости [1, 7].

Отметим еще одно неравенство, вытекающее из (3.6) как требование неотрицательности подкоренного выражения в определении M (см. (3.5)):

$$2k^2c_i^2 \leqslant ({}^1/_4 - J_{\min})\, U'^2_{\max} + \mid U' \mid_{\max} \sqrt{({}^1/_4 - J_{\min})^2\, U'^2_{\max} + 4k^2(\mu^2 + \nu^2)} \tag{3.7}$$

Произведение kc_i представляет собой инкремент нарастания возмущений, следовательно, неравенство (3.7) позволяет оценить сверху его величину.

Наконец заметим, что с ростом напряженности магнитного поля (т. е. при увеличении $V_{A\min}$), как видно из неравенства (3.6), размер области, содержащей комплексную величину c, уменьшается. При достаточно больших напряженностях B_0, таких, что $V^2_{A\min} > U_-{}^2$, правая часть неравенства (3.6) становится отрицательной, а само неравенство теряет смысл. Это соответствует отсутствию неустойчивости сдвигового течения, так как в рамках рассматриваемой здесь идеальной магнитной гидродинамики без учета диссипативных процессов имеет место «вмороженность» силовых линий [4], сдерживающая раскачку колебаний поперек внешнего магнитного поля. В этом смысле магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на сдвиговое течение, аналогично поверхностному натяжению между двумя несмешивающимися жидкостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* О параметрах нарастающих волн в сдвиговых потоках // Океанология. 1983. Т. 23. № 3. С. 390—395.
2. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* О влиянии кривизны профиля скорости на параметры нарастающих волн в сдвиговых потоках // Океанология. 1984. Т. 24. № 4. С. 578—585.
3. *Kochar G. T., Jain R. K.* On Howard's semicircle theorem in hydromagnetics. // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. № 2. P. 654—658.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
5. *Howard L. N.* Note on a paper of John W. Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 509—512.
6. *Kochar G. T., Jain R. K.* Note on Howard's semicircle theorem // J. Fluid Mech. 1979. V. 91. Pt 3. P. 489—491.
7. *Makov Yu. N., Stepanyants Yu. A.* Note on the paper of Kochar and Jain on Howard's semicircle theorem // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 1—10.
8. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* О влиянии стратификации на устойчивость сдвиговых течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 5. С. 1084—1088.
9. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 496—508.
10. *Agrawal S. C., Agrawal G. S.* Hydromagnetic stability of heterogeneous shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 27. № 1. P. 218—223.

Горький

Поступила в редакцию 3.II.1989