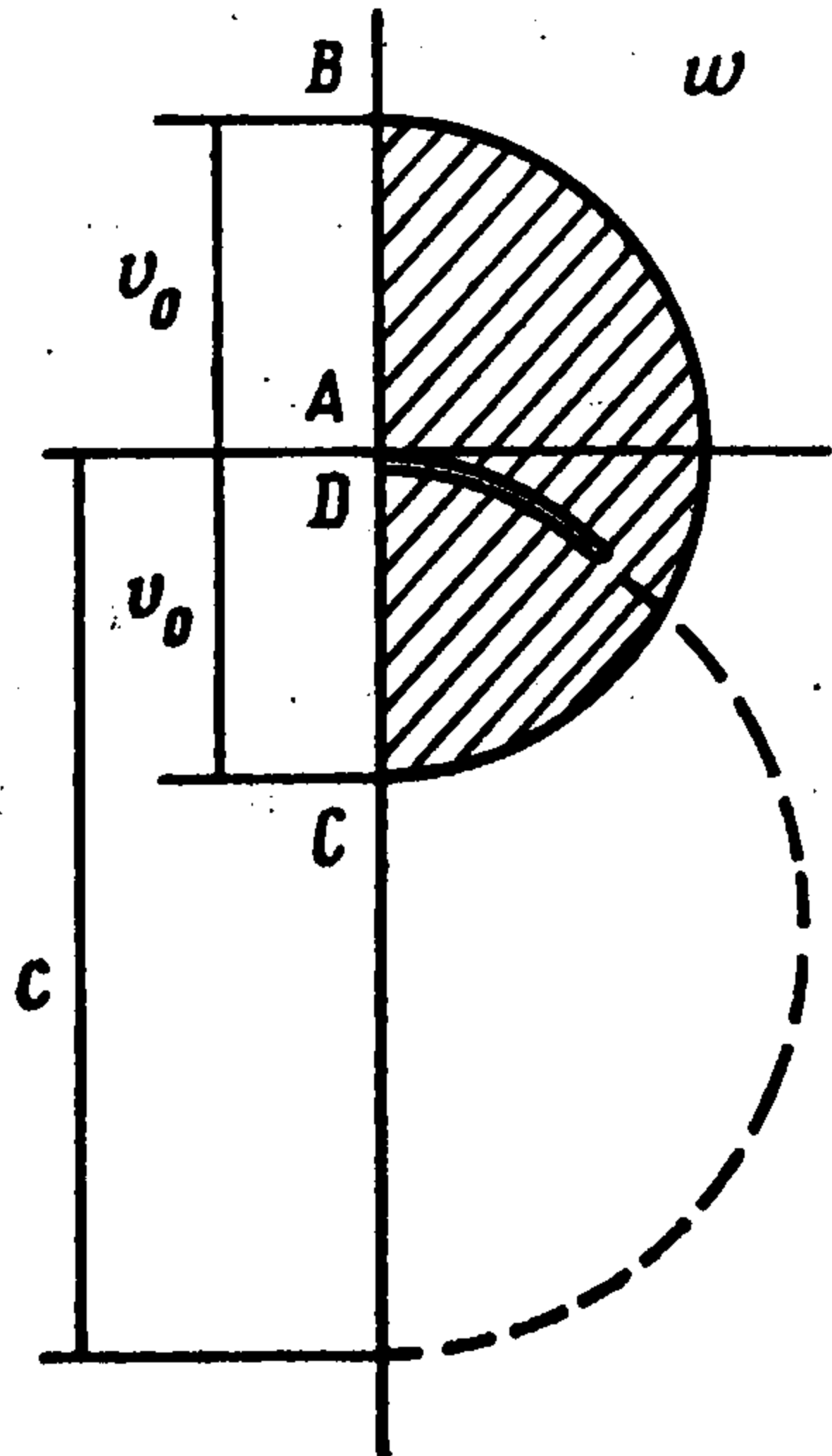
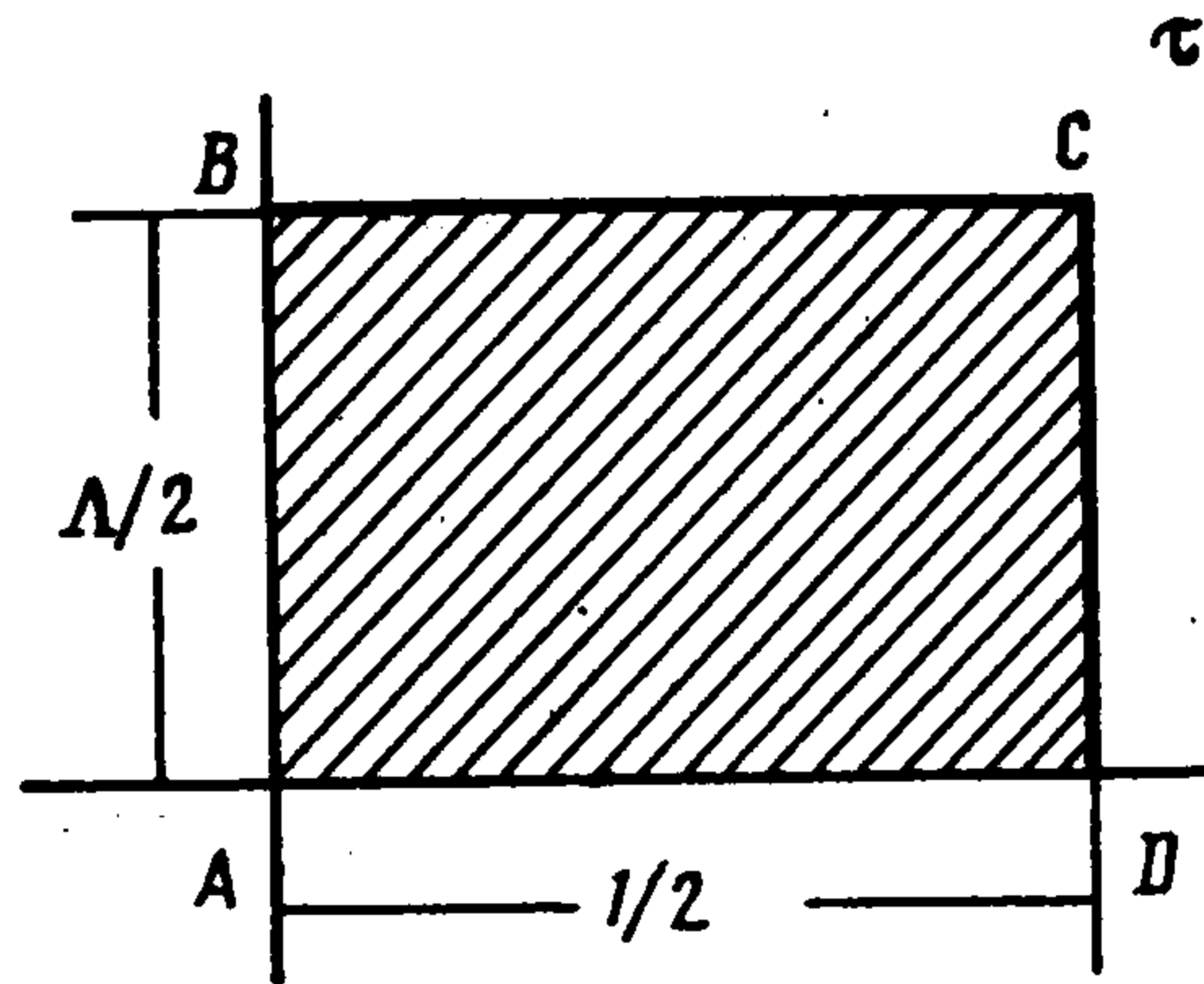


торой глубине имеется слой соленой воды плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), находящийся над непроницаемой толщей соли. Область фильтрации z (фиг. 1) ограничена снизу линией раздела AD , проходящей через фиксированную точку $z_0 = -ih_0$, где h_0 — глубина исходной (до отжима) поверхности соленых вод. Действующий на сооружение напор H , а также ширина флютбета l , левый конец которого фиксируется в точке B ($z = -l_1$), считаются заданными; границы верхнего и нижнего бьефов AB и CD горизонтальны. Движение подчиняется закону Дарси, грунт предполагается однородным и изотропным.

Введем комплексный потенциал $\omega = \varphi + i\psi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kh_0 и h_0 , где k — коэффициент фильтрации грунта.



Фиг. 2



Фиг. 3

Положим $\varphi = -H/2$ на AB , $\varphi = H/2$ на CD и $\omega = Q$ вдоль водонепроницаемого контура флютбета BC , где Q — фильтрационный расход. Тогда получим, что на линии раздела AD должны выполняться условия

$$\varphi - cy = \text{const}, \quad \psi = 0 \quad (c = \rho_2/\rho_1 - 1) \quad (1.1)$$

Первое из соотношений (1.1) для участка AD — следствие допущений о неподвижности соленых вод и непрерывности давления при переходе через линию раздела [5, 6]. Условие же непрерывности потенциала на бесконечности слева и справа вместе с условием [5, 6] $h_0 = (h_1 + h_2)/2$, являющимся следствием предпосылок о несжимаемости жидкости, определяют значение постоянной в условии (1.1), а также разность глубин слева и справа после отжима $h_1 - h_2 = H/c$. Отсюда следует, что

$$h_1 = h_0 + H/(2c), \quad h_2 = h_0 - H/(2c) \quad (1.2)$$

и, таким образом, область течения грунтовых вод становится определенной.

Требуется построить подземный контур BC так, чтобы скорость фильтрации вдоль него имела постоянное значение v_0 и, кроме того, определить положение границы раздела AD .

2. Построение решения. *Случай $v_0 < c$.* Область комплексной скорости плоскости w , изображенная на фиг. 2, представляет собой круговой пятиугольник с прямыми углами при вершинах A, B, C, D и разрезом AD . В качестве канонической области возьмем прямоугольник плоскости τ (фиг. 3), связанной с плоскостью w соотношением

$$\tau = \omega/(2H) + 1/4 \quad (2.1)$$

Тогда фильтрационный расход определяется по формуле

$$Q = HK'/K = H\Lambda \quad (2.2)$$

где $K = K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $\Lambda = K'/K$.

Конформно отобразим теперь прямоугольник плоскости τ на область $ABCD$ плоскости w , используя методику [7] построения отображающих функций для круговых многоугольников рассматриваемого типа. Учитывая (2.1), найдем решение задачи в следующем параметрическом виде:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2H}{v_0} \frac{e^{-i\pi\beta} \vartheta_4(\tau + \alpha) + e^{i\pi\beta} \vartheta_4(\tau - \alpha)}{\vartheta_4(\tau + \alpha) - \vartheta_4(\tau - \alpha)} \quad (2.3)$$

$$\alpha = \text{arctg} \sqrt{(c + v_0)/(c - v_0)}/\pi, \quad \beta = -\text{arctg} (v_0/\sqrt{c^2 - v_0^2})/\pi$$

где ϑ_4 — тета-функция [8].

Запись представления (2.3) для различных участков границы области τ с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям соответствующих участков схемы. Приведем здесь искомые уравнения линии раздела AD и контура BC постоянной скорости.

$$x = \int_{1/4}^{\tau} X_{AD}(\tau) d\tau, \quad y = 2H\tau/c - h_1 \quad \text{на } AD \quad (2.4)$$

$$0 \leq \tau \leq 1/2, \quad X_{AD} = \operatorname{Re}(dz/d\tau)$$

$$x = -l_1 + \int_0^{\tau} X_{BC}(\tau) d\tau, \quad y = \int_0^{\tau} Y_{BC}(\tau) d\tau \quad \text{на } BC \quad (2.5)$$

$$0 \leq \tau \leq 1/2, \quad X_{BC} = \operatorname{Re}(dz/d\tau)|_{BC}, \quad Y_{BC} = \operatorname{Im}(dz/d\tau)|_{BC}$$

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)_{BC} = \frac{2H}{v_0} \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)}\vartheta_1(\tau+\alpha) + e^{i\pi(\alpha+\beta)}\vartheta_1(\tau-\alpha)}{e^{-i\pi\alpha}\vartheta_1(\tau+\alpha) - e^{i\pi\alpha}\vartheta_1(\tau-\alpha)}$$

Отметим предельный случай $c = \infty$ ($\rho_2 = \infty$), который в рамках исследуемой фильтрационной схемы можно трактовать как «затвердевание» соленых вод. Линия раздела превращается при этом в горизонтальный водоупор, в чем можно убедиться, исходя из равенства (2.3), используя выражение для β и учитывая, что $\psi = 0$ на AD . В результате найдем, что при $c = \infty$ на AD

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2H}{v_0} \frac{\vartheta_4\left(\tau + \frac{1}{4}\right) + \vartheta_4\left(\tau - \frac{1}{4}\right)}{\vartheta_4\left(\tau + \frac{1}{4}\right) - \vartheta_4\left(\tau - \frac{1}{4}\right)} \quad (2.6)$$

и, следовательно, $(\partial y/\partial \varphi)_{AD} = 0$, $y_{AD} = \text{const}$.

Переходя в (2.6) к эллиптическим функциям [8], после некоторых преобразований и при помощи подстановки

$$\xi = \frac{2\lambda \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) - (1 + \lambda)}{\lambda [1 + \lambda - 2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)]}, \quad \lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

выражение (2.6) преобразуем к виду, полностью совпадающему с уравнением (7.8) книги [6] (с. 189), если в последнем положить $\alpha = 0$, $\beta = 1$, или результатом деления уравнений (1.5) и (1.4) работы [1].

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае оказывается, что границы бьефов расположены на одной высоте ($T = 0$), а сам флютбет становится при этом симметричным ($l_1 = l_2$).

Случай $v_0 = c$. Совершая предельный переход $v_0 \rightarrow c$ в выражении (2.3) с учетом формул для α и β и раскрывая по правилу Лопиталья возникающую неопределенность $0/0$, найдем после некоторых преобразований

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2H}{cK} \frac{-\pi + iKZ[K(2\tau - 1)]}{Z[K(2\tau - 1)]} \quad (2.7)$$

где Z — дзета-функция Якоби [8]. Это же представление можно получить инверсией области w относительно окружности с центром в точке $w = -iv_0$, которая в рассматриваемом случае является точкой пересечения всех граничных участков области комплексной скорости.

Случай $v_0 > c$. Преобразуя решение (2.3) применительно к соотношению $v_0 > c$, найдем

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2Hi}{v_0} \frac{e^{-\pi\beta}\vartheta_3(\tau+i\alpha) - e^{\pi\beta}\vartheta_3(\tau-i\alpha)}{\vartheta_3(\tau+i\alpha) - \vartheta_3(\tau-i\alpha)} \quad (2.8)$$

$$\alpha = \operatorname{arth} \sqrt{(v_0 - c)/(v_0 + c)}/\pi, \quad \beta = \operatorname{arth} (\sqrt{v_0^2 - c^2}/v_0)/\pi$$

Отметим предельный случай $v_0 = \infty$, связанный с вырождением области комплексной скорости. Точки B и C тогда сливаются на бесконечности (фиг. 2), а прямоугольник плоскости τ превращается в полуполосу (фиг. 3). При этом $k = 0$ и из (2.8) получаем

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2H}{c} \frac{A + \cos 2\pi\tau + i \sin 2\pi\tau}{\sin 2\pi\tau} \quad (2.9)$$

где A — некоторая постоянная, регламентирующая положение вершины разреза в плоскости w . Уравнение (2.9) совпадает (с точностью до обозначений) с уравнением (1.3)

работы [4], если в последнем положить $t = \sin^2 \tau$ и $A = 1/n$, а также с уравнением (2.5) работы [3] при $\gamma = 0$.

Таким образом, рассматриваемый предельный случай соответствует схеме точечного шпунта.

Критический режим. Наконец, остановимся на критическом режиме течения, который возникает, когда $h_0 = H/(2c) - |T|$. Тогда, согласно (1.4), имеем $h_2 = -|T|$ и, следовательно, правый конец линии раздела упирается в границу нижнего бьефа и часть русла выходит на его поверхность. В плоскости w этому случаю соответствует исчезновение разреза и вырождение кругового пятиугольника в треугольник (при $v_0 \leq c$) или четырехугольник (при $v_0 > c$), ограниченный двумя аполлониевыми окружностями и ортогональными к ним отрезками прямых.

Решения для обоих случаев получаются из (2.3) предельным переходом при $k' \rightarrow 0$ и из (2.8) при $\alpha = \Lambda/2$ соответственно и принимают следующий вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2Hi}{v_0} \frac{\sin 2(\alpha + \beta) \left(\tau + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin 2(\alpha + \beta) \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad v_0 \leq c \quad (2.10)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2Hi}{c} \left(1 - i \frac{\sqrt{v_0^2 - c^2}}{v_0} \operatorname{ctg} \pi \tau \right), \quad v_0 > c$$

3. **Схема вычислений и анализ их результатов.** Основные представления (2.3), (2.7) и (2.8) содержат неизвестную постоянную — модуль k , для определения которого служит ширина флютбета l . После нахождения модуля k рассчитываются координаты

Таблица 1

$c \cdot 10^3$	$T \cdot 10^3$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$v_0 \cdot 10^4$	$T \cdot 10^3$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$
125	227,5	422	556	735	0,77	649	1841
225	89,4	500	643	795	119	483	634
275	71,9	510	647	865	312	297	386

Таблица 2

l	$T \cdot 10^3$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	l	$T \cdot 10^3$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	l	$T \cdot 10^3$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$
1,3	142	459	591	1,32	171	435	544	1,35	218	397	482

точек линии раздела AD и контура флютбета BC по формулам (2.4) и (2.5) и определяют глубину флютбета d , разность отметок верхнего и нижнего бьефов T , а также фильтрационный расход по формуле (2.2).

На фиг. 1 изображен плавный контур флютбета и линия раздела, рассчитанные при $H = 0,15$; $h_0 = 1,0$; $c = 0,175$; $v_0 = 0,0805$ и $l = 1,3$ ($l_1 = 1$). В табл. 1 и 2 сведены результаты расчетов по выяснению влияния величин c , v_0 и l на фильтрационные характеристики T , d и Q в случае, когда $h_2 > 0$, т. е. $h_0 > H/(2c)$. В каждом разделе таблиц варьируется один из параметров c , v_0 и l , а остальные фиксируются при тех же значениях, что и на фиг. 1. Анализ зависимости искомых характеристик от указанных параметров сводится к следующему.

1°. С увеличением c , т. е. с усилением подпора со стороны соленых вод в 2,2 раза обе величины d и Q изменяются в 1,2 раза. К таким же изменениям приводит увеличение параметров v_0 и l на 3,6—3,8%, что говорит о большем влиянии скорости фильтрации и ширины флютбета. Кроме того, при указанных изменениях v_0 и l можно заметить некоторую пропорциональность в изменениях величин d , Q , а также T (при $v_0 \geq 0,0805$) — обстоятельство, которое в отношении параметров v_0 и H впервые подчеркивалось в [1].

2°. Наиболее существенным изменениям подвергается величина T , причем изменения эти могут быть весьма значительными. Так, при увеличении скорости v_0 от 0,0735 до 0,0865 T возрастает более чем в 400 раз.

3°. Обращает на себя внимание качественное совпадение результатов при варьировании параметров v_0 и l : с их уменьшением флютбет сильно заглубляется, а расход увеличивается. Из третьего раздела табл. 2 видно, что подтверждается еще один существен-

ный вывод, также отмеченный в [1]: чем короче флютбет, тем он должен быть толще при одном и том же значении скорости v_0 .

В заключение отметим, что предлагаемый метод решения может быть распространен также на случай прямоугольного флютбета, углы которого округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации. В этом случае для конформного отображения на прямоугольник возникающего кругового шестиугольника с прямыми углами и двумя разрезами можно снова воспользоваться результатами [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина И. Н., Полубаринова-Кочина П. Я. О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 57—66.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101—104.
3. Брагинская В. А. Некоторые задачи фильтрации в анизотропном грунте / ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 229—240.
4. Павлов А. Т. Установившееся движение грунтовых вод при двух слоях жидкости различной плотности // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 221—228.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
7. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3—7.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.V.1989

УДК 533.951

© 1990 г.

Н. А. Глазунова, Ю. А. Степанянц

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НАРАСТАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Методом интегральных соотношений получены оценки фазовой скорости и инкремента нарастания возмущений в сдвиговом потоке замагниченной плазмы, аналогичные известным оценкам [1, 2] в гидродинамике стратифицированной жидкости и уточняющие результаты работы [3].

1. Будем исходить из известной системы уравнений магнитной гидродинамики для идеальной несжимаемой жидкости переменной плотности в поле силы тяжести [4]:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho + \rho_1} \left\{ -\nabla p + g \rho_1 \mathbf{e}_z - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] \right\} \\ \partial_t \mathbf{B} &= \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \partial_t \rho_1 + (\mathbf{v} \nabla)(\rho + \rho_1) &= 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p и ρ_1 — возмущения давления и плотности, $\rho(z)$ — невозмущенное распределение плотности по вертикали, остальные обозначения традиционны.

Пусть жидкость заключена между двумя твердыми горизонтальными границами $z = 0$ и $z = H$, в невозмущенном состоянии компоненты векторов скорости потока и напряженности магнитного поля имеют вид $\{U(z), 0, 0\}$, $\{B_0(z), 0, 0\}$. Возмущения этих полей будем считать двумерными: $\mathbf{v} = \{u, 0, w\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, 0, b_z\}$. Линеаризуя исходную систему уравнений и затем отыскивая решения в виде произведения соответствующих структурных функций, зависящих от z , на $\exp\{ik(x - ct)\}$, приведем систему (1.1) к одному уравнению для вспомогательной функции $f(z) = F(z)[U(z) - c]^{n/\rho'}$ (штрих означает производную по z), где $F(z)$ — функция, задающая структуру возмущения плотности по вертикали. Полученное таким образом уравнение умножим на комплексно-сопряженную функцию $\bar{f}(z)$ и проинтегрируем по z от 0 до H ; в результате приходим к интегральному соотношению (пределы интегрирования всюду далее